LOGICA E ARITMETICA

Gottlob Frege

Scritti raccolti a cura di Corrado Mangione

Paolo Boringhieri - Torino

Gottlob Frege

Logica e aritmetica

Scritti raccolti a cura di Corrado Mangione

Prefazione di Ludovico Geymonat

1965 Paolo Boringhieri

Traduzioni di Ludovico Geymonat e Corrado Mangione

Indice

Prefazione di Ludovico Geymonat

Quando (nel 1942) mi accinsi a curare, per questa medesima collana, la traduzione di una prima raccolta di scritti di Frege che uscí poi nel 1947 col titolo Aritmetica e logica,[1] *il nome del grande professore di Jena era pressoché sconosciuto in Italia. Il disinteresse generale per gli studi logico-metodologici, imperante da vari decenni nel nostro paese sia tra filosofi che tra matematici, aveva fatto dimenticare il profondo dibattito tra Peano e Frege pubblicato sulla peaniana "Rivista di Matematica" negli ultimi anni del secolo scorso, e aveva praticamente impedito di leggere la piú recente letteratura straniera sull'argomento, che riconosceva in Frege il massimo logico della nostra epoca.*

Fu proprio questa particolarissima realtà culturale italiana a convincermi dell'opportunità di mantenere la raccolta entro limiti molto ristretti, dissuadendomi tra l'altro dall'includervi lavori in cui Frege facesse uso del suo complicato simbolismo. Oggi per fortuna la situazione è completamente mutata: parecchi giovani studiosi hanno compiuto sforzi mirabili per aggiornarsi sulle numerosissime pubblicazioni straniere di logica, l'uso dei vari simbolismi non crea piú alcuna diffidenza neanche tra i filosofi, le applicazioni della logica alla progettazione dei calcolatori elettronici ha ormai persuaso perfino i tecnici della fondamentale importanza di questa disciplina.

Per tali motivi questa nuova raccolta può uscire completamente rinnovata, cioè arricchita di parecchi importantissimi scritti di Frege non inclusi nell'edizione del 1947, alcuni dei quali a carattere prevalentemente

[1] Il rinvio della pubblicazione del volume — come spiegai in una nota alla prima edizione — fu dovuto in un primo tempo alla mancata autorizzazione da parte del Ministero della Cultura Popolare, in un secondo tempo al sopraggiungere della crisi del 1943, seguíta da quel periodo di storia in cui ogni serio studioso italiano sentí il dovere di sospendere i propri lavori scientifici per altre attività piú direttamente utili al paese.

simbolico. Essa è anzi in grado di presentare al pubblico italiano un'interessante primizia, cioè la traduzione di due inediti, che, sia pure nella loro brevità, saranno certo molto apprezzati dagli specialisti di studi freghiani. Esprimo, anche a nome dell'editore, il piú vivo ringraziamento al professor Hermes, direttore dell'"Istituto di logica matematica e ricerche sui fondamenti" dell'Università di Münster e custode del Nachlass *di Frege, per averci consentito questa pubblicazione.*

Il difficile lavoro di tradurre e annotare le nuove parti della presente raccolta è stato affidato, su mia proposta, a Corrado Mangione, che appartiene appunto alla nuova generazione di studiosi italiani di logica, cui ho poco sopra accennato. Egli ha anche premesso al volume un meditato saggio critico, che ritengo molto illuminante per chi voglia comprendere a fondo la complessa personalità di Frege, il laborioso sviluppo dei suoi problemi e delle vie da lui additate per risolverli, il significato logico-filosofico di queste soluzioni, l'articolarsi del suo simbolismo. Se desidero condividere col dottor Mangione la responsabilità della traduzione, lascio completamente a lui il merito del saggio testé accennato e delle premesse ai nuovi testi inseriti nel volume.

Mentre ringrazio l'amico Paolo Boringhieri per essersi assunto il compito, tutt'altro che lieve, di riprodurre con mirabile cura tutte le formule di logica del testo freghiano, esprimo l'augurio che la presente nuova edizione incontri la stessa favorevole accoglienza ottenuta dalla prima.

LUDOVICO GEYMONAT

Postilla A conferma del risvegliato interesse per la logica in generale e per Frege in particolare, citiamo qui in ordine cronologico alcuni lavori su Frege apparsi di recente a cura di studiosi italiani: CORRADO MANGIONE, *Attualità dell'opera di G. Frege alla luce di recenti studi di logica matematica*, Atti del Convegno nazionale di Logica, Torino, 5-7 aprile 1961; ROSARIA EGIDI, *La consistenza filosofica della logica di Frege*, Giornale critico della Filosofia italiana N. 41 (1962); ID., *Matematica, logica e filosofia nell'opera di G. Frege.* I: *L' "Ideografia" e i quattro scritti sull' "Ideografia"*, Physis, vol. 4, N. 1 (1962); II: *La revisione della filosofia kantiana dell'aritmetica*, ibid., vol. 5 (1963); III: *Le tre ricerche logiche e il compimento dell'ideografia*, ibid., vol. 6 (1964); ID. *Ontologia e conoscenza matematica* (Sansoni, Firenze 1963). FRANCESCA RIVETTI BARBÒ, *Il "senso e significato" di Frege: ricerca teoretica sul senso e designato delle espressioni*, nel volume "Studi di filosofia e di storia della filosofia in onore di Francesco Olgiati" (Vita e Pensiero, Milano 1962); MARIO TRINCHERO, *La fortuna di Frege nell'Ottocento*, Rivista di Filosofia, vol. 55, N. 2 (1964).

Titoli originali e fonti

Parte prima

Begriffsschrift - Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens (Nebert, Halle 1879).

Parte seconda

Die Grundlagen der Arithmetik - Eine logisch-matematische Untersuchung über den Begriff der Zahl (Köbner, Breslavia 1884).

Parte terza

Über das Trägheitgesetz, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, vol. 98, 145-61 (1890).

Über Begriff und Gegenstand, Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie, vol. 16, 192-205 (1892).

Über Sinn und Bedeutung, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, vol. 100, 25-50 (1892).

La recensione all'opera di Hermann Cohen, *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte* (Dummler, Berlino 1883), comparve in "Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik", vol. 87 (1885).

La recensione ai quattro articoli di Georg Cantor apparsi tra il 1886 e il 1888 sulla "Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik", fu pubblicata nella stessa rivista, vol. 100, 269 sg. (1892).

La recensione all'opera di Edmund Husserl, *Philosophie der Aritmetik* (Pfeffer, Lipsia 1891), comparve nella "Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik", vol. 103, 313-32 (1893).

Parte quarta

Lettera del Sig. G. Frege all'Editore, pubblicata in "Revue de Mathématiques", vol. 6, 53 (1898).
Unbekannte Briefe Frege's über die Grundlagen der Geometrie und Antwortbrief Hilbert's an Frege, pubblicate a cura di Max Steck nei "Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften; mathematischnaturwissenschaftliche Klasse", 1941.

Parte quinta

Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet (Pohle, Jena; vol. 1, 1893; vol. 2, 1903); il secondo volume fu ultimato nel 1902.

Appendice

Inediti dal *Nachlass* scientifico di Frege, conservati nell'archivio dell' "Istituto di logica matematica e ricerche sui fondamenti" dell'Università di Münster.

Logica e aritmetica

1.
Introduzione

Corrado Mangione

Premessa

Un preciso interesse per i fondamenti della matematica si può già ravvisare nella necessità, avvertita nella prima metà del secolo scorso, della precisazione di alcuni concetti fondamentali dell'analisi matematica. Nel corso di pochi decenni tale interesse si concreta essenzialmente nel preciso problema di una sistemazione rigorosa dell'aritmetica e nel contempo viene a perdere di fatto una portata limitata alla sola sfera matematica, denunciando in modo piú esplicito la sua profonda rilevanza filosofica; e questa viene messa in luce ancor piú chiaramente allorché si assume come oggetto della ricerca la natura stessa del numero e dei concetti aritmetici.

Enunciato in questi termini, il problema dei fondamenti ha dato luogo all'inizio del nostro secolo — e cioè proprio nel momento in cui pareva definitivamente risolto [1] — a numerosi e imprevedibili sviluppi, i quali determineranno altrettanti indirizzi di ricerca, che in parte si svilupperanno autonomamente, ossia con scopi e metodi indipendenti da quelli del problema iniziale: la logica matematica rappresenta per l'appunto un tipico risultato di questa evoluzione.

In termini moderni possiamo caratterizzare i due aspetti sopra accennati del problema dei fondamenti dicendo che, da un punto di vista filosofico, esso consiste nell'esaminare l'essenza della conoscenza mate-

[1] Al secondo congresso internazionale dei matematici, tenutosi a Parigi nel 1900, Henri Poincaré dichiarava: "Oggi, in analisi, sono presenti solo interi o sistemi, finiti o infiniti, di interi... La matematica... è stata aritmetizzata... Oggi possiamo dire di aver raggiunto il rigore assoluto."

matica e la natura delle ipotesi di questa scienza; da un punto di vista matematico, invece, esso consiste nel delineare una precisa ricostruzione della matematica a partire da determinate ipotesi (che si suppongono *chiarite* filosoficamente) e nell'indagare sulla struttura delle dimostrazioni matematiche.

La stretta connessione di questi due aspetti del problema è oggi un fatto acquisito. Va notato peraltro che non sempre essa fu chiaramente avvertita, ché anzi, nella seconda metà dell'Ottocento, la questione venne di norma affrontata dagli scienziati come puro problema tecnico-matematico e dai filosofi come problema essenzialmente e peculiarmente filosofico, senza una precisa e diretta integrazione dei due indirizzi.

L'autore che con estrema chiarezza comprese la necessità di tale integrazione fu appunto il tedesco Gottlob Frege, la cui opera, da questo punto di vista, occupa una posizione originalissima e di singolare rilievo nel complesso della produzione filosofico-scientifica della seconda metà del secolo scorso.

Generalmente ignorati dai suoi contemporanei fino ai primi anni del Novecento, i risultati scientifici del Frege rappresentano l'estrema conseguenza dei postulati di rigore che furono caratteristici della sua epoca; nel contempo proprio le difficoltà di ordine concettuale messe in luce da tali risultati determineranno ufficialmente la famosa "crisi dei fondamenti" che offrirà nuovi e fecondi indirizzi di ricerca alla scienza moderna. Orbene, cimentandosi in quello che a detta del Cassirer era diventato una sorta di problema di coscienza per la matematica dell'Ottocento, ossia il problema di una deduzione rigorosamente logica del concetto di numero, Frege realizza concretamente una feconda ed equilibrata collaborazione fra pensiero matematico e pensiero filosofico; collaborazione che farà da sfondo costante all'atteggiamento piú consapevolmente metodologico assunto dalla ricerca matematica moderna.

Accanto a un'impostazione tanto significativa e "moderna", si possono tuttavia ravvisare nell'opera freghiana i riflessi di intransigenti chiusure di pensiero che legano inequivocabilmente il nostro autore a una concezione oggi superata della matematica, intesa come un unico costrutto logicamente connesso; avversario irriducibile, per ragioni di natura filosofico-metodologica, tanto delle vedute di Dedekind quanto di quelle di Hilbert, Frege non riuscirà infatti a comprendere a fondo

la novità e la fecondità di una concezione strutturale dell'aritmetica e della geometria. D'altra parte però l'estremo rigore e l'ostinata coerenza con cui egli prospetta la propria soluzione "logicista" del problema dei fondamenti gli permettono non solo di dare un assetto moderno alla logica matematica ma anche di portarla ad un alto grado di sviluppo. Va inoltre osservato che l'ostinazione e addirittura, talvolta, l'asprezza con cui Frege difenderà le sue vedute, fu probabilmente acuita dall'isolamento nel quale egli venne a trovarsi a seguito della completa indifferenza con cui i suoi lavori vennero accolti dagli ambienti scientifici accademici del suo paese.

2. *Gli anni di formazione di Frege*

Friedrich Gottlob Frege nacque l'8 novembre 1848 a Wismar (una cittadina posta sulla baia di Lubecca, un centinaio di chilometri a nord-est di Amburgo) da Alexander Frege, direttore della locale scuola superiore femminile, e da Auguste Bialloblotzky. Venne educato alla fede luterana, e la rigida educazione paterna contribuí ad accentuare nel ragazzo, già chiuso per natura, un temperamento perseverante e ostinato e un atteggiamento alieno da ogni compromesso. Mortogli il padre nel 1860, egli continuò i suoi studi presso il ginnasio di Wismar sotto la tutela e la direzione della madre fino al 1869; trascorse quindi due anni a Jena ed ebbe i primi contatti con l'ambiente accademico di quella città. Nel 1871 si trasferí all'Università di Gottinga e vi si trattenne per cinque semestri accademici, avendo scelto come corsi fondamentali matematica e filosofia e come discipline complementari fisica e chimica.

Negli studi filosofici ebbe a maestro Hermann Lotze, che dal 1844 occupava a Gottinga la cattedra lasciata vacante nel 1841 da Herbart. Come è noto, il Lotze, con prospettive spiritualistiche, combatté tanto l'idealismo quanto il positivismo tedeschi del tempo, sforzandosi di recuperare, contro l'idealismo, il valore e la portata generale dei concetti scientifici; e ciò non solo su un piano meramente filosofico, ma anche rispetto a problemi particolari (sarà proprio lui a dare un serio contributo all'edificazione e allo sviluppo della psicologia intesa non come disciplina filosofica ma come costrutto scientifico). Dal maestro

il giovane Frege ricava un'impostazione realistica della filosofia e una visione abbastanza precisa degli scopi e dei metodi della psicologia.

Sono, questi, anni estremamente fecondi per la ricerca matematica, anni nei quali Weierstrass viene esponendo il proprio programma di aritmetizzazione e Cantor i primi risultati sulla teoria degli insiemi. Anche le ricerche sui fondamenti subiscono notevoli progressi per opera di Dedekind, Cantor ed altri e cominciano a delinearsi i primi, sia pure ingenui, tentativi di una concezione formalistica. È in tale atmosfera ricca di suggestioni che il giovane Frege avanza il problema di una fondazione rigorosa e *definitiva* della matematica; problema che, a suo parere, potrà venire risolto solo da una franca e fruttuosa collaborazione fra pensiero filosofico e pensiero matematico. Mentre infatti il primo deve chiarire i fondamenti generali della matematica in quanto "conoscenza", il secondo deve confermare tali fondamenti, verificarli concretamente, fornendo altresí metodi e strumenti "sicuri" per tale verifica.

Per Frege, il filosofo che a tale problema si era dedicato con una profonda riflessione sull'essenza del pensiero matematico era stato Kant; egli si indirizza quindi allo studio di Kant, riflettendo soprattutto su quelle pagine della *Critica della ragion pura* nella quale i giudizi aritmetici vengono presentati come sintetici a priori. A noi non interessa qui seguire passo passo le argomentazioni in base alle quali Frege giunge ad avanzare l'ipotesi opposta, che cioè i giudizi aritmetici siano analitici; [1] e risulterà chiaro da quanto diremo nel seguito il motivo per cui tali argomentazioni verranno minutamente presentate da Frege solo nel 1884. Ciò che qui interessa mettere in chiaro, oltre ovviamente alla concezione or ora espressa che i giudizi dell'aritmetica siano analitici, è il fatto che, a parere di Frege, l'essere un giudizio analitico o sintetico non riguarda "il contenuto del giudizio, ma la sua giustificazione", tanto che, ove manchi quest'ultima, cade la possibilità stessa di una tale suddivisione.

Nello stesso periodo Frege sottopone a profondo esame la teoria di un altro filosofo, l'inglese John Stuart Mill, il quale peraltro affronta

[1] Nei *Fondamenti dell'aritmetica*, al termine di una sottile e profonda analisi, Frege concluderà che "Kant ha palesemente sottovalutato l'importanza dei giudizi analitici". In essi infatti sono sí contenute tutte le loro conseguenze ma, secondo Frege, "come la pianta nel seme, non come una trave nella casa".

il problema della fondazione della matematica non sulla base di un'attenta indagine sul pensiero matematico, ma a partire dai suoi ideali logici precostituiti, nei quali tenta di far rientrare forzatamente quel pensiero. Di conseguenza la sua concezione empirico-induttiva della logica lo porta a concludere che le verità matematiche altro non sono se non generalizzazioni di fatti della realtà, ossia proposizioni generali derivate dall'esperienza: ad essa quindi, in ultima analisi, debbono potersi ricondurre tutti i giudizi aritmetici. Ma proprio perché questi rifletterebbero circostanze verificantisi nel mondo materiale, sarebbero necessariamente, al pari di questo mondo, contingenti e mutevoli, venendo a dipendere, in definitiva, dalle sensazioni che noi riceviamo dal mondo empirico esterno. Alle concezioni del Mill il Frege obietterà sostanzialmente che egli "confonde sempre la pura proposizione aritmetica con le applicazioni che se ne possono fare, le quali sono spesso di ordine fisico e si riferiscono a fatti osservati".

Anche l'esame dei tentativi compiuti in campo matematico relativamente al problema dei fondamenti non soddisfa il nostro autore. I progressi compiuti dalla matematica nel primo e nel secondo Ottocento erano innegabili; ma in generale si trattava di progressi verso l'alto, che poco o nulla aveva fatto guadagnare alla conoscenza critica delle basi ultime della matematica. Questo interesse "piú per le fronde che per le radici dell'albero" poteva trovare spiegazione, oltre che nella scarsa sensibilità dei matematici per le questioni fondamentali della loro scienza che avessero "sentore" filosofico, anche nella mancanza di cautela metodologica propria dei matematici nelle loro deduzioni: "Il matematico si accontenta infatti che ogni passaggio a un nuovo giudizio si mostri esatto, senza investigare la natura di questo 'mostrarsi', senza esaminare se esso risulti logico o intuitivo". Il matematico è convinto che la logica del suo ragionamento sia esatta, non possa cioè condurre a contraddizioni; ciò nel senso che, se una contraddizione esistesse, essa "salterebbe subito agli occhi" e solo in tal caso metterebbe conto di andare a verificare quale passaggio della catena deduttiva è errato (nel senso appunto che permette l'introdursi di tale contraddizione).

Frege non è altrettanto convinto che un'eventuale contraddizione risulterebbe cosí "evidente"; o, se vogliamo, rifiuta di accettare una

verifica empirico-induttiva del ragionamento, secondo la quale la verità di una proposizione verrebbe dedotta dall'osservare che, quando essa è stata *effettivamente* impiegata, non ha condotto a conclusioni contraddittorie. Al contrario, egli ritiene che basandosi su tale pretesa "evidenza" si possano introdurre inconsapevolmente, nella trattazione matematica, ipotesi la cui essenza rimarrebbe irrimediabilmente oscura. In definitiva appunto, Frege ritiene che i tentativi dei matematici, oltre a non essere abbastanza approfonditi su un piano filosofico, non siano sufficientemente rigorosi su un piano tecnico.

3. *La genesi del programma freghiano*

Tanto nelle critiche mosse ai filosofi, segnatamente a Kant, quanto in quelle contro i matematici, è implicito nel discorso di Frege l'appello a una dimensione linguistica del problema dei fondamenti. Per provare infatti la vera natura (analitica o sintetica) di una proposizione, e in particolare di una proposizione matematica, occorrerà trovare "una dimostrazione di essa che la riconduca alle verità base"; in particolare, se nell'eseguire tale dimostrazione "si fa esclusivamente uso delle leggi logiche generali e di qualche definizione precisa" potremo affermare di avere di fronte una verità analitica. Ma per poter stabilire con esattezza su quali verità-base si fondano le dimostrazioni dell'aritmetica, occorre riuscire a evitare, in tali dimostrazioni, "qualsiasi lacuna nella catena dei ragionamenti"; ciò significa in ultima analisi che la lingua nella quale esse vengono espresse debba essere univoca, organizzata per forme semplici di ragionamento (a evitare "la complessità delle forme logiche coniate dalla lingua comune"), tale cioè da rendere conto, passaggio per passaggio, di "come" esso è avvenuto.

Una lingua siffatta potrebbe proprio essere quella matematica, tradizionalmente rigorosa; ma abbiamo visto quanto Frege critichi questa fede del matematico nella rigorosità dei suoi processi dimostrativi; quanta parte abbia, nello sviluppo di tali deduzioni, una pretesa evidenza, che essendo per sua stessa natura soggettiva e non controllabile costituisce — a parere di Frege — il vizio fondamentale della sicurezza del matematico. È proprio grazie a tale pretesa evidenza che in un'indagine matematica si possono introdurre "fondamenti inavvertiti".

Frege ne conclude che per affrontare adeguatamente il problema dei fondamenti, è necessario costruire una nuova lingua in grado di esprimere un dato contenuto di pensiero e che "da un lato procuri alle nostre espressioni maggior brevità e comprensibilità, dall'altro si muova, a mo' di calcolo, nello schema di poche forme precise in modo da non permettere alcun passaggio che non avvenga secondo regole ben precise, stabilite una volta per sempre".

Già in precedenza, attorno alla metà dell'Ottocento, l'inglese George Boole — della scuola degli algebristi di Cambridge — pur partendo da presupposti e scopi diversi da quelli di Frege, era giunto a conclusioni "linguistiche" in certo senso analoghe. Nell'indirizzo di ricerche iniziato da Hamilton e De Morgan, e dopo che quest'ultimo aveva ribadito la natura logica delle leggi dell'algebra, il Boole aveva avanzato l'ipotesi che l'articolazione stessa delle leggi del pensiero fosse a struttura essenzialmente algebrica. E in una sua opera del 1847 aveva appunto presentato un nuovo algoritmo — l'algebra delle classi — che doveva determinare concretamente tale struttura.

A parte il fatto però che nel periodo in cui Frege maturava la sua critica tale algoritmo aveva trovato scarse applicazioni pratiche o addirittura nessuna, già allora esso aveva assunto piú l'aspetto di capitolo autonomo (che si dimostrerà del resto fecondissimo) della matematica che non la funzione di strumento di indagine logico-linguistica: [1] proprio sotto il primo riguardo era coltivato in Germania, ai tempi di Frege, dall'algebrista Ernst Schröder. In Frege viceversa l'idea di una lingua "logica" nasceva, come abbiamo visto, anzitutto in funzione puramente strumentale (per quanto, ovviamente, essenziale) nei riguardi del preciso problema dei fondamenti della matematica; non voleva cioè servire a stabilire uno schema di connessione delle leggi generali del pensiero, ma si rivolgeva esplicitamente alla traduzione e connessione logica di un contenuto ben determinato. In secondo luogo, nella prospettiva particolare di Frege, essa rappresentava lo strumento *comune*

[1] La situazione attuale si è, per cosí dire, ancora una volta capovolta, nel senso che in tempi recenti si osserva un rigoglioso rifiorire di indagini di algebra della logica. Alcuni autori ritengono anzi di poter esprimere questo sviluppo affermando che la logica, nata come algebra (grazie proprio alle ricerche di Boole), abbia assunto successivamente un'organizzazione essenzialmente metamatematica (alla Frege appunto) per ritornare quindi, ai nostri giorni, alla sua primitiva impostazione algebrica.

atto a porre tanto il matematico quanto il filosofo nelle condizioni adeguate per risolvere il problema dei fondamenti.

Se dunque l'essersi posto su un piano linguistico non è un tratto essenzialmente originale della riflessione freghiana, senza dubbio originale è l'aver afferrato chiaramente la componente linguistica di *quel* particolare problema. Con ciò, oltre a offrire una via non ancora tentata per risolverlo, oltre a giungere come vedremo a darne un'effettiva anche se effimera soluzione, egli riuscirà, l'abbiamo ricordato piú volte, a organizzare in modo assolutamente moderno la logica matematica e a dare preziosi contributi per un suo assetto seriamente scientifico.

È comprensibile, da quanto finora detto, che i risultati della sua analisi portassero Frege ad accostarsi a Leibniz. Questi aveva vagheggiato la creazione di una lingua *characteristica* (o *characterica*), di un linguaggio universale cioè, nel quale poter tradurre con rigore e senza tema di equivoci ogni concetto scientifico e filosofico, e al quale poter applicare un *calculus ratiocinator* che in tale lingua permettesse di risolvere in modo essenzialmente algebrico (è il famoso *calculemus!* leibniziano) qualunque questione di consequenzialità fra concetti, dando nel contempo precise garanzie per quanto riguarda i metodi impiegati. La lingua del Leibniz, inoltre, tiene esplicitamente conto degli *entia*, ossia degli individui di un certo universo di discorso; argomento questo che Frege sosterrà a favore della propria "scrittura per concetti" contro i sostenitori della lingua simbolica di Boole: in armonia con l'idea leibniziana, il linguaggio artificiale di Frege si applica a "oggetti" ben determinati, o a relazioni fra tali "oggetti" ecc., laddove Boole, come osservavamo poco sopra, si interessa ai possibili collegamenti strutturali di individui lasciati a priori del tutto indeterminati.

Il metodo leibniziano è per Frege il modo piú naturale di creare una logica formale; e in opposizione alle idee degli psicologisti, i quali pensavano che una tale logica dovesse esprimere le leggi del "ritener vero", Frege ne afferma l'oggettività, ritenendola esprimere le leggi "dell'esser vero". In tale posizione freghiana è difficile non ravvisare significativi punti di contatto con le teorie logiche di Bernhard Bolzano (i cui *Paradossi dell'infinito* erano stati pubblicati postumi nel 1851); tuttavia, né la lettura delle opere pubblicate da Frege, né l'esame dei suoi lavori inediti consente la pur minima affermazione in appoggio

alla tesi di una possibile influenza del pensiero di Bolzano sul nostro autore, e la nostra precedente affermazione ha tutte le probabilità di rimanere allo stadio di pura e semplice congettura.

4. *L'Ideografia*

Adottoratosi in filosofia al termine del periodo di Gottinga, nel 1874 Frege torna quindi a Jena con un programma scientifico già chiaramente formulato e che, implicitamente, siamo venuti esponendo nelle pagine precedenti: il programma cioè di dimostrare la natura analitica delle proposizioni matematiche, di costruire una lingua logica abbastanza "forte" da poter esprimere l'aritmetica e tale da fornire determinate garanzie di rigore alle dimostrazioni. La concezione sulla quale esso si fondava si può esprimere sinteticamente come segue: i concetti aritmetici (e in particolare lo stesso concetto di numero naturale) sono definibili in termini puramente logici; le proposizioni aritmetiche sono deducibili da (o viceversa, riconducibili a) un ristretto numero di proposizioni primitive (assiomi) della logica mediante regole logiche di inferenza. In base a questo programma, un duplice compito attendeva Frege: 1) la realizzazione dello strumento linguistico e 2) la dimostrazione, per il suo tramite, della riconducibilità dei giudizi aritmetici agli assiomi logici.

Il primo punto, in particolare, esige la realizzazione di una lingua concettualmente e logicamente piú controllata del linguaggio comune; una lingua che eviti prolissità ed equivocità di significati e permetta di esprimere solo (e *tutto*) ciò che effettivamente interessa la catena deduttiva dei ragionamenti; una lingua infine che, fissando una volta per tutte i propri mezzi espressivi, eviti ogni ricorso all'intuizione o all'evidenza connaturati in ogni linguaggio comunicativo naturale, ed elimini altresí quella forma di convincimento soggettivo che molto spesso può sorgere in chi ascolta piú che dall'effettiva concatenazione logica della dimostrazione, dall'influenza "emozionale" che chi parla può esercitare su di lui. Ciò spiega in particolare perché Frege concepisca la necessità di una "scrittura" piú che di una "lingua" simbolica.

E in Jena, sua patria di adozione, egli si dedica per cinque anni al primo di questi compiti, senza peraltro che dai primi lavori trapeli la pur minima indicazione del vero indirizzo delle sue ricerche. Tanto

infatti il suo primo studio [1] del 1874, col quale si adottorò in matematica, quanto un successivo scritto [2] del 1878, col quale conseguí la libera docenza, non rivelano — né fanno sospettare — un suo qualche interesse non strettamente matematico. Ma solo un anno piú tardi, nel 1879, nominato professore straordinario all'università di Jena, Frege pubblica il suo primo importantissimo lavoro di logica: la *Begriffsschrift - Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*,[3] nella quale, in accordo al programma sopra esposto, presenta una "scrittura per concetti" simbolica.

Ora è fuori dubbio che per giungere all'attuazione del suo programma Frege doveva anzitutto procedere alla creazione della lingua, per derivare successivamente per suo tramite le leggi aritmetiche; purtuttavia il presentare l'apparato "strumentale" di tale programma senza farlo precedere da un qualche lavoro preparatorio, che lo giustificasse su un piano piú generale, fu certamente un errore, e ciò proprio in considerazione dell'ambiente culturale nel quale Frege operava. Non è da escludere che questa determinazione fosse dettata a Frege da una sorta di ingenua e assoluta sicurezza nei risultati delle sue riflessioni: egli si era forse convinto di aver trovato la soluzione *unica* e *definitiva* del problema di una fondazione dell'aritmetica; e cosí, dal momento che a suo parere i princípi di tale soluzione non erano discutibili, non stimò opportuno soffermarsi a lungo su di essi, concentrando i propri sforzi nella presentazione della "scrittura per concetti". A conferma di questa tesi si osservi che Frege, cinque anni piú tardi, nei *Fondamenti dell'aritmetica*, scriverà in proposito: "Contemporaneamente voglio, facendo precedere alla mia teoria l'esposizione di quelle altrui, spianare il terreno alla mia concezione, e dimostrare che le altre non conducono allo scopo voluto, sicché la mia non potrà apparire come una fra tante opinioni, tutte ugualmente giustificabili. *Cosí spero di portare una soluzione definitiva al problema, almeno nei punti fondamentali.*"

[1] *Rechnungsmethode, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen* [Metodi di calcolo fondantisi su un ampliamento del concetto di grandezza] (Jena 1874).

[2] *Über eine Weise, die Gestalt eines Dreiecks als complexe Grösse aufzufassen* [Su un modo di concepire la forma di un triangolo come grandezza complessa] (Jena 1878).

[3] *Ideografia - Un linguaggio in formule del pensiero puro, a imitazione di quello aritmetico*; adottiamo il termine "ideografia" introdotto da Peano per il tedesco *Begriffsschrift*. Questo testo costituisce la prima parte del nostro volume.

Comunque sia, Frege nell'*Ideografia* limita a poco piú di una decina di pagine iniziali (peraltro estremamente chiare e profonde) le argomentazioni generali che giustificano l'introduzione della lingua simbolica, e anzi ne mostrano la necessità, e dedica il resto dell'opera alla presentazione concreta della sua ideografia.

La lingua *characteristica* dell'*Ideografia* si fonda su cinque segni primitivi, mediante i quali l'autore mostra di poter esprimere ogni concetto, ogni relazione fra concetti e ogni differenziazione logica fra di essi; alla "dinamica" di tale lingua Frege provvede introducendo un'unica regola di inferenza, con la quale prende corpo il suaccennato *calculus ratiocinator* leibniziano. Poiché l'opera figura come prima parte del nostro volume, non ci tratterremo in modo particolare sul suo contenuto; data però la sua importanza,[1] è conveniente metterne in luce alcuni aspetti e risultati che ci saranno utili nel seguito.

L'opera contiene la prima moderna sistemazione assiomatico-deduttiva della logica dei predicati e, in subordine, della logica degli enunciati.[2] Tale sistemazione viene raggiunta da Frege precisando e introducendo nella sua opera concetti fecondissimi per la logica moderna. Anzitutto viene assunta da Aristotele la nozione di proposizione intesa come quell'entità linguistica che può essere vera o falsa (Frege dice "che può venire affermata o negata"); ciò limita di conseguenza il campo di interesse della lingua simbolica rispetto al linguaggio comune, il quale considera, oltre alle proposizioni "dichiarative", anche proposizioni ottative, o esclamative, o imperative eccetera, le quali ovviamente non godono della proprietà caratteristica sopra enunciata di risultare vere o false. Inoltre, il contenuto di una proposizione ossia "il pensiero da essa espresso" invece di essere considerato scisso, secondo i normali schemi grammaticali della lingua comune,

[1] A proposito di quest'opera, H. Scholz affermava, nella sua relazione al congresso internazionale di filosofia scientifica del 1934: "Il 1879 è un anno storico, della massima importanza per l'economia della logica occidentale; poiché è l'anno in cui apparve l'*Ideografia* di Frege e quindi l'anno di nascita dell'esatto calcolo delle proposizioni e di un calcolo dei predicati che su di esso si fonda..." E I. M. Bochenski, nel suo *Formale Logik* del 1956, parlando della portata dell'opera di Frege, ribadisce che "la sua *Ideografia* può venir paragonata soltanto a *una* opera nell'intera storia della logica: ai *Primi analitici* di Aristotele".

[2] Il sistema enunciativo di Frege è fondato su sei assiomi. Łukasiewicz dimostrò successivamente che essi non sono indipendenti, in quanto il terzo poteva venir derivato dal primo e dal secondo (Erkenntnis, vol. 5, 1935).

in soggetto e predicato, viene considerato scisso, in analogia con l'analisi matematica, in funzione e argomento; ciò consente, parlando approssimativamente, di predicare una proprietà non solo di enti determinati (ad esempio "Roberto è bello", in cui la proprietà "essere bello" viene predicata dell'individuo "Roberto") ma anche in modo indeterminato (ad esempio, "x è bello", in cui la proprietà "essere bello" viene predicata in modo indeterminato di ogni individuo appartenente al dominio in cui la variabile x può assumere valori); e questo — come si vede chiaramente — altro non è se non l'introduzione del concetto di forma proposizionale.

Altro merito importantissimo dell'opera in esame è costituito dall'introduzione dei quantificatori universale e esistenziale (come si vedrà nell'appendice a questa introduzione, appendice dedicata appunto al simbolismo, Frege introduce un segno specifico solo per uno dei due quantificatori, quello universale, rendendo invece il quantificatore esistenziale con l'ausilio di questo e del segno di negazione). L'introduzione dei quantificatori è un argomento che Frege addurrà a dimostrare, su un piano ideografico, la superiorità del proprio simbolismo rispetto a quello di Boole. Questi infatti, non avendo introdotto un apposito segno per la generalità, non poteva rendere simbolicamente il caso della generalità parziale. Per comprenderne l'importanza, da un punto di vista concettuale, basterà tenere presente che proposizioni considerate come "primitive" nella logica classica (aristotelica) quali ad esempio "tutti gli A sono B" o "alcuni A sono B" possono ora venir ulteriormente scisse e indagate mediante l'uso dei quantificatori e dei normali connettivi logici. Nicolas Bourbaki, nei suoi *Éléments d'histoire des mathématiques* afferma che "l'assenza di veri e propri quantificatori (nel senso moderno) fino alla fine del diciannovesimo secolo è stata una delle cause del ristagno della logica formale"; e Rulon Wells, nel volume 24 del "Journal of symbolic Logic", nel corso di una recensione alla ristampa di alcune opere di Boole, dichiara ancor piú esplicitamente che "Boole non può essere correttamente chiamato 'il padre della logica moderna'. Le scoperte che distinguono nettamente la logica moderna da quella classica sono invero l'uso dei quantificatori (o piú generalmente, di operatori che vincolano variabili e possono essere

inseriti l'uno nell'altro) e il concetto di sistema formale; orbene, entrambi sono dovuti a Frege e non risultano presenti neppure in embrione nelle opere di Boole." (Qui "sistema formale" va inteso semplicemente come "sistema assiomatico con regole di derivazione".) Riferendoci a quanto Frege dirà in numerose opere successive a proposito del paragone fra la "lingua" da lui presentata, quella di Boole e quella che Peano costruirà successivamente, possiamo affermare in generale che, per il nostro autore:

a) la "lingua" booleana, che senza presupporre alcun contenuto specifico permette dei passaggi puramente formali da certe configurazioni segniche ad altre, è, in senso leibniziano, un mero *calculus ratiocinator* ma non una lingua *characteristica*;

b) la "lingua" di Peano presuppone sí la matematica, ma non è completa nel senso che non ha una sintassi (il calcolo) sufficientemente articolata per essere autonoma, ossia per permettere effettive derivazioni: essa è una lingua *characteristica* non integrata da un adeguato *calculus ratiocinator*. In ogni caso, essa è fra le due quella che piú si accosta alla realizzazione di Frege;

c) questa, infine, evitando la deficienza "sintattica" della lingua peaniana, si presenta da una parte come un sistema perfettamente adeguato a cogliere, tradurre e relazionare un contenuto, ossia è una lingua *characteristica*, dall'altra come una ben determinata e concreta organizzazione deduttiva, ossia è un *calculus*. In altri termini, Frege ritiene (e a ragione) di aver realizzato un modello coerentemente equilibrato dell'idea leibniziana.

Nell'*Ideografia* è già chiaramente evidente la distinzione operata da Frege tra momento sintattico (puramente calcolistico) e momento semantico (nel quale invece i segni del calcolo vengono interpretati) di una lingua simbolica: distinzione questa che implicitamente, nelle piú generali premesse freghiane, è risolta però in modo unidirezionale, nel senso che per Frege la sintassi di una lingua non è mai disgiunta dalla semantica, ma è da questa condizionata costantemente, al punto che la prima sarebbe sterile senza la seconda. Su tale questione (che in definitiva è il perno delle obiezioni cui abbiamo accennato di Frege a Boole) possiamo sin d'ora anticipare quanto Frege dirà

nel secondo volume della sua opera fondamentale, ventiquattro anni piú tardi: "Si potrebbero presentare a una persona le nostre formule I-V e le definizioni A-H del primo volume come punto di partenza ... si potrebbero esporre a questa persona le regole in base alle quali effettuare i passaggi, e si potrebbe quindi assegnarle il compito di ottenere, da questi dati iniziali, la nostra formula (71) del primo volume; tutto ciò senza che tale persona abbia la piú pallida idea del senso e del significato di questi segni, né dei pensieri che quelle formule esprimono. Si potrebbe financo pensare che questo compito venisse assolto ... ma ciò malgrado mancherebbe completamente quello sviluppo che ha loro conferito interesse. Ciò può anche essere possibile, ma ben difficilmente vantaggioso ..."

Altra importantissima innovazione dell'*Ideografia* è la netta distinzione fra linguaggio oggetto e metalinguaggio. Frege avverte cioè chiaramente che le regole in base alle quali possono trarsi deduzioni in un dato linguaggio non sono, per cosí dire, dello stesso genere delle proposizioni del linguaggio stesso, ma *vertono* su tali proposizioni, sicché vanno tenute rigorosamente distinte da esse.

In questo stesso ordine di idee, occorre accennare alla rigorosa distinzione operata da Frege fra linguaggi diversi: mentre — egli pensa — a livello del linguaggio comune non ha senso indagare sul significato di un singolo termine, ma occorre per questo precisare il significato di una proposizione che contenga quel termine, a livello ideografico ogni elemento primitivo deve invece avere un significato rigorosamente precisato; onde il significato di un complesso di segni viene determinato proprio in funzione dei significati dei singoli termini primitivi che in esso intervengono. Vedremo che questo secondo canone sarà il punto di partenza per l'interpretazione di un complesso di segni come *funzione di verità* dei suoi componenti elementari.

Mette infine conto di osservare esplicitamente due fatti:

1) nell'*Ideografia* Frege fonda una logica "intensionale", nel senso che fa riferimento costante a concetti (predicati) e non a estensioni di concetti (classi); in altre parole non impiega la nozione (al livello ideografico: il simbolo) di classe;

2) sempre in tale opera non precisa il concetto di "contenuto di una proposizione", ma si limita a chiarirlo in modo intuitivo quale "pen-

siero" da essa espresso. Circoscrive però il significato di tale termine: da un lato introducendo il concetto (relativo) di contenuto concettuale, ove con questo termine viene inteso un contenuto che abbia, in una data questione, effettivo interesse per la catena dei ragionamenti (ciò gli consente, ad esempio nel caso particolare che la "scrittura per concetti" sia applicata all'aritmetica, di isolare fra tutti i contenuti possibili quelli propriamente aritmetici); dall'altro lato, enucleando fra i contenuti concettuali quelli che egli chiama "contenuti giudicabili", tali cioè che possano venir affermati o negati. Una precisazione implicita del concetto di contenuto (in connessione con l'introduzione di una logica "estensionale") sarà caratteristica delle opere di Frege a partire dal 1891.

5. *La difesa dell'Ideografia. I Fondamenti*

L'*Ideografia* non ebbe fortuna; cadde praticamente nell'indifferenza generale dei circoli matematici e filosofici del tempo, né maggior considerazione ricevette da parte di quegli autori, come Cantor, Dedekind, Kronecker, Helmholtz, che, sia pure da punti di vista diversi, si dedicavano allo stesso ordine di problemi. Fatto è che per i matematici la proposta di Frege si configurava come un'eccessiva e inutile esigenza di rigore assumente quasi l'aspetto di un preziosismo linguistico, il quale toglieva alla ricerca matematica gran parte del suo fascino creativo, costringendola a un continuo e attento esame metodologico che in definitiva si risolveva in sterile prolissità; per i filosofi, viceversa, ai quali Frege presentava la sua opera come un potente strumento di indagine che desse garanzie di scientificità, era intollerabile proprio l'essenza matematica della costruzione freghiana, l'organizzazione rigorosamente calcolistica della lingua simbolica. In definitiva, a questo fallimento concorre in modo non trascurabile proprio l'aperta e dichiarata intenzione di Frege di concretare una linea di collaborazione fra ricerca matematica e indagine filosofica. Quest'intenzione peraltro resterà un punto fermo e caratteristico dell'atteggiamento di Frege nei riguardi del problema della fondazione dell'aritmetica. Nei *Fondamenti*, per esempio, egli affermerà, con estrema consapevolezza: "Senza dubbio il mio studio diventerà... assai piú filosofico di quanto possa sembrare

opportuno a molti matematici, *ma una ricerca profonda del concetto di numero dovrà sempre risultare qualcosa di filosofico. Essa costituisce un compito comune alla matematica e alla filosofia.*"

Ma è fuor di dubbio che la componente preponderante di tale generale indifferenza fu costituita dall'infelice scelta del simbolismo operata da Frege. Se pure questi continuerà, per tutta la sua vita, a difendere (specie contro il sistema ideografico di Peano) tale simbolismo, e anzi lo conserverà inalterato da un punto di vista esteriore anche nella sua opera principale, è innegabile che molte delle critiche fossero esatte. Il simbolismo di Frege si impernia su una disposizione bidimensionale delle espressioni che, a cominciare dal basso verso l'alto, esibisce per intero la successione delle "condizioni" affinché una certa "tesi" valga. Oltre a limitare l'uso delle parentesi, con tale disposizione si ottiene senza dubbio un notevole risultato di efficacia e chiarezza; ma è altrettanto certo che l'effetto "psicologico" di complicazione, di prolissità e di scarsa trasparenza che se ne deriva non invita ad approfondirne l'interpretazione e la lettura. E infatti proprio su questo aspetto è basata l'unica recensione — assolutamente negativa — dedicata all'opera dal già ricordato Ernst Schröder. Tale recensione (Schröder imposta la sua critica stabilendo un paragone fra il simbolismo di Frege e la piú agevole notazione booleana) tracciò una specie di *cliché* cui si ispirarono in generale i successivi critici dell'opera di Frege, ai quali l'argomento di una scarsa "leggibilità" della presentazione simbolica sembrò fornire un facile pretesto per non approfondire l'esame del suo pensiero; in tale errore, per sua stessa dichiarazione, cadde in un primo momento lo stesso Russell.

Frege fu certamente molto toccato da tale accoglienza, o meglio, come dirà piú tardi, da tale "mancanza di accoglienza", ma, accantonato provvisoriamente un piú completo lavoro attorno al secondo còmpito conclusivo del suo programma, intervenne validamente a difesa della propria creazione. Nel 1880 scrisse un lungo articolo in risposta alla recensione di Schröder, nel quale sostanzialmente sosteneva l'impossibilità di confrontare due simbolismi solo in termini di maneggevolezza e agilità calcolistica e ribadiva la necessità di considerare, per tale paragone, gli *scopi* che un simbolismo si prefigge; l'articolo gli venne rifiutato da quattro fra le maggiori riviste tedesche dell'epoca, ed

è tuttora inedito.[1] Con ostinata tenacia, degna sicuramente di miglior fortuna, Frege, che già nello stesso 1879 aveva esposto in un breve articolo le possibilità di applicazione della scrittura per concetti, nei tre anni successivi ne diede in altri due articoli un'ampia giustificazione da un punto di vista scientifico e indicò i fini da essa perseguiti.[2]

Il risultato non fu certo incoraggiante: anche questi articoli caddero nel vuoto, non riuscirono a scuotere minimamente l'indifferenza dell'ambiente scientifico-filosofico cui erano destinati. Frege comprese forse di aver affrontato la questione in una direzione sbagliata per quanto riguardava la possibilità di introdurla convenientemente; e nel 1884 espose in un saggio (nel quale evita accuratamente l'impiego del simbolismo) dal titolo *Die Grundlagen der Arithmetik* [3] le sue idee generali sul problema dei fondamenti.

Anche quest'opera si può far rientrare senza difficoltà nel piano di difesa dell'ideografia. Ma essa trascende sostanzialmente tale piano, in quanto qui la questione della necessità di una scrittura per concetti non viene risolta in poche pagine quasi fosse chiara per tutti, ma risulta viceversa fra le conclusioni di un'analisi — intrapresa da un punto di vista storico, filosofico e matematico — del capitolo piú specifico dell'intero problema dei fondamenti: quello della definizione del concetto di numero naturale. Il pensiero di Frege vi viene espresso con tale chiarezza, profondità e completezza da far passare in secondo piano la probabile origine polemica del saggio, destinato a rimanere come un modello di analisi condotta in linguaggio comune e in chiave storico-filosofico-matematica sull'argomento. Il saggio è inserito come seconda

[1] Si tratta dell'articolo schedato nel *Nachlass* scientifico di Frege col titolo *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift* [La logica calcolistica di Boole e l'ideografia], o anche semplicemente indicato come *L'antiboole*. Gli venne rifiutato successivamente da Oskar Schlömilch per la "Zeitschrift für Mathematik und Physik", da Felix Klein per i "Mathematische Annalen", da Hermann Ulrici per la "Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik" e infine da Richard Avenarius per la "Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie".

[2] Si tratta dei tre articoli: "*Über Anwendung der Begriffsschrift*" [Sull'applicazione dell'ideografia], S. B. Jena., Ges. Med. Naturwiss., 29-33 (1879); *Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift* [Sulla giustificazione di un'ideografia da un punto di vista scientifico], Z. Phil. phil. Kritik, vol. 81, 48-56 (1882); *Über den Zweck der Begriffsschrift* [Sullo scopo dell'ideografia], Jena. Z. Naturw., suppl. vol. 16, 1-10 (1883). Nei due ultimi Frege dà ampia esposizione autonoma di alcuni argomenti già compresi nell'articolo citato alla nota precedente.

[3] *Die Grundlagen der Arithmetik - Eine logisch-matematische Untersuchung über den Begriff der Zalh* [I fondamenti dell'aritmetica - Una ricerca logico-matematica sul concetto di numero] (Köbner, Breslavia 1884). Si veda la parte seconda di questo volume.

parte del nostro volume e non sarà quindi necessario trattenersi lungamente su di esso; ci limiteremo, anche qui, a metterne in evidenza alcuni aspetti utili per il prosieguo della nostra esposizione.

Nel contesto della presentazione critica generale del programma freghiano vengono fornite, nel lavoro in esame, una precisa se pur succinta formulazione della teoria del concetto (che verrà ripresa, come vedremo, nel 1892 nell'articolo *Über Begriff und Gegenstand* [1]) e un'analisi rigorosa (la *prima* veramente tale) del principio di astrazione, sul quale si basa la definizione logica di numero. Noi esporremo le linee generali di tale definizione al paragrafo 10; qui vogliamo osservare che Frege, stabilito che l'attribuzione di un numero comporta un'affermazione intorno a un concetto, definisce il numero stesso come "estensione" di un concetto. A questo punto egli chiarisce, in una nota a piè di pagina, che invece dell'espressione "estensione di un concetto" avrebbe potuto parlare semplicemente di "concetto"; non lo fa perché il confutare le obiezioni che gli potrebbero venir mosse, lo porterebbe "troppo lontano". La cosa è molto importante, oltre che ovviamente da un intrinseco punto di vista concettuale, anche per i riflessi che è suscettibile di avere nei riguardi dell'ideografia. Se infatti sarà possibile confutare quelle obiezioni, si potranno tradurre le attuali argomentazioni nella scrittura per concetti già presentata nell'*Ideografia*, che abbiamo visto essere "intensionale" ossia espressa in termini di concetto. Se invece una tale confutazione non si avrà, sarà necessario apportare a tale logica le adeguate variazioni che permetteranno appunto di poter esprimere questo nuovo elemento linguistico: l'estensione di un concetto.

Vedremo che di fatto Frege sceglierà proprio questa seconda strada, non però senza esitazioni e dubbi di cui darà notizia nella sua opera principale, i *Grundgesetze der Arithmetik*,[2] il cui primo volume apparirà nel 1893: esitazioni e dubbi che dipendono dal dover considerare la nozione di estensione di un concetto, o, sinonimamente, la nozione di classe, come primitiva da un punto di vista logico (ciò presuppone ov-

[1] *Über Begriff und Gegenstand* [Oggetto e concetto], Vjschr. wiss. Phil., vol. 16, 192-205 (1892). Compare nella parte terza del nostro volume.

[2] *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet* [I princípi dell'aritmetica derivati ideograficamente] (Pohle, Jena: vol. 1, 1893; vol. 2, 1903). Di tale opera fondamentale viene qui pubblicata una selezione nella parte quinta.

viamente che, dato un qualunque concetto, abbia senso parlare dell'estensione corrispondente). Sulle conseguenze di tale postulato per tutta la costruzione di Frege avremo occasione di tornare in seguito; qui basterà osservare che nei *Fondamenti* Frege parla di estensione di un concetto senza ulteriore specificazione, assumendola cioè come una nozione primitiva comune. L'unica determinazione piú prossima che ne viene data consiste nella netta distinzione che se ne fa rispetto alla nozione di contenuto (comprensione) di un concetto. Frege afferma infatti che "il contenuto di un concetto diminuisce se la sua estensione si amplia; se questa poi viene a comprendere tutto, il contenuto del concetto andrà completamente perduto".

I *Fondamenti dell'aritmetica* non ebbero miglior fortuna dei lavori precedenti; è vero che Cantor li recensí, peraltro in modo piuttosto superficiale, ma la cortina di indifferenza creatasi attorno alle opere di Frege non accennò a diradarsi. A considerare il valore dell'opera, vien fatto di pensare che se l'ordine con cui Frege aveva presentato i suoi lavori fondamentali di questo periodo, l'*Ideografia* e i *Fondamenti,* fosse stato invertito, gli sarebbe forse riuscito di attirare su di essi l'attenzione del mondo culturale tedesco; in un ambiente invece già prevenuto, soprattutto a causa della ricordata recensione di Schröder, è probabile non si fosse propensi a cogliere l'abbondanza di suggerimenti e risultati originali contenuti nell'opera di Frege. Questi, comprensibilmente amareggiato, interruppe la sua produzione; dopo due articoli,[1] dati alle stampe nel 1885, non pubblicò nessun nuovo lavoro per sei anni.

6. *La teoria del significato*

"Vengo ora alla seconda ragione del ritardo: lo scoramento che talvolta mi prendeva nel considerare la fredda accoglienza, o meglio, la mancanza di accoglienza delle opere su citate [l'*Ideografia* e i *Fondamenti*] presso i matematici, e lo sfavore degli indirizzi scientifici contro i quali il mio libro dovrà lottare. Già la prima impressione deve

[1] Essi sono: l'articolo *Über die formalen Theorien der Arithmetik* [Sulle teorie formali dell'aritmetica], Jena. Z. Naturw., suppl. vol. 19, 94-104 (1885) e la recensione al volume di HERMANN COHEN, *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte* [Il principio del metodo infinitesimale e la sua storia], Z. Phil. phil. Kritik, vol. 87, 324-29 (1885). Quest'ultimo lavoro è compreso nella parte terza del nostro volume.

essere scoraggiante: segni sconosciuti e lunghe sequenze di formule estranee. Sicché, per un certo tempo, mi sono occupato di altri argomenti. Ma, a lungo andare, non potevo lasciare abbandonati sullo scrittoio i risultati del mio pensiero, che mi sembrano pregevoli; senza contare che il lavoro già fatto, per non essere inutile, richiede sempre nuovo lavoro; avveniva cosí che quegli argomenti specifici mi fossero sempre presenti. In un caso come questo, nel quale il valore di un libro non può venir riconosciuto a una lettura superficiale, dovrebbe venirmi in aiuto la critica. Ma in generale essa avrebbe ben scarso compenso. Nessun critico potrà sperare di avere un equivalente in denaro per la fatica che un esame minuzioso di questo libro richiede. Mi resta solo da sperare che qualcuno possa annettere a priori alla questione tanto interesse e fiducia da attendersi quale compenso sufficiente il proprio profitto interiore; e voglia quindi rendere pubblico il suo maturo esame. Non che io possa essere felice soltanto di una recensione favorevole; tutt'altro! una critica contraria, che si basasse su fondate ipotesi, mi sarebbe molto piú gradita di una lode, che per lo piú è superficiale e non tocca assolutamente il nocciolo della questione." Queste parole furono scritte da Frege nel 1893, nella prefazione al primo volume dei *Princípi dell'aritmetica*, l'opera con la quale egli intendeva realizzare la seconda parte del suo programma, ossia ricondurre — tramite l'ideografia — i giudizi matematici a un ristretto numero di assiomi puramente logici.

Siamo al termine di un secondo, proficuo periodo di produzione di Frege. Nei cinque anni di silenzio, giustificato su un piano umano e scientifico dalle parole sopra riportate, Frege ha riesaminato criticamente la produzione del primo periodo, ha cercato di precisare e sviluppare le idee già espresse, in modo da poter assicurare alla sua costruzione, se possibile, chiarezza e coerenza logiche ancor maggiori. Tanta ammirevole e impegnata serietà scientifica non era rimasta senza frutto: ne era scaturita, in particolare, la teoria del significato (destinata a rimanere uno dei contributi fondamentali e piú originali dati da Frege allo sviluppo della logica moderna) in base alla quale la logica freghiana aveva assunto il suo assetto definitivo.

Il passo che abbiamo riportato mostra evidente il senso di isolamento che aveva còlto Frege dopo il 1884; ma, se pur mascherato da un dif-

fuso senso di scetticismo circa i risultati di questo suo ulteriore tentativo, esprime ancora una volta una sincera speranza nella possibilità di attirare l'interesse sulle sue idee. Sensibile alle esperienze negative sopportate al tempo dell'*Ideografia* e dei *Fondamenti*, Frege aveva infatti impostato in modo molto piú accorto questo suo secondo tentativo: prima di passare all'esposizione simbolica dei *Princípi*, aveva pubblicato tra il '90 e il '92, quattro articoli destinati ad illustrare in forma piana, rigorosa e "accessibile" le idee precedentemente esposte dei *Fondamenti* (per quanto si riferisce soprattutto alla teoria del concetto) e la teoria del significato con le relative modificazioni che da questa derivano alla sua logica.

Il primo [1] di tali articoli è dedicato al principio d'inerzia, in equilibrata polemica con una trattazione che dell'argomento aveva fatto Ludwig Lange. In esso però Frege coglie l'occasione per riprendere argomentazioni in favore della natura logica del concetto; qui si tratta di ribadire una rigorosa distinzione fra la *rappresentazione* come fatto soggettivo, formante materia prossima della psicologia, e il *concetto* come ente peculiarmente logico, e come tale oggettivo ed escluso da una qualsiasi evoluzione storica.

Le altre tre pubblicazioni sono pressoché contemporanee: *Funzione e concetto* [2] appare negli ultimi mesi del 1891, e riproduce il testo di una conferenza tenuta da Frege, all'inizio di quell'anno, presso la Società di medicina e scienze naturali a Jena; *Oggetto e concetto* [3] e *Senso e significato* [4] sono entrambi del 1892 e appaiono, nell'ordine, a qualche mese di distanza uno dall'altro. Questa intensa attività, unita alla certezza di aver stabilito, con *Senso e significato*, un ulteriore, fondamentale progresso per gli aspetti logico-filosofici del problema che lo impegnava, dànno molto probabilmente a Frege quella fiducia che abbiamo visto trasparire dal suo appello. Fiducia che, d'altra parte, sembra confermata in qualche modo dal fatto che Richard Dedekind, nella prefa-

[1] *Über das Trägheitgesetz* [Sul principio d'inerzia], Z. Phil. phil. Kritik, vol. 98, 145-61 (1891). Da questo articolo sono tratte le pagine inserite nella parte terza del nostro volume, sotto il titolo *Concetto e rappresentazione*.

[2] *Funktion und Begriff* (Jena 1891).

[3] *Über Begriff und Gegenstand* cit.

[4] *Über Sinn und Bedeutung*, Z. Phil. phil. Kritik, vol. 100, 25-50 (1892). Figura nella parte terza del nostro volume.

zione alla seconda edizione del suo *Was sind und was sollen die Zahlen?* apparsa nel 1893 poco dopo il primo volume dei *Princípi*, dedica all'opera di Frege le seguenti parole: "Circa un anno dopo la pubblicazione del mio lavoro [la prima edizione era apparsa nel 1887] ho preso conoscenza dei *Fondamenti dell'aritmetica* di Gottlob Frege, apparsi già nel 1884. Per quanto le idee fondamentali sull'essenza del numero contenute in quest'opera possano differire dalle mie, purtuttavia essa contiene, precisamente dal paragrafo 79 in poi, parecchi punti di contatto col mio libro, in particolare con la mia spiegazione (44).[1] Certamente, non è facile riconoscere tale coincidenza, a causa dei diversi modi di esprimerci, mio e di Frege; ma già la determinatezza con la quale l'autore si esprime circa il passaggio da n a $n+1$ mostra chiaramente che egli sta sullo stesso mio terreno." Era la prima volta che Frege veniva nominato con un apprezzamento positivo nei riguardi della sua opera; è indubbio però che la forma di tale riconoscimento doveva procurargli, nel contempo, una profonda amarezza. Da un lato infatti il passo in questione testimonia in modo esplicito che Frege era giunto già tre anni prima di Dedekind a fornire una corretta interpretazione della natura del numero naturale e in particolare del processo di induzione; dall'altro però tale asserzione, piú che di un riconoscimento del lavoro di Frege, ha qui l'aspetto di una ferma dichiarazione di indipendenza dei risultati di Dedekind. Comunque sia, è bene avvertire subito che ancora una volta le speranze del Frege andranno completamente deluse: il secondo volume dei *Princípi* verrà pubblicato solo nel 1903, a dieci anni di distanza dal primo, e Frege dovrà affrontare difficoltà anche finanziarie non indifferenti per ottenerne la pubblicazione.

Dei quattro articoli che abbiamo visto precedere (fra il '90 e il '92) la pubblicazione dei *Princípi*, quello intitolato *Senso e significato* è, in ordine di tempo, l'ultimo. Proprio a esso, però, è costantemente riferita l'argomentazione degli altri tre, anche se anteriori, sicché noi esporremo prima di tutto i risultati ottenuti in *Senso e significato* per considerare poi il contenuto di *Oggetto e concetto*, senza trattenerci a lungo né sull'uno né sull'altro per il fatto che entrambi gli articoli figurano nel

[1] In essa Dedekind definisce il concetto di "catena di un sistema" che interviene poi in modo essenziale nella successiva caratterizzazione del principio di induzione matematica e dei possibili modelli per gli assiomi dell'aritmetica.

nostro volume. Per la ragione opposta ci soffermeremo invece piú diffusamente su *Funzione e concetto.*

In termini linguistici, il problema del significato può enunciarsi semplicemente come segue: determinare con esattezza il concetto di significato per un elemento linguistico qualunque, in particolare per un soggetto, per un predicato, per una proposizione. Frege giunge a proporre la sua originale soluzione al problema — soluzione che, pur se oggetto di acute critiche, è ancor oggi comunemente accettata dai logici — nel quadro di una rivalutazione del valore conoscitivo dei giudizi analitici, e quindi nel preciso contesto della sua indagine sui fondamenti dell'aritmetica, indagine nella quale, come abbiamo già ripetutamente osservato, quel tipo di giudizio occupa una posizione centrale.

Punto di partenza di tale indagine è quello di stabilire se la relazione di uguaglianza abbia luogo fra oggetti o fra nomi di oggetti. In altri termini: in un'espressione del tipo "$a = b$" sono implicati i segni a e b in quanto segni di oggetti o gli stessi oggetti da tali segni denotati? Frege propone di risolvere la questione stabilendo di collegare a ogni segno un'*intensione* e un'*estensione*[1] ove l'intensione (senso) di un segno esprime, per cosí dire, il *modo* col quale viene denotata l'estensione (significato). Frege dice che un segno *esprime* la propria intensione e *designa* (o *denota*) la propria estensione. Il *significato* di ogni segno risulterà appunto costituito dalla sua intensione *e anche* dalla sua estensione.

Nel caso particolare di un nome proprio (soggetto) l'intensione viene intesa, per dirla in termini moderni, come concetto individuale, e l'estensione è intesa invece come individuo, oggetto (sensibile o no).

La conseguenza che tale stipulazione ha sui giudizi di uguaglianza del tipo sopra considerato, può essere chiarita in base ad un esempio. Si consideri l'espressione

"Il maestro di Platone = Socrate". (1)

[1] Poiché stiamo espressamente trattando di *teoria del significato*, abbiamo preferito tradurre il tedesco *Sinn* col termine italiano *intensione* e il tedesco *Bedeutung* col termine *estensione*, mentre nell'articolo incluso nel volume abbiamo adottato per gli stessi termini tedeschi i corrispondenti italiani *Senso*, rispettivamente *Significato*, motivando nella nota 1 di pagina 374 la nostra decisione. Qui la cosa si giustifica in quanto si desidera evitare espressioni come ad esempio la seguente: " Il significato di un segno è costituito dal suo senso e dal suo significato" che potrebbero ingenerare facili confusioni e fraintendimenti.

È chiaro che entrambi i nomi propri figuranti nei due membri di questa uguaglianza, pur essendo diversi, denotano uno stesso individuo, uno e uno stesso "oggetto" e precisamente "Socrate" inteso come persona fisica. I due nomi hanno cioè estensioni identiche, ed è proprio a queste estensioni che si riferisce l'uguaglianza, stabilendo che esse coincidono. Ciò nonostante, l'espressione precedente ha un effettivo valore conoscitivo (in altri termini: è *qualcosa di piú* che un mero esempio del principio di identità "$a=a$") in dipendenza delle differenti intensioni dei due nomi: se una persona non sapesse che Socrate era il maestro di Platone, avrebbe ora acquistato precisamente tale conoscenza, cosa che ovviamente non accadrebbe con l'uguaglianza "Socrate = Socrate". La relazione di uguaglianza ha quindi luogo fra oggetti e va interpretata come coincidenza assoluta, identità; oltre a tale coincidenza (estensionale) potrà o no verificarsi anche un'identità intensionale, in base alla quale, in ultima analisi, si giudica della portata conoscitiva di un giudizio di uguaglianza.

Per quanto riguarda il significato di una proposizione, Frege effettua ovviamente una distinzione analoga, ma non per questo altrettanto immediatamente plausibile: l'intensione di una proposizione è il "pensiero" che essa esprime, mentre la sua estensione è uno dei due valori di verità *Vero* e *Falso*. L'originalissima introduzione cosí effettuata dei *valori di verità* (che esamineremo piú in particolare, sulla base delle stesse parole di Frege, parlando di *Funzione e concetto*) può considerarsi indubbiamente una delle idee piú geniali della logica moderna, e come il passo essenziale verso la sua effettiva realizzazione quale logica "matematica" nel senso preciso di questo termine. Naturalmente non si deve qui pensare al valore di verità come modernamente inteso, e cioè con tutta la carica convenzionale che proprio lo sviluppo della logica matematica posteriore a Frege ha permesso di attribuirgli. In Frege al contrario sembra esservi una concezione metafisica: il valore di verità è qualcosa di unico e assoluto: dire per esempio che due proposizioni, due pensieri, sono veri, equivale per lui a dire che le due proposizioni in questione sono due vie diverse per cogliere lo stesso assoluto valore di verità. Si confronti la proposizione 12 delle "Diciassette proposizioni di logica", inedito freghiano che riportiamo nell'appendice alla parte quinta del volume.

Due proposizioni qualsiasi, purché entrambe vere o entrambe false avranno dunque significati parzialmente coincidenti, pur se da un punto di vista concettuale esprimeranno "pensieri" del tutto diversi; ossia, come nella (1) avveniva per i nomi propri, potrà legittimamente stabilirsi fra di esse una relazione di uguaglianza, che esprimerà appunto la coincidenza delle rispettive estensioni. Ma tali estensioni sono o il Vero o il Falso, e poiché l'uguaglianza è relazione peculiare tra oggetti, il Vero e il Falso risulteranno degli oggetti, anzi — come vedremo meglio nel paragrafo 8 — gli unici oggetti che Frege introduce come indefinibili nella sua logica.

Riguardo ai predicati, il problema del significato è solo implicito nell'articolo che stiamo esaminando; esso era stato esposto esplicitamente da Frege negli altri due articoli citati. In *Oggetto e concetto*, a un predicato viene associato, come sua estensione, un concetto (a differenza di quanto avveniva nei *Fondamenti*, dove un concetto veniva identificato *tout court* con un predicato); e quindi in *Funzione e concetto* a ogni concetto viene fatta corrispondere una particolare funzione: il decorso di valori di tale funzione (ossia la classe dei suoi valori a essa associata) costituisce l'estensione del concetto. In definitiva, da un punto di vista estensionale, Frege introduce la concezione del predicato (n-adico) come attributo (n-adico). In termini moderni, che ricalcano essenzialmente le idee di Frege, per attributo n-adico si intende una funzione $F(x_1 \ldots x_n)$ che ad ogni n-upla di argomenti, tratti da un determinato insieme (dominio degli individui), faccia corrispondere uno dei due valori di verità Vero o Falso. La concezione qui esposta può sembrare, a prima vista, innaturale; ma ci si convince facilmente della sua perspicuità e naturalezza. Si consideri ad esempio il predicato (monadico) "essere un numero pari": si può ragionevolmente pensarlo definito sull'insieme dei numeri interi (per quanto il definirlo su qualunque altro insieme non presenti nessuna difficoltà). Come sua estensione possiamo allora considerare con naturalezza una funzione a un argomento, definita sullo stesso insieme dei numeri interi, e tale che a ogni argomento pari faccia corrispondere il valore Vero, ad ogni argomento dispari faccia corrispondere il valore Falso. Indicando brevemente con 1, 0 i due valori di verità, e con $F(x)$ la funzione, avremo

pertanto:

$\ldots F(-3)=0, \quad F(-2)=1, \quad F(-1)=0, \quad F(0)=0,$
$F(1)=0, \quad F(2)=1, \quad F(3)=0$ e cosí via.

Si può ora notare come la definizione sia tale da poter essere estesa facilmente a un insieme qualunque, stabilendo ad esempio che la funzione $F(x)$ assuma il valore 1 per ogni argomento che sia un numero pari, il valore 0 per ogni altro argomento (sia esso o no un numero).

Per intensione di un predicato Frege assume quelle entità che vengono "comunemente" indicate come proprietà (nel caso di predicati monadici) o, in generale, come relazioni (nel caso di predicati n-adici, con $n \geqslant 2$).

7. *La gerarchia dei concetti*

La considerazione esplicita di un concetto quale estensione di un predicato, appare, come abbiamo detto, nell'articolo *Oggetto e concetto*, in ordine però a un diverso problema: quello di ribadire anche dal punto di vista della teoria del significato una netta distinzione fra oggetto e concetto, distinzione fondata sulla natura essenzialmente "satura" dell'oggetto, in opposizione alla peculiare "insaturazione" del concetto. Caratteristica essenziale di quest'ultimo, da un punto di vista logico, è la sua natura predicativa, la possibilità cioè di venir riferito a un numero *a priori* indeterminato di oggetti, di contro all'essenziale determinatezza, "chiusura in sé" di un oggetto. La distinzione oggetto-concetto come intesa da Frege, significa in ultima analisi che esistono contesti linguistici nei quali, là dove occorre una variabile, può essere sostituito un (segno di) concetto ma non un (segno di) oggetto (o, viceversa, può essere sostituito un segno di oggetto ma non un segno di concetto) [1]. Ad esempio, nella teoria aritmetica di Frege, in un contesto quale "a φ spetta il numero 2", φ può essere sostituita *solo* da un concetto (ad esempio "numero naturale pari compreso fra 1 e 3") risultando invece un non senso sostituirla con un oggetto qualsiasi.

[1] Quando dal contesto del discorso risulti chiaro il livello linguistico nel quale ci muoviamo (se sintattico o interpretativo) eviteremo le piú esatte dizioni "segno di oggetto", "segno di concetto" e scriveremo senz'altro "oggetto", "concetto".

Ed ecco quindi che, in termini di significato, tale distinzione viene ribadita notando che "concetto è il significato di un predicato; oggetto invece è ciò che non può mai costituire tutto il significato di un predicato, ma può costituire tutto il significato di un soggetto".

Entità cosí essenzialmente distinte quali appunto oggetti e concetti sono d'altra parte connesse tramite la fondamentale relazione del "cadere di un oggetto *sotto* un concetto", fondamentale da un punto di vista logico in quanto ogni altra relazione fra concetti può a essa ricondursi. Per chiarire il senso di tale relazione, diciamo ad esempio che sotto il concetto "numero primo" cadono infiniti oggetti e precisamente i numeri "2", "3", "5", ..., e sotto il concetto "satellite della terra" cade il solo oggetto "Luna", mentre sotto il concetto "disuguale da sé stesso" non cade alcun oggetto.

La distinzione rigorosa fra oggetto e concetto è senza dubbio uno dei temi piú caratteristici del pensiero freghiano. Già abbiamo ricordato come nell'articolo *Sul principio di inerzia* il concetto venisse differenziato dalla rappresentazione nell'intento di liberare la logica da ogni intrusione della psicologia; l'ulteriore distinzione or ora accennata fra oggetto e concetto interviene in modo piú intrinseco, e nella costruzione logica del Frege e nella posizione che il nostro autore assume nei riguardi del problema dell'esistenza degli enti matematici.

Se infatti non si facesse distinzione alcuna fra oggetti e concetti, allora, una volta determinato un concetto, si potrebbe automaticamente affermare l'esistenza di oggetti cadenti sotto quel concetto; salvo naturalmente l'eccezione dei concetti vuoti, sotto i quali cioè non cade alcun oggetto: concetti siffatti sarebbero però facilmente riconoscibili in virtú del fatto che esprimerebbero una contraddizione di per sé evidente. A tali vedute, ampiamente diffuse fra i matematici contemporanei di Frege, questi oppone la distinzione sopra accennata fra oggetto e concetto che comporta la necessità, una volta stabilito un concetto, di *dimostrare* l'esistenza degli enti che eventualmente cadano sotto di esso. Se anche a garanzia dell'esistenza di tali oggetti si volesse assumere la non contraddittorietà dei concetti, non si farebbe che spostare il problema, perché in tal caso si renderebbe necessaria una *dimostrazione* di non contraddittorietà per i concetti, cosa che è impossibile senza far riferimento agli oggetti. Per Frege, infatti, l'unico modo di dimostrare

la non contradditorietà di un concetto consiste proprio nel presentare un oggetto — di cui si conosce, per altra via qualsiasi, l'esistenza — il quale possegga le caratteristiche stabilite dal concetto stesso. Ciò che abbiamo detto ora ci spiega per qual motivo la non contraddittorietà non possa essere assunta, secondo Frege, a criterio di esistenza; tesi, questa, che costituisce uno dei punti d'attrito piú significativi fra l'impostazione freghiana e quella hilbertiana.

Sulla base della distinzione oggetto-concetto Frege è anche particolarmente polemico verso l'indebita "potenza creatrice" che a suo parere Dedekind assegna alle definizioni matematiche. A questo proposito, sarà opportuno ricordare che Frege ammette due modi di formazione per i concetti: l'uno, per note caratteristiche, senza dubbio piú usuale nel quotidiano lavoro del matematico, specie nei procedimenti definitori; l'altro, altrettanto importante, per astrazione. Prima di chiarire brevemente i due modi, notiamo ancora che Frege distingue fra "note caratteristiche" e "proprietà" di un concetto. Per note caratteristiche di un concetto egli intende le proprietà che un oggetto deve avere per cadere sotto il concetto stesso; in quanto proprietà di oggetti, le note caratteristiche non vanno confuse con le proprietà del concetto che invece si riferiscono non agli oggetti che eventualmente cadono sotto di esso, ma al concetto in quanto tale. In altri termini, mentre le note caratteristiche di un concetto possono essere predicate di un oggetto, invece il predicare di un oggetto le proprietà di un concetto darebbe luogo non a proposizioni false ma addirittura a non sensi.

Per spiegare ora il primo modo di formazione dei concetti, supponiamo di avere i tre concetti
a) "numero intero",
b) "numero positivo" e
c) "numero maggiore di 10".
Potremo allora formare il nuovo concetto
d) "numero intero positivo maggiore di 10"
che risulta dalla congiunzione dei tre precedenti, nel senso che un oggetto, per cadere sotto d) deve possedere contemporaneamente tutte e tre le proprietà enunciate dai tre concetti a), b), c). Questi sono, pertanto, altrettante note caratteristiche del concetto d). Sotto il concetto cosí

formato cade ad esempio il numero 12, non invece il numero 5 (che non possiede c)), né il numero 1/2 (che non possede né a) né c)) e cosí via.

Ora — e in questo consiste il nucleo dell'obiezione di Frege a Dedekind — definire un concetto per note caratteristiche, servendosi di concetti di per sé non contraddittori, non significa aver automaticamente "creato" gli oggetti che cadono sotto quel concetto. La congiunzione di piú concetti non contraddittori può anche dar luogo a un concetto contraddittorio. In alcuni casi, come ad esempio per il concetto "circolare e quadrato" formato congiungendo i due concetti — ciascuno in sé stesso non contraddittorio — "quadrato" e "circolare", la contraddizione è immediatamente evidente. Abbiamo però già visto che questo criterio di evidenza viene recisamente rigettato da Frege, sicché la formazione di un nuovo concetto per questa via esige una parallela dimostrazione di esistenza (ossia di non contraddittorietà del concetto cosí formato).

Per illustrare con un esempio il secondo modo di formazione dei concetti consideriamo il giudizio (nel senso che Frege dà a questo termine, ossia la proposizione asserita)

"3 è maggiore di 2"

e "astraiamo" dal 3. Ciò significa, per Frege, (con l'ovvia traduzione che noi ne facciamo sul piano linguistico) sostituire *al nome proprio* 3 la *variabile* x; questa infatti può assumere tutti i valori (significati) nel dominio degli oggetti (al quale pure 3 appartiene) e purtuttavia non ha un'estensione determinata, ma svolge semplicemente l'ufficio di "indicare" un posto che può ora venir rimpiazzato dal nome di un oggetto. Cosí operando otterremo quindi il concetto

"x è maggiore di 2",

ossia, in definitiva, il concetto "maggiore di 2". Un'ulteriore astrazione ci porterebbe al concetto

"x è maggiore di y"

ossia, in altre parole, al concetto (relazione) "maggiore di".

Questo semplice esempio basterà a chiarire la cosa, che del resto verrà ripresa nel paragrafo successivo, quando presenteremo passi tratti da *Funzione e concetto*. Ricordiamo però che, in opposizione alle vedute

comunemente diffuse fra i filosofi e matematici dell'epoca, e in base alle quali il processo di astrazione conduceva, per cosí dire, a isolare immediatamente un oggetto, fu proprio Frege a chiarire che tale processo conduceva invece a un concetto (e quindi solo mediatamente, tramite l'introduzione delle classi, a un oggetto). Sull'argomento il lettore potrà consultare in particolare la pregevolissima recensione che Frege dedicò alla *Filosofia dell'aritmetica* di Husserl, e che noi riportiamo nella parte terza del nostro volume.

L'idea fondamentale della teoria del concetto come esposta da Frege è implicitamente contenuta nella distinzione poco sopra accennata fra proprietà e note caratteristiche di un concetto. Abbiamo detto allora che le note caratteristiche di un concetto sono nient'altro fuorché le proprietà che un oggetto deve possedere per cadere sotto quel concetto. Ciò implica che esistono concetti i quali esprimono, in ultima analisi, solo proprietà di oggetti, sotto i quali cioè cadono solo oggetti. Concetti siffatti vengono detti da Frege concetti di primo grado. D'altra parte abbiamo visto che le proprietà dei concetti si riferiscono a essi in quanto tali, non sono cioè predicabili a oggetti. Tali sono ad esempio la proprietà di esistenza, o di non contraddittorietà o di appartenenza di un concetto a un certo grado. In altre parole esisteranno dei concetti (le suddette proprietà appunto) che staranno con altri concetti in una relazione *analoga* a quella che intercorre fra un concetto di primo grado e gli oggetti che cadono sotto di esso. Chiamiamo, con Frege, concetti di secondo grado questi concetti e relazione del "cadere di un concetto *in* un altro" quella relazione. È ormai chiaro come questo procedimento porti a costituire una gerarchia fra concetti, che a partire dal livello fondamentale, occupato dai concetti di primo grado, ha i successivi livelli occupati dai concetti di secondo, terzo grado e cosí via. Gli elementi appartenenti a un livello determinato di questa gerarchia vanno rigorosamente distinti dagli elementi situati a livelli diversi (per intenderci, va operata una distinzione altrettanto netta di quella che abbiamo visto stabilirsi fra oggetti e concetti in generale), e inoltre fra elementi di un certo livello (ad esempio concetti di secondo grado) e quelli di livello immediatamente superiore (concetti di terzo grado) può sussistere una relazione di subordinazione che può dirsi genericamente del "cadere dei primi *nei* secondi". È chiaro inoltre che le note

caratteristiche di un certo concetto debbono essere omogenee, debbono cioè appartenere tutte a uno stesso grado, e precisamente allo stesso grado del concetto che esse determinano. Su questa esigenza di omogeneità, che, a parere di Frege, Hilbert non rispetta nelle sue definizioni implicite, è basata da un punto di vista tecnico la polemica del nostro autore col matematico formalista.

Ora, da un punto di vista puramente formale (ammesso che con Frege si possa parlare di un tale punto di vista), nella gerarchia precedente si potrebbero comprendere in modo naturale anche gli oggetti, considerandoli ad esempio come "concetti" di grado zero. Con ciò però non si sarebbe evitata la distinzione di fatto fra oggetti e concetti, distinzione di natura intrinseca, ontologica e non solo formale; essa determina una frattura che avrà ripercussioni capitali su tutto il sistema logico di Frege. In effetti, la natura predicativa, insatura, dei concetti, rendeva abbastanza naturale una disposizione gerarchica come quella stabilita da Frege: in ultima analisi, si tratta di ordinare i concetti in base al tipo di saturazione che essi sono suscettibili di ricevere. La natura essenzialmente distinta degli oggetti, considerati invece come entità "chiuse in sé", sature, da una parte toglie almeno apparentemente la possibilità o la necessità di una sistemazione analoga, dall'altra suggerisce anzi implicitamente un criterio di assoluta indifferenziazione: da un punto di vista logico ogni oggetto, qualunque sia la sua origine, la sua natura o il suo *status* ontologico, è perfettamente equivalente a un altro. Se in un certo contesto figura il segno di un oggetto, e noi riguardiamo il contesto in questione da un punto di vista estensionale, è indifferente sostituire quel segno con l'uno o l'altro oggetto determinato: la sostituzione cosí effettuata potrebbe non risultare opportuna da un punto di vista intensionale, potrebbe succedere cioè che il senso del nostro contesto venisse completamente travisato, ma ciò ovviamente non comporterebbe differenza alcuna su un piano estensionale. Tale indifferenziazione avrà un peso decisivo allorché Frege, come vedremo nel paragrafo successivo, introdurrà le classi come estensioni dei concetti, e le considererà come oggetti. Allora non sarà piú necessario distinguere fra una classe (come collezione di individui ossia di oggetti nel senso usuale della parola) e una classe di classi (come collezione, appunto, di classi) o una classe di classi di classi e cosí via,

ma l'entità "classe" qualunque sia il concetto da cui essa prende origine, sarà considerata un tutto in sé chiuso e saturo. Il lettore avrà già notato che l'innegabile analogia esistente fra la precedente "tipizzazione" freghiana dei concetti e la ben nota tipizzazione russelliana ha proprio qui il suo punto di rottura; vedremo che ciò avrà ripercussioni decisive nei riguardi del sistema logico di Frege.

8. *Funzione e concetto. Variazioni all'ideografia*

Mentre gli articoli fin qui considerati non contengono alcun riferimento esplicito alla possibilità che i risultati in essi ottenuti possano influenzare l'impostazione stessa dell'ideografia della *Begriffsschrift* (o in ogni caso possano essere messi in relazione con essa), al contrario, l'articolo *Funzione e concetto* rappresenta il termine di passaggio fra essi e i *Princípi dell'aritmetica.* In questo articolo cioè i punti fermi acquisiti con le ricerche precedentemente esposte (teoria del concetto, teoria del significato) sono visti, per cosí dire, proprio in funzione delle connessioni e dei riflessi che essi hanno sulla primitiva concezione e strutturazione dell'ideografia; questa anzi viene sommariamente presentata, al termine dell'articolo, nella versione definitiva con la quale verrà in seguito impiegata nell'opera maggiore di Frege. Oltre a svolgere una pregevole analisi del concetto di funzione e a dare l'interpretazione attributiva dei predicati di cui si è già parlato, in questo articolo Frege partecipa la sua determinazione ad accogliere nella logica intensionale della *Begriffsschrift*, una componente estensionale in termini di classi e ne presenta la relativa notazione. Quest'innovazione, assai importante anche da un punto di vista concettuale, costituisce senza dubbio, dal punto di vista formale, la variazione piú significativa fra l'ideografia del 1879 e quella definitiva dei *Princípi.* Pur riconoscendo l'importanza di *Funzione e concetto*, abbiamo ritenuto di poterlo escludere dalla presente antologia per due ragioni: 1) perché esso termina con una succinta esposizione dell'ideografia, e noi abbiamo deciso di dedicare alla delineazione di questa tutta l'appendice alla nostra introduzione che ci sembra costituire un'indispensabile premessa alla lettura del volume; 2) perché lo spazio cosí risparmiato ci ha consentito di presentare una piú ampia selezione dai *Princípi.*

Già si è detto che *Funzione e concetto* rappresenta soprattutto un punto di passaggio; orbene, se tale trapasso è importante, lo è essenzialmente per gli sviluppi cui darà luogo la nuova posizione cosí raggiunta. L'analisi di esso è invece essenziale in sede di delineazione della biografia intellettuale di Frege, cioè in sede appunto della presente introduzione. Per questo motivo ci tratterremo qui con particolare ampiezza sull'articolo in questione, attingendo direttamente dal testo stesso di Frege.

Frege immagina di porre, a un ipotetico interlocutore, la domanda: che cos'è una funzione? A questa domanda, egli afferma, si ottengono di solito risposte come la seguente: " 'Per funzione di x si intende un'espressione calcolistica che contenga la x, cioè una formula che racchiuda la lettera x.' In base a ciò, ad esempio, l'espressione

$$`2x^3+x'$$

sarebbe una funzione di x, e un'espressione come

$$`2\times 2^3+2'$$

risulterebbe una funzione di 2. Questa risposta non può certo soddisfare: in essa è evidente l'errore di non distinguere la forma dal contenuto, il segno dal designato, errore questo che attualmente si incontra ormai molto spesso negli scritti matematici, anche in quelli di autori famosi." Frege prende di qui lo spunto per un ennesimo attacco alle teorie formali dell'aritmetica, nelle quali "si parla di segni che non hanno alcun contenuto, né debbono averlo, salvo poi, ciò malgrado, annettere a quei segni delle proprietà che potrebbero spettare ragionevolmente solo al contenuto di un segno. La stessa cosa succede anche nel nostro caso: l'essenza della funzione non può essere un'espressione pura e semplice, non può essere la forma per un certo contenuto, ma solo il contenuto stesso... Debbo qui confutare la concezione secondo la quale ad esempio $2+5$ e $3+4$ sono sí uguali ma non sono la stessa cosa. Alla base di questa concezione sta ancora quella confusione fra forma e contenuto, fra segno e designato. È come se si volesse considerare la viola profumata diversa dalla viola odorosa solo perché i due nomi sono diversi. La diversità della designazione non può bastare da sola a fondare una diversità del designato."

È evidente da questo passo come i termini della polemica contro i formalisti abbiano ricevuto, per Frege, un'esatta precisazione in base ai risultati ottenuti in *Senso e significato*; quegli stessi risultati gli permettono ora di affrontare adeguatamente il problema di caratterizzare la natura della funzione: "Se riteniamo per dato quanto detto finora, vediamo che le espressioni

$$`2 \times 1^3 + 1',$$

$$`2 \times 2^3 + 2',$$

$$`2 \times 4^3 + 4'$$

hanno per estensione numeri, e precisamente 3, 18, 132. Ora, se la funzione fosse realmente solo l'estensione di un'espressione calcolistica, essa sarebbe né piú né meno che un numero; e con ciò non avremmo di sicuro guadagnato niente di nuovo per l'aritmetica. Si potrà pensare però, con la parola 'funzione', a espressioni nelle quali un numero viene solo indicato in modo indeterminato con la lettera x, come ad esempio succede nell'espressione

$$`2 \times x^3 + x';$$

ma con ciò non sarebbe cambiato niente; infatti, quest'espressione indica sempre un numero, anche se in modo indeterminato; e se io scrivo quel numero o semplicemente 'x' non vi è differenza essenziale.

"Tuttavia, proprio scrivendo la 'x' che indica in modo indeterminato siamo condotti nella giusta direzione. 'x' si chiama l'argomento della funzione, e in espressioni quali

$$`2 \times 1^3 + 1',$$

$$`2 \times 4^3 + 4',$$

$$`2 \times 5^3 + 5'$$

si riconosce sempre la stessa funzione, ma con argomenti diversi, precisamente 1, 4, 5. Da ciò si ricava che la vera e propria essenza della funzione sta in ciò che quelle espressioni hanno in comune, ossia in ciò che nell'espressione

$$`2x^3 + x'$$

è presente oltre alla 'x', ossia, come potremmo scrivere,

$$'2(\ )^3+(\ )'.$$

"Mi interessa mostrare che l'argomento non appartiene alla funzione, ma che assieme ad essa forma un tutto completo; e infatti la funzione è di per sé incompleta, necessita di un'integrazione, è insatura. E proprio per questo le funzioni si distinguono in modo essenziale dai numeri."

È già evidente come Frege stia qui ricalcando le argomentazioni usate per stabilire la distinzione oggetto-concetto, allorché si rifaceva alla natura essenzialmente satura e completa del primo, in contrapposto alla peculiare insaturazione e predicatività del secondo. Il criterio per riconoscere una funzione si ha subito, secondo Frege, osservando che "data un'espressione riconosciamo in essa la funzione dal fatto che noi possiamo pensare quell'espressione come scissa; e tale scissione viene suggerita proprio dalla forma dell'espressione stessa.

"Le due parti nelle quali l'espressione viene cosí scissa — il segno dell'argomento e l'espressione della funzione — non sono fra loro omogenee, poiché l'argomento è un numero, ossia un tutto in sé chiuso, mentre la funzione non lo è." Ne deriva immediatamente che "se ad esempio dico 'la funzione $2x^3+x$', x non va considerato come appartenente alla funzione, ma questa lettera serve soltanto a indicare il tipo di integrazione necessaria, rendendo manifesti i posti nei quali va sostituito il segno dell'argomento. Orbene, ciò che la funzione diviene dopo che è stata saturata dal suo argomento lo chiamiamo il valore della funzione per quell'argomento. Cosí ad esempio, 3 è il valore della funzione $2x^2+x$ per l'argomento 1, perché abbiamo $2\times1^2+1=3$. Il metodo della geometria analitica offre un mezzo per rendere evidenti i valori di una funzione per argomenti diversi. Se infatti consideriamo l'argomento come valore numerico di un'ascissa e il corrispondente valore della funzione come valore numerico di un'ordinata, otteniamo un insieme di punti che, nei casi ordinari, si presenta come una curva. Ogni punto della curva corrisponde a un argomento coll'associato valore della funzione. Cosí, ad esempio,

$$y=x^2-4x$$

dà una parabola, dove 'y' indica il valore della funzione e il valore

numerico dell'ordinata, allo stesso modo che 'x' indica l'argomento e il valore numerico dell'ascissa. Se confrontiamo con la funzione

$$x(x-4)$$

troviamo che questa ha, in generale, per gli stessi argomenti, gli stessi valori dell'altra. Abbiamo cioè in generale

$$x^2-4x=x(x-4)$$

qualunque numero si prenda per x. Quindi la curva che otteniamo da

$$y=x^2-4x$$

è la stessa cui dà origine la

$$y=x(x-4)\,.$$

Esprimo questo dicendo: la funzione $x(x-4)$ ha lo stesso decorso di valori della funzione x^2-4x.

"Se scriviamo

$$x^2-4x=x(x-4)$$

non poniamo una funzione uguale all'altra, ma soltanto i valori della prima uguali a quelli della seconda. E se intendiamo che questa uguaglianza debba valere qualunque sia l'argomento x sostituito, esprimiamo la generalità di un'uguaglianza. Per esprimere ciò possiamo anche dire 'il decorso di valori della funzione $x(x-4)$ è uguale al decorso di valori della funzione x^2-4x' e con ciò otteniamo un'uguaglianza fra decorsi di valori. Ora, il fatto che sia possibile concepire la generalità di un'uguaglianza fra valori di funzioni come un'uguaglianza, e precisamente, come un'uguaglianza fra decorsi di valori, non è a mio parere qualcosa di dimostrabile, ma va riguardato come un principio logico.

"A questo punto può anche essere introdotta un'opportuna designazione per il decorso di valori di una funzione. Allo scopo, sostituisco il segno dell'argomento nell'espressione della funzione mediante una vocale greca minuscola, racchiudo l'espressione cosí ottenuta fra parentesi e le premetto la stessa lettera greca con uno *spiritus lenis*. In base a questa regola,

$$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2-4\varepsilon)$$

è il decorso di valori della funzione $x^2 - 4x$, mentre

$$\grave{\alpha}(\alpha(\alpha - 4))$$

è il decorso di valori della funzione $x(x-4)$, di modo che la notazione

$$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \grave{\alpha}(\alpha(\alpha - 4))$$

esprime il fatto che il primo decorso di valori coincide col secondo... Cosí come, per esprimere generalità, si indica in modo indeterminato un numero mediante una lettera, allo stesso modo si può anche aver bisogno di indicare in modo indeterminato una funzione mediante una lettera. A questo scopo ci si serve per lo piú delle lettere 'f' e 'F', in modo tale che nelle espressioni '$f(x)$' e '$F(x)$' x rappresenta l'argomento. In esse, la circostanza che la funzione necessiti di un'integrazione viene espressa dal fatto che le lettere f o F sono seguite da parentesi e lo spazio fra esse compreso è destinato a venir occupato dal segno di argomento. Di conseguenza

$$\grave{\varepsilon} f(\varepsilon)$$

indica il decorso di valori di una funzione che è lasciata del tutto indeterminata."

Il concetto di funzione si è venuto ampliando lungo due direzioni. "In primo luogo, infatti — afferma Frege — si è ampliato il cerchio dei tipi di calcolo che contribuiscono alla formazione di una funzione. All'addizione, moltiplicazione, elevazione a potenza e alle loro inverse, si sono aggiunti i diversi tipi di passaggio al limite, senza però che si avesse sempre una chiara consapevolezza di ciò che era stato cosí fatto di essenzialmente nuovo. Ci si è spinti ancora oltre, e ci si è visti costretti a chiedere ausilio alla lingua comune, poiché la lingua simbolica dell'analisi non bastava piú quando, ad esempio, si doveva parlare di una funzione il cui valore è 1 per argomenti razionali, 0 per argomenti irrazionali.

"In secondo luogo si è allargato il cerchio di ciò che può essere assunto come argomento e come valore di una funzione, mediante l'introduzione dei numeri complessi... Orbene, io compio un progresso in entrambe le direzioni." Il secondo ampliamento suggerisce a Frege di considerare quali "valori" di una funzione non piú soltanto dei numeri, ma anche

dei “valori di verità”. Sarà proprio questo che permetterà a Frege di cogliere l’intimo nesso fra funzione e concetto: il concetto infatti potrà venire interpretato come una funzione in quanto si pensi a essa associato un decorso non già di valori numerici, ma di valori di verità. Vediamo ora come Frege effettui l’accennato ampliamento.

“In primo luogo aggiungo ai segni $+$, $\cdot$, $-$, ecc. che servono a formare espressioni funzionali, anche i segni $=$, $>$, $<$, cosicché, ad esempio, posso parlare della funzione $x^2 = 1$, ove x, al solito, rappresenta l’argomento.” Si noti che con questa aggiunta Frege viene a dare al termine funzione un’accezione piú ampia di quella assunta di norma dai matematici. Frege prosegue: “La prima questione che ora sorge è quella di stabilire il valore di questa funzione per argomenti diversi. Sostituendo a x, nell’ordine, i valori -1, 0, 1, 2, otteniamo

$$(-1)^2 = 1$$

$$0^2 = 1$$

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 1 .$$

“Di queste uguaglianze, la prima e la terza sono vere, le altre false. Orbene, io dico: ‘il valore della nostra funzione è un valore di verità’ e distinguo il valore di verità del vero da quello del falso. Il primo lo chiamo brevemente il Vero e l’altro il Falso.” Ribadito quindi che l’uguaglianza delle estensioni non comporta l’uguaglianza delle intensioni, Frege affronta l’argomento piú delicato e originale del suo lavoro, ossia esplicita il rapporto fra funzioni e concetti. Ricollegandosi all’introduzione dei segni $=$, $<$, $>$, per la formazione di espressioni funzionali, egli ritiene che la seconda questione che potrebbe essere sollevata a questo proposito riguarda la ragione di tale introduzione. Ora, sostiene Frege, “la concezione secondo la quale l’aritmetica non è che una logica sviluppata, e che una piú rigorosa fondazione delle leggi aritmetiche riconduce a leggi puramente logiche e solo a esse, sembra, oggi, guadagnare a sé stessa sempre nuovi sostenitori. Sono anch’io di questa opinione, e su di essa fondo l’esigenza che la lingua simbolica aritmetica debba essere ampliata a una lingua logica. Come

ciò possa accadere nel nostro caso verrà ora indicato. Abbiamo visto che il valore della nostra funzione $x^2 = 1$ è sempre uno dei due valori di verità. Se per un determinato argomento, ad esempio — 1, il valore della funzione è il Vero, noi potremo esprimere ciò anche come segue: 'il numero — 1 ha la proprietà che il suo quadrato è 1' oppure, piú brevemente '— 1 è una radice quadrata di 1', o ancora '— 1 cade sotto il concetto *radice quadrata di* 1'. Se il valore della funzione $x^2 = 1$ per un argomento, ad esempio 2, è il Falso, potremo esprimere ciò dicendo: '2 non è una radice quadrata di 1', oppure '2 non cade sotto il concetto radice quadrata di 1'. Dai pochi esempi precedenti vediamo come ciò che in logica viene chiamato concetto sia in stretta connessione con ciò che qui chiamiamo funzione. Anzi, si può senz'altro dire: *un concetto è una funzione il cui valore è sempre un valore di verità.* Anche il valore della funzione

$$(x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

è sempre un valore di verità. Ad esempio, otteniamo il Vero per l'argomento — 1 e possiamo esprimere ciò dicendo: — 1 è un numero minore di un'unità di un numero il cui quadrato è uguale al suo doppio. Con ciò si è espresso il cadere del numero — 1 sotto un concetto. Ora, le funzioni

$$x^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad (x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

hanno, per lo stesso argomento, sempre lo stesso valore e precisamente il Vero per — 1 e + 1, il Falso per ogni altro argomento. Per quanto già stabilito diremo che le due funzioni hanno lo stesso decorso di valori, ed esprimeremo ciò in simboli scrivendo

$$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 1) = \grave{\alpha}((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1)) .$$

In logica, un'uguaglianza di questo tipo viene detta uguaglianza dell'estensione dei concetti. Di conseguenza potremo denotare come *estensione di un concetto il decorso di valori di una funzione il cui valore, per ogni argomento, è un valore di verità.*" E non ci sembra necessario sottolineare, tanto la cosa è evidente, l'importanza di quest'identificazione qui compiuta da Frege.

Notato ora come la forma linguistica delle uguaglianze (o delle disu-

guaglianze) è la proposizione assertoria, Frege osserva che "le proposizioni assertorie — proprio come le uguaglianze o le disuguaglianze o le espressioni analitiche — possono in generale venir pensate come scisse in due parti, una delle quali è 'in sé chiusa', l'altra invece va completata, è non satura. Ad esempio, la proposizione

'Cesare conquistò la Gallia'

può scomporsi in 'Cesare' e 'conquistò la Gallia'. La seconda parte è insatura, in essa figura un posto vacante, e solo ponendo in quel posto un nome proprio o un'espressione che contenga un nome proprio, essa acquista un senso concluso. Anche qui, chiamo funzione l'estensione di questa parte insatura. In questo caso l'argomento è Cesare. Vediamo dunque che qui è stato nel contempo effettuato un ampliamento anche nell'altra direzione, ossia riguardo a ciò che può figurare come argomento. Non sono ammessi solo i numeri veri e propri, ma oggetti in generale (e io considero oggetti anche le persone). Come possibili valori di funzioni sono già stati introdotti i due valori di verità. Possiamo andare ancora oltre e ammettere come valore di una funzione oggetti qualunque, senza limitazione alcuna. Ad esempio, consideriamo la espressione

'La capitale della Germania'.

Essa rappresenta evidentemente un nome proprio e ha per estensione un oggetto. Spezziamola nelle due parti

'La capitale della'

e 'Germania', dove assegno il genitivo alla prima parte, sicché questa è insatura, mentre la seconda è 'chiusa in sé'. Orbene, in base a quanto già detto, chiamo

'La capitale di x'

l'espressione di una funzione. Se prendiamo come suo argomento la Germania, otteniamo come suo valore Berlino."

Questo secondo ampliamento (e cioè l'ampliamento del cerchio di ciò che può essere assunto come valore di una funzione) suggerisce a Frege di considerare come oggetto tutto ciò che non è funzione. In particolare, egli potrà pensare che anche i decorsi di valori sono oggetti; le importanti e decisive conseguenze di tale assunzioni risulteranno evidenti nel seguito. Vediamo come Frege giunge alle conclusioni ora accennate.

"Se quindi ammettiamo come argomenti e come valori di una funzione oggetti in generale, senza limitazione alcuna, sorge spontanea la questione di che cosa noi chiamiamo oggetto. Ritengo impossibile una definizione scolastica, in quanto qui abbiamo a che fare con qualcosa che, a causa della sua semplicità, non ammette di essere ulteriormente scisso da un punto di vista logico. È possibile soltanto accennare a che cosa si intende. A questo proposito, può solo dirsi, brevemente: *oggetto è tutto ciò che non è funzione, la cui espressione quindi non contiene nessun posto vacante. Una proposizione assertoria non contiene alcun posto vacante, la sua estensione va quindi riguardata come un oggetto. Questa estensione, d'altra parte, è un valore di verità quindi entrambi i valori di verità sono oggetti.*

"Abbiamo già considerato uguaglianze fra decorsi di valori, ad esempio

$$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2-4\varepsilon)=\grave{\alpha}(\alpha(\alpha-4)) .$$

Possiamo scindere questa espressione in '$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2-4\varepsilon)$' e '$(\ )=\grave{\alpha}(\alpha(\alpha-4))$'. Quest'ultima parte è insatura, giacché contiene, a sinistra del segno di uguaglianza, un posto vacante. La prima parte è completamente 'chiusa in sé' e quindi ha per estensione un oggetto. Decorsi di valori di funzioni sono oggetti, mentre le funzioni stesse non lo sono. Abbiamo chiamato decorso di valori '$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2-1)$' ma la potremmo anche designare come estensione del concetto radice quadrata di 1. Anche le estensioni di concetti sono quindi oggetti, malgrado i concetti non lo siano. Dopo che abbiamo cosí ampliato il cerchio di ciò che può essere assunto come argomento, debbono venir fatte delle stipulazioni piú precise per quanto riguarda i significati dei segni finora impiegati. Fin tanto che come oggetti si considerano soltanto i numeri interi in aritmetica, allora le lettere a e b nell'espressione '$a+b$' indicano soltanto numeri interi e il segno $+$ va spiegato soltanto fra essi. Ogni ampliamento del cerchio degli oggetti indicati da a e b rende necessaria una nuova spiegazione del segno $+$. Appare come una necessità per il rigore scientifico quella di prendere le dovute precauzioni affinché un'espressione non possa mai divenire priva di significato, affinché non succeda che, senza rendersene conto, si calcoli con segni vuoti nella convinzione di avere a che fare

con oggetti. Si è già fatta amara esperienza di ciò con le serie divergenti. È quindi necessario fare le opportune stipulazioni dalle quali risulti ad esempio che cosa significhi l'espressione

$$`\odot+1'$$

quando $\odot$ significa il Sole. Come tali stipulazioni vengano stabilite, è relativamente indifferente; è però essenziale che esse vengano fatte, in modo che un'espressione quale '$a+b$' riceva sempre un significato, qualunque sia il segno di oggetto determinato che viene sostituito ad a o b. Per i concetti abbiamo di conseguenza la necessità che per ogni argomento essi abbiano per valore un valore di verità, ossia che per ogni oggetto sia determinato se esso cade o no sotto il concetto; in altre parole: per i concetti abbiamo l'esigenza della loro rigorosa delimitazione, senza ottemperare alla quale sarebbe impossibile costruire su di essi leggi logiche."

9. *I Princípi*

L'articolo *Funzione e concetto* si conclude, come dicevamo, con una succinta esposizione dell'ideografia nella sua sistemazione definitiva, esposizione che anticipa direttamente quella, assai piú ampia e particolareggiata, che Frege presenterà due anni piú tardi nel primo volume dei *Princípi dell'aritmetica* (1893). Con gli ultimi lavori testé esaminati, oltre ad aver raggiunto la piena maturità del suo pensiero, precisando, grazie all'originale teoria del significato, numerose idee precedentemente espresse in forma ancora in parte "intuitiva", Frege sperava di aver ottenuto nel contempo una maggiore sensibilizzazione degli studiosi verso la soluzione da lui proposta per il problema dei fondamenti; egli ritiene quindi giunto il momento di affrontare la seconda parte del suo programma originario ossia l'effettiva riconduzione dell'aritmetica alla logica tramite l'ideografia.

Anche in questo volume, prima di iniziare il vero e proprio lavoro di derivazione, Frege ha cura di chiarire in modo discorsivo le ragioni che l'hanno deciso alla realizzazione del suo programma, attraverso una lunga introduzione nella quale egli riprende gli spunti polemici contro i formalisti e gli psicologisti e non manca di fare amare considerazioni circa

la scarsa fortuna dei suoi lavori (si ricordi la citazione che abbiamo riportato all'inizio del paragrafo 6).[1]

A tale introduzione segue la presentazione dell'ideografia, quindi la definizione dei concetti fondamentali dell'aritmetica (in particolare del concetto di numero), dopo di che ha inizio la parte propriamente simbolica dell'opera. Ci proponiamo — come già accennammo — di presentare sommariamente l'ideografia nell'appendice all'introduzione, mentre daremo nel prossimo paragrafo la linea generale seguita da Frege per giungere a caratterizzare e definire la successione dei numeri naturali; qui vogliamo fermarci brevemente sulla classificazione delle funzioni e riportare infine la definizione, di una particolare funzione che avrà un grandissimo interesse per tutto il sistema logico di Frege.

La classificazione dei concetti da una parte, e, dall'altra, il riconoscimento che i concetti sono particolari funzioni, hanno l'ovvia conseguenza che anche per queste ultime potrà venir instaurata una classificazione analoga a quella già vista per i concetti (p. 40); essa cioè darà luogo a raggruppamenti analoghi, nel senso che tutte le funzioni verranno suddivise in classi in modo tale che una funzione potrà appartenere a una e una sola di queste classi e che gli elementi di una classe saranno essenzialmente, ontologicamente distinti dagli elementi di una classe diversa.

Avremo naturalmente una classificazione basata sul numero e sul tipo degli argomenti; distingueremo cosí, in primo luogo, funzioni a un argomento, funzioni a due argomenti e cosí via. Quindi, a seconda che gli argomenti capaci di saturare una funzione siano oggetti o a loro volta funzioni, avremo funzioni di primo, secondo, terzo grado eccetera. Una "ramificazione" in tale classificazione sorge, nel caso di funzioni di grado maggiore o uguale a due, dal fatto che in successive saturazioni esse diano luogo a funzioni di ugual grado o di gradi diversi; in quest'ultimo caso si parlerà di funzione "inomogenee rispetto al grado" (*ungleichstufige*).

Si riconosce cosí che, combinando le varie possibilità, si può originare

[1] Di questa introduzione abbiamo riportato, nella parte quinta del presente volume, alcune pagine particolarmente significative. Come altri apporti dai *Principi*, sempre nella quinta parte figurano ampie selezioni dalla critica mossa da Frege ai vari metodi di introduzione dei numeri reali, dalla sua teoria delle grandezze, e infine la traduzione integrale della "Nachwort" al secondo volume.

una grandissima molteplicità di funzioni; va subito osservato però che Frege, nei *Princípi*, si limita a considerare solo funzioni dei primi tre gradi. In particolare introduce due sole funzioni di terzo grado, una delle quali non verrà impiegata nelle derivazioni, e due di secondo grado, per le quali tuttavia usa un criterio di riducibilità al primo grado, sul quale ci soffermeremo piú avanti. Essenzialmente quindi nelle derivazioni per noi interessanti compaiono solo funzioni di primo grado in generale a uno o due argomenti; è chiaro che, in particolare, si tratterà di concetti o, rispettivamente, di relazioni.

Riassumendo, Frege istituisce una doppia classificazione degli argomenti in tipi e delle funzioni in gradi, che può essere espressa come segue:

Funzioni	Argomenti
Funzioni di primo grado a un argomento a due argomenti eccetera ... (Possono essere saturate solo da argomenti di primo tipo)	Argomenti di primo tipo: gli oggetti
Funzioni di secondo grado a un argomento di secondo tipo (Possono essere saturate solo da argomenti di secondo tipo)	Argomenti di secondo tipo: le funzioni di primo grado a un argomento.
Funzioni di secondo grado a un argomento di terzo tipo (Possono essere saturate solo da argomenti di terzo tipo)	Argomenti di terzo tipo: le funzioni di primo grado a due argomenti.
eccetera ...	eccetera ...

Abbiamo visto come la concezione della funzione secondo Frege permetta di interpretare come tale, in un determinato linguaggio, una qualunque espressione di quel linguaggio nella quale si lasci una componente indeterminata. Per Frege quindi un'espressione quale $f(x)$ rappresenta un qualunque contesto in cui sia presente una variabile che possa essere sostituita da un oggetto; $f(x)$ può stare ad esempio per "La capi-

tale di x", oppure per "$x^2 = 2$" oppure per "Px" ammesso che, riferendoci a un determinato e dato linguaggio logico, si convenga di denotare con P un assegnato predicato monadico. Analogamente, una notazione quale $f(x, y)$ rappresenterà ad esempio tanto la relazione "$x \leq y$" quanto "x ama y" o anche "$Px \rightarrow Py$" in dipendenza del linguaggio cui $f(x, y)$ è riferita (e ammesso al solito che, nell'ultima espressione, P rappresenti un predicato monadico costante). In base alla classificazione sopra riportata, gli esempi qui riferiti rientrano nelle funzioni di primo grado a uno o due argomenti.

Una funzione di secondo grado sarà invece data, ad esempio, da "La derivata della funzione X è 4"; anzi, tale funzione è un concetto di secondo grado, in quanto assume il valore Vero se X è sostituita da ogni funzione della forma $4x+C$ (C costante), mentre assume il valore Falso per qualunque altra sostituzione di X.

Un altro esempio di funzione di secondo grado con argomento di secondo tipo abbiamo in $f(2)$ ove l'argomento f si pensi sostituibile con una funzione di primo grado a un argomento; essa assume come valori tanto valori di verità — ad esempio per gli argomenti $x+x = x \cdot x$ o $x+1 = 4$ per i quali assume il valore Vero o Falso rispettivamente — quanto altri oggetti, ad esempio per l'argomento $x+1$, in corrispondenza del quale la nostra funzione assume il valore 3.

Passando al piano ideografico, dovremo introdurre "nomi" per le varie funzioni testé classificate e stabilire in modo preciso il loro significato. A tal fine ricordiamo ancora una volta che per Frege il significato (estensione) di una funzione per un certo argomento è, in ultima analisi, il valore della funzione stessa per quel dato argomento; determinare in generale il significato di una funzione equivale quindi a stabilire il valore di tale funzione per ogni possibile argomento (cioè stabilire il suo decorso di valori).

È chiaro però che, accanto a tali nomi di funzione, dovranno essere introdotti dei "nomi propri", dei nomi cioè denotanti oggetti, in quanto essi intervengono in modo essenziale nella determinazione stessa dei significati dei nomi di funzioni. Che tali nomi propri vengano, per cosí dire, a trovarsi alla base di qualsiasi determinazione di significato, risulta evidente tra l'altro, dalle seguenti stipulazioni — volte appunto ad assicurare un significato ai vari segni dell'ideografia — che ripor-

tiamo nell'ordine dal paragrafo 29 del primo volume dei *Princìpi*.
"Il nome di una funzione di primo grado a un argomento ha un *significato* (*significa* qualcosa, è *significante*) se ha sempre un significato il nome proprio che si origina dal nome della nostra funzione allorché il posto di argomento viene saturato con un nome proprio, ammesso che questo sia significante", ove è chiaro che l'esistenza dei significati per nomi di funzioni di primo grado a un argomento viene fatta dipendere dall'esistenza di significati per nomi propri, ossia, in ultima analisi, dalla determinazione dell'universo degli individui (oggetti) ammessi nella logica. D'altra parte "un nome proprio ha un *significato* se è sempre significante il nome proprio, che si origina saturando con quello il posto di argomento di un nome significante di una funzione di primo grado a un argomento, e se è significante il nome di una funzione di primo grado a un argomento, che si ottiene saturando col nome proprio in questione il primo posto di argomento di un nome significante di una funzione di primo grado a due argomenti, e se la stessa cosa vale per il secondo posto d'argomento di tale funzione"; è chiaro allora che, una volta ammessi nell'ideografia alcuni nomi propri come significanti, e determinate in relazione a essi delle funzioni di primo grado, Frege sarà in grado, mediante la seconda delle stipulazioni precedenti, di assumere nel proprio sistema altri nomi propri, che risulteranno sicuramente, si potrebbe dire "automaticamente", forniti di significato.

Nomi di funzioni di grado superiore al primo si introdurranno in modo analogo stabilendo, ad esempio, che "un nome di funzione di secondo grado a un argomento di secondo tipo ha un *significato* se in generale, dal fatto che il nome di una funzione di primo grado a un argomento abbia un significato, ne segue che, sostituendo il nome di quest'ultima funzione al posto d'argomento del nome della nostra funzione di secondo grado, il nome proprio che ne risulta ha un significato".

L'assunzione fondamentale dalla quale dipende la successiva determinazione di tutti i nomi significanti dell'ideografia è che "i nomi di valori di verità significhino qualcosa, e precisamente il Vero e il Falso"; in altri termini, l'universo degli oggetti sui quali Frege — almeno ini-

zialmente — "interpreta" la sua logica è composto dai due soli elementi Vero e Falso.

Per quanto sia fondamentale la stipulazione ora riferita per i significati, va però ancora una volta ribadito che secondo Frege a tutti i segni "spetta non solo un significato bensí anche un senso. Ognuno di tali nomi di un valore di verità *esprime* un senso, un *pensiero*. Mediante le nostre stipulazioni abbiamo infatti determinato sotto quali condizioni esso significhi il Vero. Il senso di ognuno di tali nomi, il *pensiero*, consiste proprio in ciò che tali condizioni sono soddisfatte. Abbiamo cosí il caso che ogni proposizione ideografica è composta dal segno di giudizio [1] e dal nome di un valore di verità. Ora, mediante una tale proposizione si afferma che questo nome abbia il Vero come significato. Poiché però nel contempo esso esprime un pensiero, in ogni proposizione ideografica ben formata abbiamo un giudizio, e cioè che un pensiero sia Vero; e un pensiero non può assolutamente mancare".

Queste parole confermano, da un lato, quanto avevamo anticipato a pagina 27: la "sintassi" del sistema dei *Princípi* non è mai autonoma, è intrinsecamente connessa alla semantica; pur se le nostre stipulazioni vengono condotte in termini di "nomi", il linguaggio ideografico non si riduce mai a un vuoto schema di linguaggio interpretabile solo in un secondo tempo: ma tale interpretazione accompagna passo passo la nostra attività "calcolistica". D'altro lato il passo precedente dimostra che, strettamente collegato al piano dei significati, delle estensioni (sul quale in ultima analisi è piú agevole muoversi) resta in ogni momento il livello del senso, delle intensioni. La logica di Frege, dalla prima versione del 1879 a questa del 1893, non ha capovolto la propria impostazione passando decisamente da una trattazione intensionale a una estensionale; ha semplicemente "assorbito" quest'ultima, si è annessa una dimensione estensionale che non ha escluso l'intensionalità né tanto meno ne ha limitato la portata o l'importanza fondamentale. In definitiva, il "contenuto giudicabile" dell'*Ideografia* è stato semplicemente scisso, grazie alla teoria del significato, in "pensiero" e "valore di verità"; proprio questa precisazione rende conto chiaramente della

[1] Uno dei segni fondamentali di Frege. Si veda piú avanti *L'ideografia nel sistema freghiano*.

distinzione ancor piú rigorosa e, nel contempo, dell'assoluta impossibilità, per Frege, di separare i due livelli di trattazione.

Esemplifichiamo ora il procedimento mediante il quale Frege effettua l'annunciata riduzione delle funzioni di secondo grado a funzioni di primo grado; vedremo che ciò avviene impiegando il concetto di classe (decorso di valori) e introducendo appunto la particolare funzione cui accennavamo in apertura di paragrafo. L'artificio usato da Frege è il seguente: considerata una funzione di secondo grado con un argomento di secondo tipo (riferiamoci ad esempio alla funzione $f(2)$ che già conosciamo) Frege pensa di "sostituire" *la funzione di primo grado* $f(x)$, *che in essa figura ad argomento, col suo decorso di valori* $\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$, ossia con la classe corrispondente.

Ora, naturalmente, ciò non può esser fatto semplicemente rimpiazzando $f(x)$ con $\grave{\varepsilon}f(\ )$, in quanto $f(x)$ è una funzione mentre il suo decorso di valori è un oggetto; occorrerà quindi poter esprimere per altra via il valore di una funzione di primo grado per un certo argomento. In altri termini, data la funzione di primo grado $\Phi(x)$ e l'oggetto a, si tratta di esprimere $\Phi(a)$ mediante a e $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$. Ciò viene fatto da Frege stabilendo che la notazione

$$a \frown \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$$

debba essere equisignificante con $\Phi(a)$. Cosí facendo, l'oggetto $\Phi(a)$ appare come il valore della funzione

$$x \frown y$$

di primo grado con due argomenti, quanto si pensi di saturare il primo argomento con a e il secondo con $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$. Naturalmente, occorre determinare la funzione $x \frown y$ in generale, ossia per qualunque oggetto come argomento. Per questo Frege stabilisce che:

1) se l'argomento y è un decorso di valori, allora il valore della funzione $x \frown y$ è precisamente il valore della funzione, di cui y è il decorso di valori, quando per suo argomento si assume x;

2) se invece l'argomento y non è un decorso di valori (ossia è un qualunque altro oggetto) il valore della funzione $x \frown y$ è la classe vuota per qualunque sostituzione di x.

Cosí, ad esempio, per la funzione $f(2)$ avremo che essa potrà ora

essere rappresentata da

$$2 \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon)$$

e, se ora noi "astraiamo" dalla classe a secondo argomento, otteniamo in definitiva

$$2 \frown y\,.$$

La funzione $f(2)$ per l'argomento $\Phi(x)$ avrà come valore lo stesso della funzione $2 \frown y$ per l'argomento $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ ossia $2 \frown \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$. Se a y sostituiamo un oggetto che non sia decorso di valori di una data funzione, otterremo invece, per la seconda delle precedenti determinazioni, la classe vuota come valore, ossia la $2 \frown y$ cessa, per cosí dire, di rappresentare la $f(2)$.

Per riconoscere l'importanza della funzione cosí introdotta, è necessario, a questo punto, anticipare una delle funzioni (segni) fondamentali di Frege: la funzione di primo grado con un argomento $—x$ (*Wagerechte*: segno orizzontale); essa riceve le seguenti determinazioni:

$$—x = \begin{cases} \text{il Vero, se } x \text{ è il Vero;} \\ \text{il Falso, se } x \text{ è un oggetto qualunque} \\ \text{diverso dal Vero.} \end{cases}$$

La funzione $—x$ è chiaramente un concetto, in virtú delle sue stesse determinazioni.

Supponiamo ora data un funzione $\Phi(x)$ di primo grado, il cui decorso di valori sarà $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, e un oggetto a; ora, $a \frown \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ significa semplicemente $\Phi(a)$; e $\Phi(a)$ potrà essere *a priori* il Vero, il Falso o qualunque altro oggetto, a seconda della natura della funzione $\Phi(x)$. Ma c'è un caso in cui la terza eventualità viene esclusa: precisamente quello in cui la funzione $\Phi(x)$ è un concetto. In tal caso infatti, qualunque sia a $\Phi(a)$ può essere soltanto, il Vero o il Falso; e in particolare, sarà il Vero quando a cade sotto il concetto $\Phi(x)$, ossia quando a "appartiene" al decorso di valori $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ della $\Phi(x)$.

Supponiamo di tenere fissa la funzione $\Phi(x)$ e di lasciare invece indeterminato l'oggetto a; appare allora chiaro che la funzione

$$—x \frown \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$$

assume il valore Vero per ogni x che appartiene a $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, mentre assume il valore Falso se x non appartiene a tale classe. Se quindi indichiamo con C l'estensione di un dato concetto, la funzione

$$—x \frown C \qquad (1)$$

esprimerà la relazione di appartenenza alla classe C per quegli oggetti che sono elementi di tale classe e solo per quelli (è chiaro che, "astraendo" da C, si ottiene la generica funzione $—x \frown y$ già vista). Frege riesce così a "definire" nel suo simbolismo la relazione di appartenenza, assunta di norma come primitiva, ossia indefinibile (ad esempio da Peano).

Ove ancora occorresse, questa possibilità non fa che dimostrare, una volta di piú, la sottigliezza e la profondità cui giunge l'analisi logica del Frege; inoltre, dal momento che, come abbiamo già detto, Frege si limita essenzialmente all'impiego di funzioni di secondo grado, per ognuna delle quali quindi può considerare la riduzione su esposta, ne risulta che egli può esprimere in termini di relazione di appartenenza *tra oggetti* qualsiasi relazione fra concetti. L'enorme semplificazione che ciò comporta risulterà evidente solo che si pensi che l'universo degli oggetti cui Frege si riferisce è, in ultima analisi, costituito da due soli "tipi" di elementi: i valori di verità e le classi, i quali, come sappiamo, sono peraltro del tutto indifferenziati fra loro; sicché viene di fatto eliminato il ricorso alla tipizzazione delle funzioni, con le inevitabili pesantezze che essa avrebbe comportato.

Purtuttavia, proprio nel fatto di considerare lecite espressioni come la (1), esprimenti una relazione fra oggetti, e in dipendenza appunto della indifferenziazione di questi ultimi ipotizzata da Frege, è già implicita la possibilità di esprimere, nel sistema dei *Princípi*, espressioni contraddittorie. Su questo però torneremo in un prossimo paragrafo.

Qui notiamo ancora che la (1) rappresenta, per cosí dire, il massimo grado di estensionalità ammesso da Frege, in quanto dà la possibilità di considerare e descrivere una classe come l'insieme degli oggetti che a essa appartengono. Con considerazioni analoghe a quelle sopra svolte, Frege estende tale considerazione estensionale anche alle relazioni, presentandole appunto come l'insieme delle coppie fra i cui elementi

ha luogo una data relazione. Egli introduce cioè in modo naturale dei "doppi decorsi di valori" (derivanti ovviamente da funzioni di primo grado con due argomenti), sicché una notazione quale

$$\text{“}a \frown b \frown R\text{”}$$

ove *R* si pensi sostituito da un doppio decorso di valori (e solo da esso), nel caso in cui assuma il valore Vero va letta semplicemente

"*a* sta nella relazione *R* con *b*".

Possiamo ora esporre la linea generale seguita da Frege nella definizione dei concetti aritmetici fondamentali.

10. *Il concetto di numero naturale*

La linea seguita nei *Princípi* per definire il concetto di numero naturale, non si allontana sensibilmente da quella cui Frege si era attenuto nei *Fondamenti* del 1884; anzi, in essa intervengono quelle nozioni sulla teoria delle successioni già introdotte fin dalla terza parte dell'*Ideografia* del 1879; ciò a ribadire che, in diverse e piú favorevoli condizioni ambientali, Frege sarebbe forse stato in grado di presentare la completa realizzazione del suo programma con un anticipo di almeno dieci anni.

Tuttavia, abbiamo visto nelle pagine precedenti che nella struttura stessa dell'ideografia è nel frattempo intervenuta una profonda e significativa evoluzione, in dipendenza della possibilità, ora esplicitamente accettata da Frege, di esprimere in termini di classi, ossia di oggetti, argomentazioni precedentemente svolte in termini di concetti. Si noti che già nel 1884 la relazione fondamentale di equinumerosità fra concetti da cui Frege prendeva le mosse, veniva, in ultima analisi, espressa in termini di oggetti, in quanto era riportata agli eventuali oggetti che cadevano sotto quei concetti; ma l'atteggiamento attuale del Frege è proprio quello di considerare quali oggetti le classi stesse, di concepirle e accettarle cioè come entità sature e "chiuse in sé" e distinte tanto dai singoli elementi che le costituiscono quanto dalla moltitudine di essi.

Sulle conseguenze di quest'accettazione, cui ormai piú volte si è fatto cenno, torneremo ampiamente nel prossimo paragrafo; qui esporremo nelle sue linee generali il procedimento di caratterizzazione della

successione dei numeri naturali, che il lettore potrà seguire nei particolari riferendosi ai paragrafi 55-83 dei *Fondamenti*, a essa dedicati; si è già detto che tale lavoro figura nella parte seconda del nostro volume. Ci preoccuperemo piuttosto di mettere esplicitamente in luce le differenze fra la versione del 1884 e quella del 1893 cui noi ci atteniamo.

Notiamo di passaggio che non abbiamo inserito nel volume alcuna parte dei *Princípi* riguardante l'introduzione del concetto di numero, per l'impossibilità di operare, nei relativi paragrafi, un qualunque stralcio significativo.

L'osservazione originale e fondamentale di Frege consiste in fondo nell'aver riconosciuto la possibilità di esprimere l'uguaglianza fra numeri senza far intervenire il concetto stesso di numero; piú precisamente va ascritto a suo merito esclusivo l'aver riconosciuto che, date due classi diverse, ognuna comprendente determinati elementi, è possibile stabilire se a quelle classi compete o no lo stesso numero di elementi senza ricorrere a procedimenti di numerazione (che ovviamente presupporrebbero la conoscenza dei numeri). Va notato che, a rigore, anche nei *Princípi* Frege parla a questo proposito in termini di concetti e non esplicitamente in termini di classe; questa volta però i concetti che intervengono nelle sue argomentazioni vengono presentati mediante la funzione $—x \frown C$ vista sopra, sicché in definitiva avremo dizioni quali "α-concetto" per indicare un concetto la cui estensione (la cui classe, o decorso di valori della funzione corrispondente) è α; e questo appunto, per quanto sappiamo, è ciò che esprime la funzione

$$—x \frown \alpha\,.$$

Noi parleremo dunque indifferentemente in termini di concetti o di classi.

Consideriamo dunque l'α-concetto A e il β-concetto B; diremo, con Frege, che A è "equinumeroso" a B, se esiste una corrispondenza biunivoca R fra gli elementi di α e quelli di β o, con maggior aderenza al testo freghiano, se esiste una relazione R univoca da α a β e parimenti univoca da β a α.

Parlando per semplicità in termini di classi, diremo allora che due classi α e β sono equinumerose se la proposizione

"Esiste una relazione R univoca nei due sensi fra α e β"

è vera.

"Astraiamo" ora da una delle due classi, ad esempio dalla classe α; otterremo allora, come sappiamo, l'espressione

"Esiste una relazione R univoca nei due sensi fra x e β",

dove x è una variabile di classe, ossia d'oggetto.

Tale espressione è quantificata esistenzialmente rispetto alla relazione R (R cioè è una variabile apparente) e quindi non dipende da essa; la classe β è fissa per ipotesi, sicché tutta l'espressione può considerarsi come una condizione che è soddisfatta da tutte e sole quelle classi che risultano equinumerose alla classe β.

Grazie ai risultati dell'analisi di Frege, data la presenza in essa della variabile, potremo dunque interpretare l'espressione precedente come una funzione dell'argomento x; e anzi tale funzione, assumendo come valori solo e sempre valori di verità, è un concetto; essa infatti ha per valore il Vero se si assumono come argomenti tutte le classi x che sono equinumerose con β, mentre assume il valore Falso per ogni altra sostituzione di x.

Orbene, consideriamo ora l'estensione di questo concetto; essa sarà ovviamente *la classe di tutte le classi equinumerose a* β. Proprio tale estensione Frege assume, per definizione (definizione Z del paragrafo 40 del primo volume dei *Princìpi*), come *numero* della classe β (o, equivalentemente, come numero spettante al β-concetto, cioè al concetto di cui β è l'estensione).

Naturalmente, con ciò non è stato ancora definito il *concetto* di numero ma solo il *numero spettante a un concetto*; è già chiaro però il procedimento secondo il quale Frege potrà definire tale concetto. Gli basterà infatti, analogamente, considerare l'espressione

"Esiste un concetto A cui spetta il numero n"

e "astrarre" da n, ottenendo cosí la funzione

"Esiste un concetto A cui spetta il numero x",

che risulta a sua volta un concetto; essa assume infatti come valore il Vero ogni qualvolta a x venga sostituito un numero e il valore Falso per ogni altra sostituzione di x. Sotto tale concetto cadono quindi tutti e soli i numeri, la sua estensione è cioè la classe dei numeri. Frege chiama appunto tale funzione "concetto di numero". Con diverse parole, ciò significa che ogni numero — in base alla definizione precedente — è una classe di classi, ma che viceversa non ogni classe di

classi è un numero; una classe di classi risulterà un numero se e solo se esiste un concetto cui essa spetta come numero.

Si noti che fino a ora abbiamo sempre parlato di "numero" senza ulteriori specificazioni, mentre è chiaro che desideriamo qui giungere a definire i numeri naturali. Il fatto è che la definizione precedente risulta, in certo senso, troppo ampia, ossia porta a considerare una classe i cui elementi non sono tutti e *soli* i numeri naturali. Se noi infatti prendiamo per A un concetto sotto il quale cadono infiniti oggetti (e un tale concetto è ad esempio proprio quello di "numero naturale") a tale concetto spetterà, parlando intuitivamente, un numero infinito e quindi non sicuramente un numero naturale. D'altra parte il procedimento fin qui seguíto ha caratterizzato numeri mediante i quali ci è possibile "contare" gli elementi di una classe (o, se si vuole, i numeri con i quali si risponde alla domanda: quanti?); cosí come definito, quindi, il concetto di numero ha come estensione la classe dei cosiddetti *numeri cardinali*, di cui i numeri naturali sono solo una sottoclasse. Questa dovrà quindi venir isolata nella sua totalità mediante opportune condizioni.

Per far ciò, Frege inizia col definire il numero naturale "zero" come numero spettante al concetto "disuguale da sé stesso", ossia, estensionalmente, come classe di tutte le classi vuote, corrispondenti cioè a concetti contradditori; quindi provvede a definire la relazione di successore nella quale stanno il numero naturale n e quello, $n+1$, che lo segue immediatamente nella successione dei numeri naturali. Tale relazione viene definita estensionalmente, ossia come doppio decorso di valori della relazione

> "Esiste un concetto A e un oggetto a che cade sotto di esso e tale che, se il numero spettante al concetto 'cade sotto A ed è diverso da a' è uguale a p, allora il numero spettante al concetto A è $p+1$."

Simbolizzando tale relazione con f avremo, ad esempio, che una notazione quale

$$0 \frown 1 \frown f$$

va letta "1 segue immediatamente 0 nella successione dei numeri naturali". Va notato che il numero naturale 1 non viene formalmente definito da Frege quale successore di 0, facendo cioè uso della relazione or

ora definita; esso viene invece presentato come numero spettante al concetto "uguale allo zero", ossia come la classe di tutte le classi contenenti un solo elemento. Peraltro il definirlo per l'altra via conduce, come si dimostra facilmente, a individuare lo stesso oggetto.

La relazione *f*, osserva Frege, ordina gli oggetti fra i quali essa ha luogo, ossia i numeri naturali, in una successione che comprende tutti quegli oggetti; per caratterizzare tale successione, e quindi la classe dei numeri naturali, sarà quindi necessario prima di tutto dare una definizione generale della relazione del "seguirsi in una successione". Tale definizione non è peraltro, nei *Princípi*, che una generalissima enunciazione di un principio, un caso particolare del quale è rappresentato dal noto principio di induzione matematica (che cosí risulta assunto da Frege in forza di una definizione). Notiamo che in questo modo tale principio viene stipulato non limitatamente al caso in cui gli oggetti in successione siano numeri e la relazione ordinatrice sia quella di successore, bensí per oggetti e relazioni qualunque. Per riportarci al caso particolare della successione dei numeri naturali, occorrerà appunto sostituire in tale definizione gli oggetti cui essa si riferisce con numeri naturali e particolarizzare la generica relazione che in essa figura con la relazione di successore.

La relazione del seguirsi in una successione viene simbolizzata da Frege col segno $\stackrel{\prime}{-}$, sicché la notazione

$$a \frown (b \frown \stackrel{\prime}{-} f)$$

esprimerà in particolare che *b* segue *a* nella successione dei numeri naturali, o il che è lo stesso, che *a* precede *b* nella stessa successione. Se, con Frege, diciamo *R*-successione una successione "generata" dalla relazione *R*, la successione dei numeri naturali potrà essere indicata come *f*-successione. A questo punto Frege compie l'ultimo passo che gli permetterà di caratterizzare la classe dei numeri naturali. In base alla definizione testé accennata del seguirsi in una successione, egli introduce il concetto

"*x* appartiene alla *R*-successione che inizia con *a*", (*)

dove *a* è un oggetto e *x* una variabile d'oggetto, come equisignificante con

"*x* coincide con *a* oppure coincide con uno degli oggetti che seguono *a* nella *R*-successione".

Se nell'espressione (*) lasciamo anche *a* indeterminato, otteniamo una relazione, per cui Frege introduce il simbolo $\smile$, che vige fra un oggetto *x* qualsiasi e un oggetto *y* qualsiasi, quando il primo appartenga alla successione generata dalla relazione *R* e che termini col secondo. Una notazione quale

$$a \frown (b \frown \smile R)$$

esprimerà appunto questo fatto per dati *a*, *b*, *R*. In particolare, se per *R* consideriamo la relazione di successore *f* e per *a* il numero naturale 0, in

$$0 \frown (b \frown \smile f)$$

avremo l'enunciazione del fatto che *b* appartiene alla successione dei numeri naturali che inizia con 0. Dato il senso di questa affermazione, ciò equivale a dire che *b* coincide con 0 oppure col successore di 0, oppure col successore del successore di 0 e cosí via; in altri termini ciò equivale a dire che *b è un numero naturale*. Ecco dunque che Frege ha cosí ottenuto di caratterizzare la successione dei numeri naturali (che nel seguito indicheremo brevemente con *N*) come formata da quegli elementi raggiungibili, a partire dallo zero, con un numero finito di applicazioni della relazione di successore; ossia, entro la classe dei numeri cardinali, la sottoclasse dei numeri naturali può essere isolata considerandola composta da tutti e soli quegli elementi raggiungibili a partire dallo zero con un numero finito di passi, il che può esprimersi dicendo: *i numeri naturali altro non sono che cardinali finiti.*

Sulla scorta delle precedenti definizioni, Frege conduce le successive derivazioni dei "princípi del numero naturale"; in particolare egli dimostra che la relazione di successore è univoca nei due sensi, che la successione dei numeri naturali è infinita, che se due numeri hanno successori uguali essi sono uguali ecc.; egli *dimostra* cioè, in particolare, tutte le proposizioni assunte come assiomi da Dedekind e da Peano nella loro sistemazione dell'aritmetica; il che, a nostro parere, è il piú appropriato termine di paragone per mettere in chiaro a quale livello di maggior profondità si muovesse Frege rispetto ai suoi contemporanei.

La dimostrazione del fatto che la successione *N* è infinita, ossia che a ogni numero naturale comunque dato ne segue sempre un altro, si

fonda in particolare sulla relazione $\smile$ sopra definita. Se infatti, nella proposizione (*) da cui abbiamo preso le mosse invertiamo x con b, e parliamo in termini di f-successione, potremo allora introdurre il concetto

"a appartiene alla f-successione che termina con x" (**)

al quale appunto Frege afferma spettare il numero $x+1$. Per convincersi, sia pure intuitivamente, della cosa, basti pensare che la (**) è equivalente al concetto

"a coincide con 0, oppure a coincide con 1, ... oppure a coincide con x"

o anche, piú semplicemente, al concetto

"uguale a 0, o uguale a 1, o uguale a 2, ..., o uguale a x",

e gli oggetti che cadono sotto questo concetto sono esattamente $x+1$, in quanto sono tutti e soli gli oggetti 0, 1, 2, ..., x.

Ne consegue che esiste almeno un concetto tale che il numero a esso spettante è $x+1$ e dunque, per parlare intuitivamente, il *numero* $x+1$, cioè la classe di tutte le classi aventi $x+1$ elementi, non è vuota. In termini insiemistici piú familiari: il numero naturale $n+1$ è la classe di tutte le classi equipotenti alla classe $\{0, 1, 2, ..., n\}$.

Allora, ricordando che lo zero è stato definito come la classe di tutte le classi vuote, indichiamolo per un momento con $\{0\}$; l'1 può essere definito come la classe di tutte le classi contenenti il solo elemento $\{0\}$, il che potremo indicare con $\{\{0\}\}$; il 2 potrà essere definito come la classe di tutte le classi che contengono esattamente i due elementi 0 e 1 ossia avremo $2 = \{\{0\}, \{\{0\}\}\}$; analogamente $3 = \{\{0\}, \{\{0\}\}, \{\{0\}, \{\{0\}\}\}\}$ e cosí via. Frege cosí può effettivamente costruirsi tutta la sua successione dei numeri naturali mediante reiterate applicazioni della definizione di successore.

Nella raffigurazione, che abbiamo or ora data, dei successivi stadi di tale costruzione, è implicitamente espressa, in definitiva, la differenza fra la versione del 1884 e quella attuale. Si vede infatti da essa che nella definizione di ogni numero intervengono in modo essenziale i numeri che lo precedono nella successione N; e che proprio per questo, avanzando in tale successione, ogni suo elemento è una classe di classi, che a loro volta sono classi di classi, che a loro volta ecc.; eppure tutte queste espressioni, pur continuate indefinitamente, risul-

tano secondo Frege "omogenee" dal momento che una classe, di qualunque natura siano i suoi elementi, è semplicemente un oggetto, come sono oggetti il Vero e il Falso.

L'introduzione delle classi come oggetti non solo dunque semplifica la trattazione freghiana, ma addirittura viene a porsi, in questo contesto, come condizione necessaria alla costruibilità effettiva di ogni termine della successione N; e ciò in virtú dell'indifferenziazione, da un punto di vista ontologico, degli oggetti.

11. *L'antinomia di Russell*

I risultati raggiunti da Frege in questo primo volume dei *Princípi*, estremamente importanti, originali e profondi per quanto riguarda in generale il problema dei fondamenti, rappresentano tuttavia solo una minima parte del lavoro specifico di derivazione dei teoremi matematici che Frege si riprometteva di ottenere. "Come si vede — avverte egli infatti nella prefazione — non ho qui considerato i numeri negativi, razionali, irrazionali e complessi, come pure non ho preso in considerazione l'addizione, moltiplicazione ecc. Anche gli stessi teoremi sui numeri naturali non figurano qui nella loro completezza. In particolare manca la proposizione secondo la quale il numero degli oggetti che cadono sotto un concetto è finito, se è finito il numero degli oggetti che cadono sotto un concetto sopraordinato al primo. Ragioni di vario carattere mi hanno deciso alla determinazione di riservare la dimostrazione di questa proposizione, come pure la trattazione delle altre specie di numeri e delle operazioni, a un secondo volume la cui comparsa dipenderà dall'accoglienza riservata a questo primo volume." Abbiamo già accennato al tenore di quest'accoglienza, e si può quindi immaginare agevolmente con quale disposizione d'animo Frege si accingesse, delusa ogni sua speranza, a por mano alla stesura di questo secondo volume.

Non è facile seguire il nostro autore nei dieci anni che intercorrono fra la pubblicazione del primo e del secondo volume. Possiamo peraltro arguire, in generale, da accenni contenuti nell'epistolario, che in tale periodo non siano state floride né le sue condizioni di salute né la sua situazione economica. Sappiamo inoltre che nel 1895 egli viene nomi-

nato professore ordinario onorario [1] all'Università di Jena e questo sarà il massimo grado accademico raggiunto da Frege. Per quanto riguarda la sua attività scientifica di questo periodo, ricordiamo qui, fra gli altri lavori,[2] la già citata recensione al volume *Filosofia dell'aritmetica* di Edmund Husserl, apparsa nel 1894 e che figura nella nostra antologia nella parte terza; una *Lettera del signor Frege all'editore,* del settembre 1895, in risposta alla recensione del primo volume dei *Princípi* pubblicata nello stesso anno, a firma di Peano, sulla *Rivista di matematica.* Anche questa lettera, che verrà pubblicata nella stessa rivista del 1898, figura nella parte quarta del nostro volume. A proposito della polemica con Peano, mette conto di ricordare ancora, di questo periodo, un articolo del 1896 *Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene* [Sull'ideografia di Peano e la mia] nel quale fra l'altro sono ripresi e trattati con maggior ampiezza argomenti già toccati nella lettera precedente.

Non possiamo dire con esattezza se nel frattempo Frege lavorasse già alla seconda parte dei *Princípi*; è tuttavia probabile che egli non ne iniziasse la stesura prima di quattro o cinque anni dalla comparsa della prima. Comunque sia, il volume è a buon punto nei primi mesi del 1902 e viene licenziato per la stampa nell'ottobre dello stesso anno. Il modo in cui esso termina, l'affrettato paragrafo 245, nel quale vengono prospettati succintamente i compiti che attendono l'autore per una soddisfacente conclusione della ricerca ivi intrapresa, fanno però pensare piú a un'interruzione che a una conclusione del lavoro.

E infatti, il 16 giugno 1902, il giovane logico inglese Bertrand Russell aveva indirizzato a Frege una breve lettera,[3] nella quale gli partecipava la possibilità di derivare una contraddizione nel sistema logico dei *Princípi.* In breve, essa si può esprimere come segue. Se pensiamo di

[1] Nell'ordinamento accademico tedesco dell'epoca, questo era il grado immediatamente precedente a quello di professore ordinario.

[2] Gli altri lavori di questo periodo, oltre a quelli citati nel testo, sono i seguenti: *Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik* [Chiarimento critico di alcuni punti delle lezioni di E. Schröder sull'algebra della logica], Arch. system. Phil., vol. 1, 433-56 (1895); *Le nombre entier* [Il numero intero], Rev. Métaph. Mor., vol. 3, 73-78 (1895); *Über die Zahlen des Herrn Schubert* [Sui numeri del signor Schubert] (Jena 1899).

[3] Essa fa parte del *Nachlass* freghiano conservato presso l'Archivio dell'Università di Münster (e del quale è attesa, almeno per certe sue parti, una prossima pubblicazione) e ci è quindi stato possibile consultarla.

formare la classe di tutte le classi che non si appartengono (ossia che non contengono sé stesse come elemento) possiamo chiederci, per la classe β cosí formata, se essa appartiene o no a sé stessa; ci si convince immediatamente che tanto la risposta affermativa quanto quella negativa portano a conclusione contraddittoria. In simboli, la cosa si può rendere evidente definendo la classe β con

$$X \in \beta = \neg X \in X \tag{1}$$

e quindi sostituendo in questa definizione X con β. Si otterrà

$$\beta \in \beta = \neg \beta \in \beta ,$$

espressione evidentemente paradossale in quanto il primo membro è la negazione del secondo e viceversa.

La lettera di Russell partecipa appunto a Frege — in termini sia di classi sia di predicati — la possibilità di derivare questo paradosso nel sistema assiomatico dei *Princípi*.

È superfluo notare come, sul piano del linguaggio oggetto, l'introduzione di espressioni contraddittorie del tipo precedente è resa possibile proprio in virtú delle determinazioni stesse della funzione $—x \frown y$; ma al di fuori di tale piano si è condotti a motivare tale possibilità in base alle considerazioni seguenti:

1) Le entità matematiche che godono di certe proprietà costituiscono una classe (in termini di Frege: decorso di valori) della quale esse sono elementi e che è caratterizzata in modo univoco dalla detta proprietà; in altri termini, a ogni proprietà corrisponde una classe.

2) Le classi sono entità matematiche, ossia ben determinati oggetti, che possono a loro volta figurare come elementi di un'altra classe (e in particolare di sé stesse); in altri termini, le classi come moltitudini vengono per cosí dire "sostanzializzate", nel senso che vengono considerate come derivate rispetto a una determinata unità sostanziale che di fatto precede, è anteriore a tale moltitudine.

I due punti precedenti non sono altro che una enunciazione del cosiddetto assioma di comprensione, che cosí veniva implicitamente posto da Frege alla base di tutto il proprio sistema logico-assiomatico (si noti che una considerazione identica può farsi a proposito della prima

definizione cantoriana di insieme o della definizione dedekindiana di sistema).

Ora, il quinto dei sei assiomi posti da Frege alla base del suo sistema logico può esprimersi, nel nostro simbolismo, con

$$(\hat{x}Px = \hat{x}Gx) \leftrightarrow \forall x(Px = Gx) \qquad \text{(V)}$$

(dove $\hat{x}Px$ sta ovviamente per $\hat{\varepsilon}P(\varepsilon)$).

Come Frege stesso fa osservare, tale assioma può considerarsi scisso nei due seguenti

$$\forall x(Px = Gx) \rightarrow \big(F(\hat{x}Px) = F(\hat{x}Gx)\big)\,, \qquad \text{(Va)}$$

$$(\hat{x}Px = \hat{x}Gx) \rightarrow \forall x(Px = Gx)\,. \qquad \text{(Vb)}$$

Nessuna delle enunciazioni precedenti traduce l'assioma di comprensione, ma in ognuna di esse tale assioma viene implicitamente presupposto. Infatti, nella premessa di (Vb) figurano senza alcuna limitazione segni di classe, il che equivale ad ammettere che a ogni proprietà corrisponda una classe (punto 1 dell'assioma di comprensione), mentre nella conseguenza di (Va) le classi appaiono, ancora senza limitazione alcuna, come argomento di una indeterminata funzione F (punto 2 dello stesso assioma).

In particolare, (Vb) afferma che, se due classi α e γ sono uguali, allora le proprietà P e G di cui esse sono l'estensione dovranno valere per gli stessi oggetti; e la critica di Russell metteva proprio in luce il comportamento eccezionale, a questo riguardo, di alcuni particolari oggetti (rappresentati dalle classi corrispondenti a determinate proprietà).

Si è già accennato alle riflessioni e alle esitazioni di Frege circa l'opportunità e la possibilità logica del quinto postulato; perplessità che abbiamo visto essere superate solo al tempo dell'articolo *Funzione e concetto*. Non dobbiamo dimenticare comunque che nella stessa prefazione al primo volume dei *Princípi* egli stesso aveva richiamato ancora una volta l'attenzione sulla delicata questione, con queste chiare parole: "Per quanto mi è dato di vedere, una questione può sorgere soltanto intorno al mio quinto principio, riguardante i decorsi di valori, che non è stato finora esplicitamente espresso dai logici, pur se, ad esempio, si pensa a esso ogni qualvolta si parla di estensioni di concetti. Io lo

ritengo puramente logico. A ogni modo ho cosí indicato il punto dove deve cadere la decisione."

È superfluo tentare di descrivere l'effetto che la lettera di Russell produsse su Frege; il tono delle parole con le quali questi ne dà comunicazione al lettore — nell'appendice al secondo volume dei *Princípi* — esime da ogni commento.

Sarà opportuno ricordare invece come il paradosso di cui qui parliamo, detto anche "paradosso o antinomia di Russell", segnò l'avvío per tutta una serie di ricerche in varie direzioni, ricerche volte a costruire sistemi logici nei quali fosse possibile evitare il presentarsi del paradosso in questione (e di altri, ad esso piú o meno affini, che non tardarono a fare la loro comparsa). Anzi, in ordine di tempo, il primo tentativo in questo senso fu fatto da Frege stesso e forma appunto argomento dell'appendice ai *Princípi* sopra ricordata. Va subito detto, d'altra parte, che fra il tentativo di Frege e quello di altri autori a lui contemporanei o posteriori, esiste una differenza essenziale. La soluzione di Frege, potremmo dire, è "minimale", ossia non affronta il problema delle antinomie nella sua interezza, ma tende a escludere proprio e solo quei particolari enti paradossali che Russell aveva messo in evidenza. È chiaro però che la soluzione proposta da Frege è comprensibilmente affrettata, quasi fosse solo destinata a permettere la pubblicazione del volume. Per fare un paragone, potremmo dire in definitiva che, mentre Frege tampona una falla, i logici a lui posteriori mettono la nave in cantiere.

Come si può infatti constatare nell'epilogo dei *Princípi* (riportato nella parte quinta) la linea seguita da Frege consiste nell'indebolire il postulato (Vb), escludendo dai valori possibili della variabile d'oggetto che in esso figura gli "oggetti dubbi", ossia le classi corrispondenti ai predicati Px e Gx. In altri termini, Frege consente alle proprietà di avere come estensione la stessa classe anche quando esse differiscono al punto di essere e non essere valide per uno stesso oggetto. Di conseguenza il (Vb) viene modificato in

$$(\hat{x}Px = \hat{x}Gx \wedge x \neq \hat{x}Px) \rightarrow \forall x(Px = Gx) \qquad \text{(V'b)}$$

oppure in

$$(\hat{x}Px = \hat{x}Gx \wedge x \neq \hat{x}Gx) \rightarrow \forall x(Px = Gx)\,, \qquad \text{(V'c)}$$

mentre il postulato (V) diventa

$$(\hat{x}Px = \hat{x}Gx) \leftrightarrow \forall x(x \neq \hat{x}Px \wedge x \neq \hat{x}Gx \rightarrow Px = Gx)\,. \qquad (V')$$

La "correzione" ha evidentemente una portata limitatissima. Ma v'ha di piú: essa non è "sufficiente" nel senso che conduce a sua volta a conclusioni contraddittorie. La cosa fu dimostrata per la prima volta da Lesniewski nel 1938 e ne venne data notizia da Sobocinski nel 1949.[1]

Contrariamente a Frege, che non considerò la questione in tutta la sua generalità, parecchi tentativi furono fatti per sanare in generale un sistema logico del tipo di quello da lui adottato nei *Princípi.* Accenneremo brevemente ad alcuni di essi.

a) Il tentativo di Russell, il quale, mediante la sua teoria dei tipi, lascia sostanzialmente inalterata la formulazione dell'assioma di comprensione; ma suddivide i termini del discorso in tipi, considerando di tipo 0 gli oggetti, di tipo 1 le classi di oggetti (o equivalentemente le proprietà di oggetti), di tipo 2 le classi di classi di oggetti (proprietà di proprietà) e cosí via, imponendo inoltre la clausola che nel linguaggio oggetto vengano ammesse come significanti espressioni del tipo

$$a \in b$$

se e solo se, n essendo il tipo di b, quello di a è $n - 1$ (trascuriamo qui un'altra piú sottile distinzione imposta da Russell in vista della eliminazione di un'altra classe di antinomie, quelle che furono poi dette linguistiche o semantiche).

È chiaro quindi che, se α è una classe qualunque, non è mai possibile formare ora un'espressione quale $\alpha \in \alpha$ che interviene nella definizione (1) della classe β; viene cosí evitato il paradosso. Non possiamo qui soffermarci sulle modificazioni apportate successivamente alla teoria dei tipi e sulle difficoltà cui esse danno luogo. Vogliamo solo far notare esplicitamente come la costruzione freghiana della successione infinita dei numeri naturali risulti chiaramente incompatibile con il rispetto della gerarchia dei tipi; e ricordare come una lieve modifica di essa — compatibile con la teoria dei tipi — non permise tuttavia

[1] B. SOBOCINSKI, *L'analyse de l'antinomie russellienne par Lesniewski* [L'analisi dell'antinomia di Russell condotta da Lesniewski], Methodos, vol. 1, 94-107, 220-38, 308-16 (in particolare 220-38) (1949). Si veda anche W. V. O. QUINE, *La via d'uscita di Frege*, Riv. Fil., vol. 46, 371-86 (1955).

a Russell di assicurarsi l'esistenza di *infiniti* numeri naturali se non attraverso la postulazione del cosiddetto assioma dell'infinito. La stessa natura esplicitamente esistenziale di tale assioma indebolisce però essenzialmente l'originario programma logicista del Frege, e urta inoltre contro serie critiche che in alcuni casi si riconnettono alla concezione stessa di validità logica, sulle quali tuttavia non possiamo qui fermarci.

b) Il tentativo di Zermelo (e quelli condotti posteriormente nella stessa direzione da Skolem e Fraenkel), il quale pensò di evitare la difficoltà accennata non limitando, come Russell, il potere espressivo del linguaggio, ma assicurandosi, attraverso una serie di assiomi particolari, solo l'esistenza di certe determinate classi abbastanza "sicure".

c) Il tentativo di von Neumann (seguito successivamente da Bernays, Gödel e altri), il quale fu il primo a osservare esplicitamente che il sorgere dell'antinomía era imputabile non tanto all'ammettere senza limiti l'esistenza delle classi, quanto all'ammettere la possibilità di trattarle, indistintamente, come elementi di altre classi. Su questa osservazione si basa appunto la distinzione, oggi corrente, fra "classe" e "insieme", intesa la prima semplicemente come moltitudine di enti, il secondo come ente unitario, ossia, in altri termini, come possibile argomento.

d) Ricordiamo infine il tentativo di Quine, che costituisce, per cosí dire, una mediazione fra gli indirizzi precedenti, in quanto ammette alla comprensione solo quelle proprietà (ammette cioè la possibilità di considerare le classi ad esse corrispondenti) che risultano *stratificabili*, nel senso che (sul piano sintattico) alle variabili in esse comparenti possano associarsi numeri naturali che rispettino determinate condizioni di ordine (il che costituisce, grosso modo, una specie di semplificazione della teoria dei tipi).[1]

12. *Gli ultimi scritti di Frege*

Sarebbe inesatto affermare che la comunicazione di Russell segna l'abbandono, da parte di Frege, di ogni attività scientifica; è certo però che le sue pubblicazioni successive al 1903, e di cui ora daremo breve

[1] Per una piú ampia ed esauriente discussione dell'aspetto insiemistico della questione rinviamo il lettore al recente volume di E. CASARI, *Questioni di filosofia della matematica* (Feltrinelli, Milano 1964).

notizia, non sono piú inserite direttamente, almeno per quanto riguarda l'aspetto "tecnico", nell'àmbito del problema dei fondamenti. E — cosa che non può non sorprendere — questo accade proprio in un periodo durante il quale gli interessi e gli studi sull'argomento aumentano di numero e profondità in tutta l'Europa.

Fra il 1903 e il 1908 Frege riprende la sua annosa polemica contro i formalisti, conducendola, per cosí dire, su due fronti: quello della geometria e quello dell'aritmetica. La prima prende lo spunto dalla pubblicazione di alcune lettere scambiate fra lui e Hilbert a cavallo fra il 1899 e il 1900, nelle quali Frege sottoponeva a rigorosa critica l'uso delle definizioni implicite in geometria; contro tale uso egli adduceva ragioni basate sulla propria teoria del concetto. In ultima analisi, esse potrebbero essere riassunte dicendo che Frege denuncia l'impossibilità di caratterizzare pienamente e univocamente, mediante tali definizioni, gli oggetti o i concetti da definire. La polemica si inasprisce, assumendo toni sempre piú acidi, per l'intervento a favore di Hilbert di un allievo di questi, A. Korselt, e occupa Frege fra il 1903 e il 1906, concretandosi in cinque lunghi articoli.[1] Per maggiori ragguagli su tutta la polemica, il lettore può riferirsi alla parte quarta del presente volume.

Per quanto invece riguarda la polemica contro la concezione formalista dell'aritmetica, Frege riprende, sollecitatovi da una risposta di J. Thomae, idee e argomentazioni già ampiamente espresse contro le concezioni di questo matematico nel secondo volume dei *Princípi*. Anche in questo caso i due autori, fra il 1906 e il 1908, hanno un serrato scambio di note, alcune delle quali brevissime, che degenerano in un acido sfogo di risentimenti personali e in ogni caso non aggiungono sicuramente nulla di significativo alla produzione freghiana. Proprio per questo motivo abbiamo preferito non includere nella presente raccolta gli ultimi sviluppi della polemica,[2] riportando invece ampiamente

[1] *Über die Grundlagen der Geometrie* [Sui fondamenti della geometria], Jber. dtsch. MatVer., vol. 12, 319-24 e 368-75 (1903); vol. 15, 293-309, 377-403 e 423-30 (1906).

[2] Frege vi concorse colle tre note: *Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae* [Replica alla chiaccherata del signor Thomae], Jber. dtsch. MatVer., vol. 15, 586-90 (1906); *Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik auf's Neue nachgewiesen* [Nuova dimostrazione della impossibilità dell'aritmetica formale di Thomae], ibid., vol. 17, 52-55 (1908); *Schlussbemerkung* [Osservazione conclusiva], ibid., 56 (1908).

le pagine piú equilibrate dei *Princípi* rivolte alla critica delle concezioni formali dell'aritmetica.

Assai piú interessante a proposito della costruzione formale dell'aritmetica è probabilmente il carteggio, intercorso nel periodo 1908/1910 (si tratta in totale di 20 lettere), fra Frege e Löwenheim. Purtroppo non ci è stato possibile consultarlo in quanto non facente parte del *Nachlass* di Frege custodito nell'archivio dell'Università di Münster, ma da accenni contenuti in alcune carte di Scholz apprendiamo come, nel corso di tale corrispondenza, Löwenheim fosse riuscito a convincere Frege della possibilità di una aritmetica formalistica. Questo spiegherebbe, fra l'altro, la maggior cautela di Frege riscontrabile ad esempio nel lavoro *Über die Logik und Mathematik* [Sulla logica e la matematica] del 1914, dove l'autore esprime solo in forma dubitativa la dipendenza della seconda dalla prima.

Nel 1917 Frege chiede alle autorità accademiche di essere esonerato dal suo incarico a Jena e nel 1918 viene collocato a riposo. In questi anni costatiamo che gli interessi di Frege si vanno orientando verso un'indagine a carattere schiettamente storico-filosofico di alcuni concetti matematici fondamentali: sempre nel 1918 infatti inizia la pubblicazione di una trilogia [1] nella quale la trattazione di alcuni temi logici, quali ad esempio il pensiero, la negazione, ecc., viene condotta, come dicevamo, da un piú pacato e cauto punto di vista filosofico generale.

L'ultimo saggio della trilogia viene pubblicato nel 1923; nei primi mesi del 1925, Frege inizia la stesura di un articolo *Erkenntnisquelle der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften* [Fonti di conoscenza della matematica e delle scienze naturali matematiche] per il filosofo Richard Hönigswald; ad una richiesta di ampliamento da parte di quest'ultimo (giugno 1925) Frege risponde affermativamente, pur pregando che gli venga concessa una dilazione a causa delle sue precarie condizioni di salute. Nel luglio dello stesso anno si reca infatti

[1] Si tratta dei tre seguenti articoli, pubblicati nella rivista "Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus": *Der Gedanke - Eine logische Untersuchung* [Il pensiero - Una ricerca logica], vol. 1, 58-77 (1918); *Die Verneinung - Eine logische Untersuchung* [La negazione - Una ricerca logica], vol. 1, 143-57 (1918); *Logische Untersuchungen - Dritter Teil: Gedankengefüge* [Ricerche logiche - Terza parte: strutture di pensiero], vol. 1, 36-51 (1923).

a Bad Kleinen, un luogo di cura, ove muore nella notte fra il 25 e il 26 dello stesso mese.

Nel volgere di pochi anni dalla sua morte, il mondo scientifico europeo rivalutava appieno l'opera di Frege, riconoscendogli il merito di aver non solo contribuito in modo fondamentale all'impostazione del logicismo, ma anche aperto la via a gran parte delle piú feconde ricerche logiche del nostro secolo; si riconoscono incondizionatamente il suo "acume di penetrazione" e il suo "rigore, prima sconosciuti, e ancor oggi senza pari nella maggior parte dei casi" (Philip E. B. Jourdain).

A conferma di quanto ora detto, basti qui ricordare (oltre ai giudizi sull'*Ideografia* riportati nel paragrafo 4 di questa introduzione) le parole di Friedrich Waismann che lo proclama "il piú grande logico della fine del secolo scorso"; Jan Łukasiewicz giunge a vedere in lui "il piú grande logico dei nostri tempi".

L'ideografia nel sistema freghiano

Corrado Mangione

Dedichiamo queste pagine a una schematica presentazione del sistema logico freghiano nel suo aspetto ideografico. Il lettore potrà naturalmente trovare una particolareggiata spiegazione dell'ideografia nella *Begriffsschrift*, la cui traduzione costituisce appunto la parte prima del presente volume. Essa tuttavia non è sufficiente, come già abbiamo accennato, alla comprensione dei *Princípi*, date le notevoli variazioni intervenute nella concezione logica del Frege fra il 1879 e il 1893. La presente esposizione vuol essere autonoma e, per quanto sommaria, si propone di colmare questa lacuna, permettendo cosí al lettore di seguire in modo sufficientemente agevole l'appendice ai *Princípi* che pubblichiamo nella parte quinta del volume.

Ci siamo attenuti alla versione definitiva che del suo sistema Frege dà nei *Princípi*, senza far notare esplicitamente le variazioni che esso subí dalla prima stesura del 1879; tali variazioni sono state peraltro accennate nella pagine precedenti e a esse si fa richiamo, in nota, anche nel corso del volume. In generale abbiamo creduto opportuno "tradurre" le espressioni originali del Frege in simbolismo moderno; ove ciò è stato fatto, abbiamo usato il simbolismo impiegato dal Casari nel suo volume [1] e di cui, del resto, si è fatto uso anche nelle pagine precedenti.

È stato piú volte ribadito come, per Frege, ogni segno fondamentale dell'ideografia debba essere significante, debba cioè avere associata una ben determinata estensione, e proprio per questo esso possa venir considerato come "nome" della sua estensione. A partire dai segni fondamentali, mediante ben precise regole, si possono poi costruire dei

[1] E. CASARI, *Lineamenti di logica matematica*, 4ª ed. (Feltrinelli, Milano 1964).

complessi segnici ai quali viene assicurata un'estensione in virtú della natura stessa delle regole con le quali essi vengono costruiti. In altri termini, Frege opera con nomi di certe entità che possono essere oggetti o funzioni di vario grado, ma che in ogni caso *debbono* essere esattamente precisate. Eccezione a questa regola costituiscono le lettere greche e latine minuscole e le lettere gotiche maiuscole e minuscole; esse infatti non hanno un'estensione determinata in quanto vengono impiegate come variabili, come lettere cioè che hanno soltanto il compito di *indicare* oggetti e funzioni, ma che non fungono da nome a nessuno di essi in particolare.

Frege introduce quindi "nomi propri", la cui estensione è un oggetto, e "nomi di funzioni" di vario grado con argomenti di vario tipo; essenzialmente però questa seconda categoria si riduce a essere costituita da nomi di funzioni di primo grado a uno o due argomenti: infatti, grazie all'introduzione dei nomi di decorsi di valori (classi), i nomi di funzioni di grado superiore possono ridursi a nomi di funzioni di primo grado.

Ora, gli unici oggetti primitivi introdotti da Frege nella sua logica sono il Vero e il Falso; ne segue intanto la stipulazione fondamentale che i "nomi" di valori di verità hanno un significato: precisamente essi significano, a seconda dei casi, il Vero o il Falso. Non solo, ma si ha anche che, almeno finché non verrà allargato il cerchio degli oggetti ammessi nella logica, tutti i nomi propri che interverranno nell'ideografia dovranno essere nomi di valori di verità.

Per quanto riguarda i nomi di funzioni (e vedremo che Frege introdurrà tutti i segni fondamentali come nomi di funzioni) Frege sostituisce al loro (o ai loro) posto di argomento dei nomi di oggetti (e quindi nomi di valori di verità) e fa vedere che ciò che risulta è ancora un nome di valore di verità, ossia è un nome provvisto di significato. Il procedimento qui accennato si riferisce, in realtà, solo a nomi di funzioni di primo grado, che appunto possono venir saturati per questa via; per i nomi di funzioni di secondo grado interviene però la possibilità, cui prima si accennava, di una loro "riduzione" a nomi di funzioni di primo grado. Tale riduzione, dicevamo, è possibile mediante l'impiego dei decorsi di valori i quali sono a loro volta *oggetti*; su di essa ci fermeremo brevemente piú avanti. Non prenderemo invece in

considerazione, in quanto non direttamente interessanti l'epilogo ai *Principi*, le funzioni di terzo grado.

Da quanto precede risulta chiaro che ogni "proposizione" ideografica si presenta in definitiva come nome di un valore di verità; in altri termini, a partire dai segni fondamentali e operando in base a certe regole, noi costruiremo certi complessi segnici (che per lo piú avranno la forma di implicazioni a una o piú premesse) ai quali, in base al *senso* da essi espresso, potremo associare come significato uno dei due valori di verità. È chiaro allora che ci si può limitare a considerare uno solo di questi valori, precisamente il Vero, osservando che se una "proposizione" dovesse risultare essere un nome per il Falso, basterebbe negarla per ottenere una proposizione la cui estensione fosse il Vero. In altre parole, potremo limitarci ad operare con complessi segnici che esprimano un "pensiero" vero; dovremo d'altra parte mettere in evidenza il fatto che noi assumiamo tale "pensiero" nelle nostre deduzioni *asserendolo* come vero, considerandolo cioè come un nome per il Vero. Otterremo cosí ciò che Frege chiama *proposizione ideografica* (*Begriffsschriftssatz*): un pensiero espresso coi segni dell'ideografia e asserito come vero. La distinzione fra una proposizione non asserita e una proposizione ideografica avviene mediante l'introduzione del *segno di giudizio* |: esso ha infatti lo scopo, se premesso a un complesso segnico, di asserirlo come vero. Il segno di giudizio è, dice Frege, un segno *sui generis*; contrariamente a tutti gli altri segni fondamentali, esso non è un segno di funzione, né serve a "formare funzioni".

Ogni proposizione ideografica dei *Princípi* si presenterà pertanto come formata da due parti:

a) il segno di giudizio | e

b) un certo complesso segnico che nella sua totalità sarà un nome per il valore di verità Vero.

Anticipando la notazione, in un complesso, ad esempio, quale

```
|—┬—┬— f(a)
  │ └— f(b)
  └——— a = b
```

potremo riconoscere due costituenti fondamentali: il segno di giudi-

zio **I** e il nome per il Vero

$$\begin{array}{l} \text{—┬—┬— } f(a) \\ \quad \text{└— } f(b) \\ \text{└——— } a = b\,. \end{array}$$

Oltre al segno di giudizio, gli altri segni fondamentali introdotti da Frege sono i seguenti:

—, —┬—, —⌣—, \\, —┬—.

Diamone ora le relative determinazioni.

La funzione $— x$ ha il valore $\begin{cases} \text{Vero, se } x \text{ è un nome per il Vero;} \\ \text{Falso, se } x \text{ è il nome di un oggetto qualunque diverso dal Vero.} \end{cases}$

La funzione $—\!\!\top\!— x$ ha determinazioni opposte alla precedente, ossia

$$—\!\!\top\!— x = \begin{cases} \text{Vero, se } x \text{ è il nome di un oggetto qualunque diverso dal Vero;} \\ \text{Falso, se } x \text{ è un nome per il Vero.} \end{cases}$$

È ovvio che tale funzione ha le caratteristiche della negazione (¬).

Mediante la terza funzione Frege introduce quell'ente logico cui si dà oggi il nome di quantificatore universale, stabilendo per essa le seguenti determinazioni:

$$—\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!— \Phi(\mathfrak{a}) = \begin{cases} \text{Vero, se il valore della funzione } \Phi(x) \text{ è il Vero qualunque sia } x; \\ \text{Falso, altrimenti}\,. \end{cases} \qquad (1)$$

In funzione dell'operatore universale cosí introdotto e della negazione, Frege può esprimere il quantificatore esistenziale come negazione della generalità della negazione, cosicché

$$—\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!— \Phi(\mathfrak{a}) \qquad (2)$$

va letto "esiste (almeno) un x tale che $\Phi(x)$".

Va qui notato che la distinzione fra variabili libere e variabili vinco-

late viene espressa mediante una differenziazione tipografica, con l'impiego cioè delle lettere gotiche per le variabili vincolate e delle lettere latine per le variabili libere.

È quasi superfluo notare che nel nostro simbolismo la (1) e la (2) corrispondono nell'ordine a

$$\forall x Px \qquad (1')$$

$$\neg \forall x \neg Px \quad \text{(o anche, piú usualmente, } \exists x Px). \qquad (2')$$

Data la stretta connessione con la possibilità di esprimere la generalità (o, in altri termini, con l'introduzione del quantificatore universale) Frege introduce a questo punto nei *Princípi* la notazione per i decorsi di valori; ci sembra opportuno seguire anche qui quest'ordine.

Abbiamo già visto che, dato il nome di funzione $\Phi(x)$, la notazione

$$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$$

sta a indicare il suo decorso di valori. Si noti bene che una notazione come $\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$ mediante la quale Frege indica il decorso di valori di una funzione $f(x)$, è un nome proprio solo in quanto sia fissata la funzione f. In caso diverso, quando cioè la f sia una generica funzione, $\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$ è il nome per una funzione di secondo grado. La ε fra parentesi può infatti considerarsi "vincolata" in quanto sotto l'azione dell'operatore $\grave{\varepsilon}$ (si pensi all'analoga notazione russelliana $\hat{x}Px$); l'espressione $\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$ dipende di conseguenza dalla sola funzione $f(x)$ ossia risulta, secondo Frege, una funzione di secondo grado con un argomento di secondo tipo.

L'introduzione di questo nome di funzione (che comporta la variazione piú importante e significativa rispetto al simbolismo del 1879) pone Frege di fronte alle perplessità, già piú volte ricordate nelle pagine precedenti, circa l'introduzione del concetto di classe. Ma, anche dal punto di vista dell'ideografia, sorgono qui dei problemi riguardo alla stipulazione fondamentale che ogni segno debba avere un'estensione ben determinata, debba cioè essere significante.

Per i segni finora visti le stesse determinazioni date all'atto della loro introduzione ci assicuravano che, sostituendo ai loro posti di argomento nomi per gli oggetti Vero o Falso, essi dànno luogo a nomi significanti (e la cosa del resto si verifica agevolmente). Introducendo $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ però, non solo assumiamo nella logica un nuovo nome di funzione (le cui

determinazioni si potrebbero stipulare, entro certi limiti, arbitrariamente) ma, per ogni funzione di primo grado con un argomento, si introduce un nuovo "nome proprio", precisamente il nome del suo decorso di valori. Né d'altra parte tale introduzione è stata compiuta mediante una definizione (cioè, secondo Frege, $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ non è un nome per "qualcosa" di già accettato al livello del linguaggio oggetto [1]); si è solo tentato di "spiegare" che cosa intendere per decorso di valori, stabilendo che l'espressione

"la funzione $\Phi(x)$ ha lo stesso *decorso di valori* della funzione $\Psi(x)$"

sia equisignificante con l'espressione

"le funzione $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ hanno sempre lo stesso valore per lo stesso argomento".

Pertanto, per poter accettare il "nome proprio" $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ nella sua logica, Frege deve:

1) accettare come postulato il fatto che, data una qualunque funzione, sia lecito parlare del suo corrispondente decorso di valori (in questa implicita postulazione va riconosciuta l'accettazione illimitata dell'assioma di comprensione);

2) assicurare un significato alle funzioni fondamentali, provando che ognuna di esse dà luogo a un nome significante quando per suoi argomenti si prendano questi nuovi oggetti rappresentati dai decorsi di valori. Non è qui necessario fermarci sulla verifica (che Frege conduce nel paragrafo 31 dei *Princípi*) che questo effettivamente avviene.

Il quarto segno fondamentale viene introdotto come nome di una funzione di primo grado a un argomento, con le seguenti determinazioni:

$$\backslash x = \begin{cases} \text{se esiste un oggetto } a \text{ tale che l'argomento sia } \grave{\varepsilon}(a=\varepsilon) \text{ allora il valore della funzione è } a; \\ \text{se tale oggetto non esiste, allora il valore della funzione è l'argomento stesso.} \end{cases}$$

[1] Ricordiamo infatti che per Frege l'unica forma ammessa di definizione è quella nominale: una definizione serve soltanto a "dare un nome" a un'entità previamente riconosciuta ed esattamente determinata; essa è "solo un modo per comprendere in un segno o in una parola piú semplici un contenuto complesso".

Riportato al caso, per noi interessante, dei decorsi di valori, il nome di funzione

$$\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$$

ha per estensione l'oggetto che cade sotto il concetto $\Phi(x)$, se questo è un concetto sotto il quale cade un unico oggetto; altrimenti

$$\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$$

ha per estensione $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ stesso.

Le determinazioni precedenti fanno sí che, nel caso particolare in cui x sia il nome di un decorso di valori, $\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ sostituisca l'articolo determinativo del linguaggio comune. Anzi, osserva Frege, ciò avviene nell'ideografia evitando l'errore che si può commettere nel linguaggio comune passando da un concetto (ad esempio "squadra vincente") a un oggetto ("*la* squadra vincente") e trascurando il fatto che l'oggetto in questione può non esistere (nel nostro esempio: due squadre possono pareggiare) sicché si ottiene in verità un nome non significante. Ciò viene evitato in quanto alla funzione viene sempre assicurato un significato. E infatti:

a) Nel caso in cui $\Phi(x)$ sia un concetto sotto il quale cada uno e un solo oggetto, le determinazioni di $\backslash x$ fanno sí che il valore di $\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ sia proprio quell'oggetto. Ad esempio si ha che

$$\backslash\grave{\varepsilon}(\varepsilon+3=5) \quad \text{risulta uguale a } 2.$$

b) Nel caso in cui $\Phi(x)$ sia un concetto sotto il quale cadano piú oggetti o non ne cada nessuno, come pure nel caso in cui $\Phi(x)$ non sia un concetto, il valore di $\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ è $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ stesso. Cosí, ad esempio, tenuto conto che sotto il concetto "radice quadrata di uno" cadono i due oggetti -1 e $+1$, si ha che

$$\backslash\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2=1) \quad \text{risulta uguale a} \quad \grave{\varepsilon}(\varepsilon^2=1);$$

analogamente, considerato che sotto il concetto "disuguale da sé stesso" non cade nessun oggetto, si ha ancora che

$$\backslash\grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon=\varepsilon) \quad \text{risulta uguale a} \quad \grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon=\varepsilon);$$

infine, dal momento che $x+3$ non è un concetto, il valore della funzione $\backslash\grave{\varepsilon}(\varepsilon+3)$ risulta ancora uguale a $\grave{\varepsilon}(\varepsilon+3)$.

È chiaro che questa funzione costituisce il momento "formale" delle riflessioni di Frege sulla teoria delle descrizioni.

Frege introduce infine l'importantissima funzione di primo grado con due argomenti

$$\begin{array}{l} \text{———}\!\!\!\top\!\text{— } y \\ \qquad\llcorner\!\text{— } x \end{array}$$

con le seguenti determinazioni:

$$\begin{array}{l} \text{———}\!\!\!\top\!\text{— } y \\ \qquad\llcorner\!\text{— } x \end{array} = \begin{cases} \text{il Falso, se } x \text{ è un nome per il Vero} \\ \text{e } y \text{ è il nome di un qualunque oggetto} \\ \text{che non sia il Vero;} \\ \text{il Vero, altrimenti.} \end{cases}$$

Le determinazioni precedenti fanno apparire questa funzione come caso particolare (nel quale, per cosí dire, gli unici "oggetti" siano quelli introdotti da Frege) della funzione logica nota come implicazione materiale. Nel seguito la chiameremo semplicemente implicazione. Tradotta nel nostro simbolismo, la notazione

$$\begin{array}{l} \text{———}\!\!\!\top\!\text{— } q \\ \qquad\llcorner\!\text{— } p \end{array}$$

è equivalente a $p \rightarrow q$, il che mostra come le formule implicative del Frege vadano "lette" dal basso verso l'alto; conformemente, chiameremo "premessa" e "conseguenza" i termini che Frege chiama *Unterglied* (termine inferiore) e *Oberglied* (termine superiore).

Va notato che nel caso di piú premesse, come ad esempio in

$$\begin{array}{l} \text{————————— } s \\ \quad\;\;\llcorner\text{— } r \\ \quad\llcorner\text{——— } q \\ \llcorner\text{————— } p \end{array}$$

Nel nostro simbolismo: $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)))$ che per le leggi di importazione ed esportazione equivale a $(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$

si potrà considerare premessa p e conseguenza $\begin{array}{l} \text{———— } s \\ \quad\llcorner\text{— } r \\ \llcorner\text{——— } q \end{array}$, o premesse p e q e conseguenza $\begin{array}{l} \text{———}\!\!\!\top\!\text{— } s \\ \qquad\llcorner\!\text{— } r \end{array}$, o infine, premesse p, q, r, e conseguenza s.

In base a quanto finora detto sui segni fondamentali, potremo asserire che, nella classificazione freghiana delle funzioni, i primi due e il quarto sono segni di funzioni di primo grado con un argomento, l'ultimo è il segno di una funzione di primo grado con due argomenti, il terzo infine è il segno di una funzione di secondo grado con un argomento di secondo tipo (e tale risulta anche il segno per i decorsi di valori).

Mediante l'implicazione e la negazione, Frege esprime i due connettivi proposizionali "congiunzione" e "disgiunzione"; si ha precisamente

$$p \wedge q \underset{df}{=} \begin{array}{l} \neg\!\!\!\top\!\!\neg\!\!\top\, q \\ \quad\;\, \llcorner\, p \end{array} \qquad \text{(ossia } p \wedge q \underset{df}{=} \neg(p \rightarrow \neg q))$$

per la congiunzione, e

$$p \vee q \underset{df}{=} \begin{array}{l} \!\!-\!\!\top\!\!-\, q \\ \quad\;\, \llcorner\!\!\top\, p \end{array} \qquad \text{(ossia } p \vee q \underset{df}{=} (\neg p \rightarrow q))$$

per la disgiunzione alternativa (*vel* latino).

Particolare riguardo merita l'indicazione della generalità nel caso dell'implicazione; la struttura delle formule del simbolismo freghiano mette infatti molto bene in evidenza il "campo d'azione" del quantificatore, permette cioè di notare immediatamente se la quantificazione sia estesa a tutta la formula o solo a una sua parte (anche da questo possiamo capire che, malgrado il suo carattere macchinoso, l'ideografia freghiana presenta alcuni indiscutibili vantaggi). Cosí ad esempio nella formula

$$\begin{array}{l} \neg\!\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\!\!-\, \mathfrak{g}(a) \\ \qquad\quad \llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = a \end{array}$$

è manifesto che l'azione del quantificatore si estende a tutta la formula e ciò è messo in evidenza proprio dalla distribuzione delle lettere gotiche impiegate e dalla posizione della cavità contenente la lettera quantificata. La formula in questione andrebbe quindi tradotta come segue

$$\neg \forall P\{[\hat{x}Px = a] \rightarrow Pa\}\,.$$

Invece, ad esempio nella formula

$$\vdash\!\!\top\!\!-\!\!-\, f(b) \\ \quad\;\llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\, f(\mathfrak{a})$$

la quantificazione è limitata alla sola premessa; essa verrebbe cioè tradotta in

$$\forall x Q(x) \rightarrow Qy .$$

Dopo averle trattate estesamente nei paragrafi dal 14 al 19 del primo volume dei *Princípi*, Frege riunisce al paragrafo 48 dello stesso volume le regole ammesse del suo sistema. Le regole in questione sono in totale diciotto; qui rinunciamo a riportarle tutte, presentando solo quelle di cui si fa uso nell'appendice già citata. Ci sembra opportuno, in ogni caso, riassumere brevemente il contenuto delle regole che non verranno riportate. Esse sono, nell'ordine con cui le presenta Frege, la 1, le 9-12 e le 13-18. La regola 1 viene detta *Verschmelzung der Wagerechten* e può tradursi con "assorbimento dei segni orizzontali". Essa stabilisce che, quando ad argomento della funzione $— x$ (detta appunto da Frege *Wagerechte*) interviene una funzione dello stesso tipo, i due segni orizzontali possono fondersi in uno solo. Cosí ad esempio si ha

$$— — x = — x ; \qquad \top(— x) = \top x ; \qquad — {}_{\mid}(— x) = {}_{\mid}\, x .$$

Le regole 9-12 riguardano quello che in termini moderni si può chiamare cambio alfabetico di variabili, e d'altra parte precisano le cautele da osservare nelle sostituzioni, per evitare la confusione fra variabili libere e vincolate.

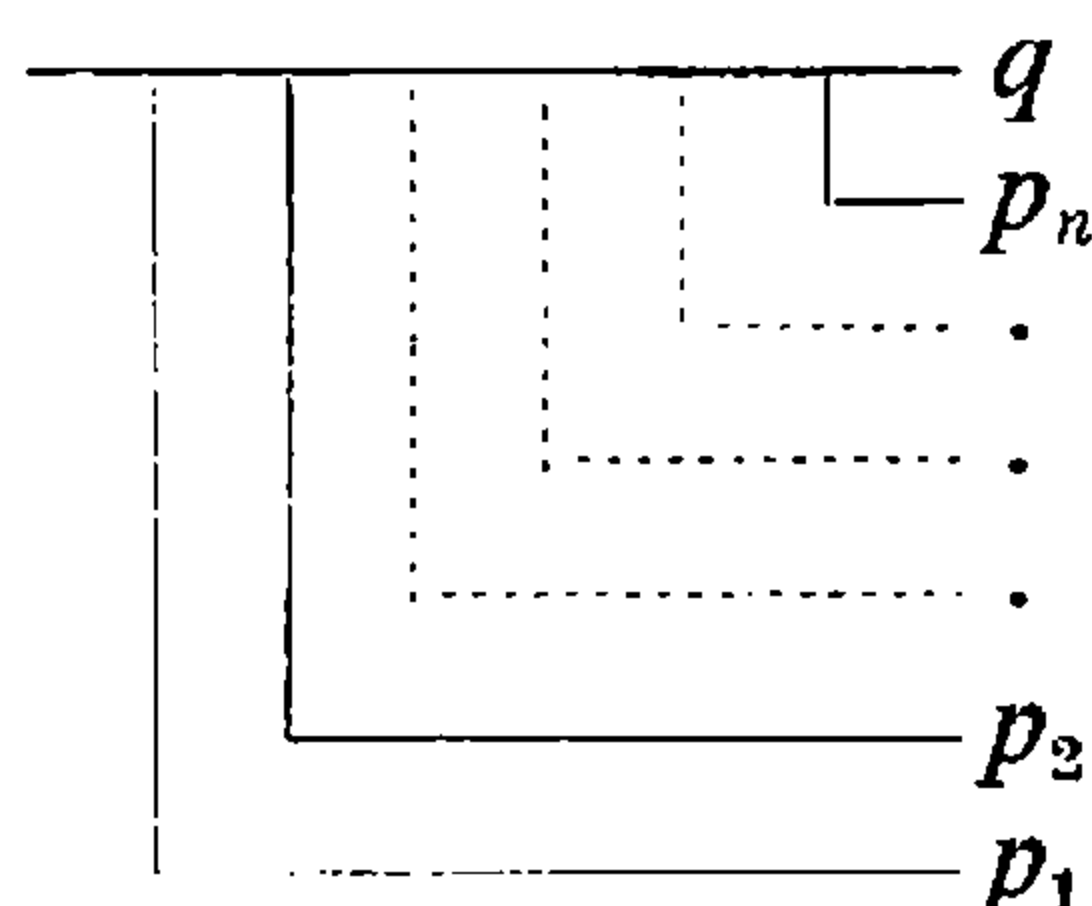
Le regole 13-18, infine, stabiliscono precisi criteri circa l'impiego delle parentesi.

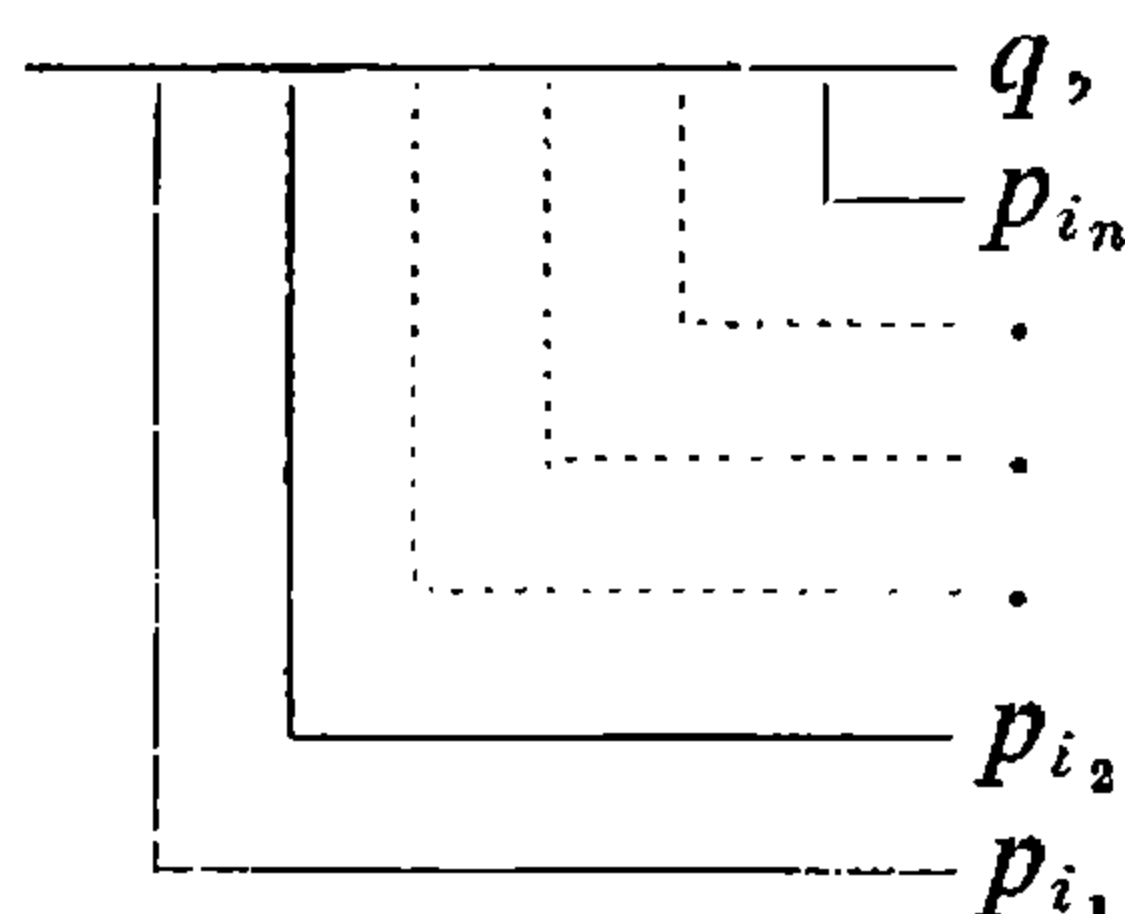
Delle rimanenti regole, che ora riporteremo, quattro riguardano trasformazioni che possono operarsi su una data proposizione, le altre tre sono vere e proprie regole di derivazione. Salvo che per la prima e la terza, Frege introduce segni particolari per indicare l'applicazione di ogni singola regola; ognuno di tali segni viene detto "segno intermedio" (*Zwischenzeichen*) e viene posto fra la proposizione originaria e quella che ne risulta dopo l'applicazione di una data regola.

1) *Scambio di premesse* (*Vertauschung der Unterglieder*)

Le premesse di una proposizione possono venir scambiate liberamente fra loro. Nessun segno intermedio. In simboli, questa regola può espri-

mersi dicendo che dalla proposizione

```
──┬──┬──┬──┬──┬── q
  │  │  :  :  └── pₙ
  │  │  :  └·····  .
  │  │  └········  .
  │  └···········  .
  │  └──────────── p₂
  └─────────────── p₁
```

si può passare all'altra

```
──┬──┬──┬──┬──┬── q,
  │  │  :  :  └── p_{iₙ}
  │  │  :  └·····  .
  │  │  └········  .
  │  └···········  .
  │  └──────────── p_{i₂}
  └─────────────── p_{i₁}
```

dove $i_1, i_2, \ldots, i_n$ è una qualunque permutazione di $1, 2, \ldots, n$. Nel nostro simbolismo esprimiamo tale regola scrivendo semplicemente

$$\frac{p_1 \to (p_2 \to (p_3 \to \ldots \to (p_n \to q)) \ldots)}{p_{i_1} \to (p_{i_2} \to (p_{i_3} \to \ldots \to (p_{i_n} \to q)) \ldots)} .$$

2) *Contrapposizione* (*Wendung*)

In una proposizione si può scambiare una premessa con la conseguenza, pur di cambiare valore di verità a entrambe. Segno intermedio: $\times$. In simboli:

```
──┬── q
  └── p
    ×
──┬┬─ p
  └┬─ q
```

$$\frac{p \to q}{\neg q \to \neg p} .$$

3) *Assorbimento di premesse uguali* (*Verschmelzung gleicher Unterglieder*)

Se in una proposizione figura piú volte la stessa premessa, essa può essere scritta una sola volta. Nessun segno intermedio. In simboli:

```
da ──┬──┬── q   si può passare a  ──┬── q
     │  └── p                       └── p
     └───── p
```

$$\frac{p \wedge p \to q}{p \to q} .$$

4) *Quantificazione* (*Verwandlung eines lateinischen Buchstabe in einen deutschen*)

In una proposizione che contenga una o piú lettere latine, si può sempre sostituire una di queste con una lettera *gotica*, purché:
1) si sostituiscano lettere latine indicanti oggetti o funzioni con lettere gotiche indicanti rispettivamente oggetti o funzioni;
2) la lettera latina che si intende sostituire venga sostituita, sempre e ovunque compaia, dalla medesima lettera gotica;
3) nel sostituire la lettera latina con una gotica, questa venga contemporaneamente collocata all'interno di una cavità, con l'avvertenza che la lettera latina sostituenda non compaia al di fuori della conseguenza preceduta da detta cavità;
4) se nella conseguenza di cui al punto precedente compare già una lettera gotica, si usi, per la nuova sostituzione, una lettera gotica diversa.
Segno intermedio $\smile$. In simboli:

$$\Phi(x)$$

$$\smile$$

$$—\overset{\mathfrak{a}}{\smile}— \Phi(\mathfrak{a})$$

Senza fermarci a chiarire esplicitamente i quattro punti sopra elencati (nei quali peraltro non è difficile scorgere i normali accorgimenti da usarsi allorché si quantifica universalmente una espressione della logica predicativa) ci limitiamo a riportare qualche esempio significativo dell'applicazione di questa regola.

$g(a) = b$
$\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}g(\varepsilon)$
$f(a) = b$

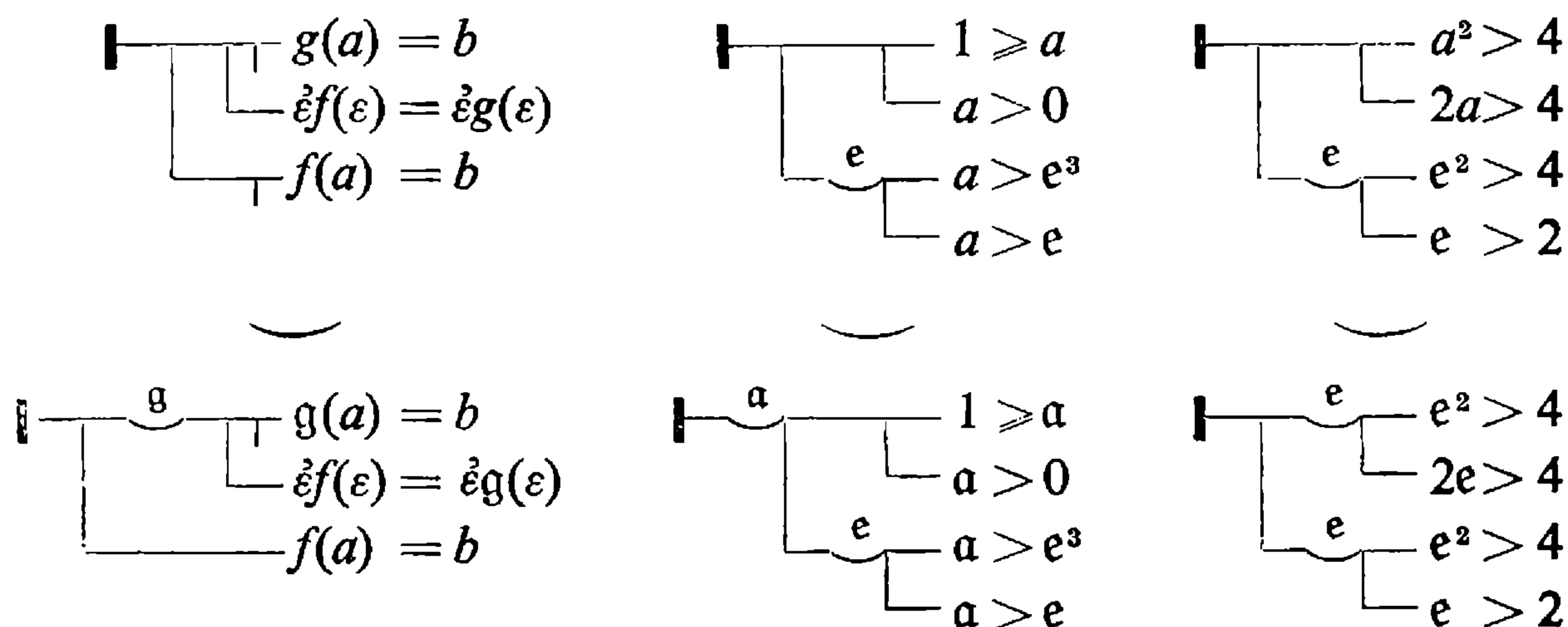
$1 \geqslant a$
$a > 0$
$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}$ $a > \mathfrak{e}^3$
$a > \mathfrak{e}$

$a^2 > 4$
$2a > 4$
$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}$ $\mathfrak{e}^2 > 4$
$\mathfrak{e} > 2$

$\smile$ $\smile$ $\smile$

$\overset{\mathfrak{g}}{\smile}$ $\mathfrak{g}(a) = b$
$\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)$
$f(a) = b$

$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $1 \geqslant \mathfrak{a}$
$\mathfrak{a} > 0$
$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}$ $\mathfrak{a} > \mathfrak{e}^3$
$\mathfrak{a} > \mathfrak{e}$

$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}$ $\mathfrak{e}^2 > 4$
$2\mathfrak{e} > 4$
$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}$ $\mathfrak{e}^2 > 4$
$\mathfrak{e} > 2$

Prima di presentare le regole di derivazione, sarà bene premettere qualche precisazione. Frege indica, ove necessario, le proposizioni dell'ideografia mediante una lettera greca minuscola, preceduta da una parentesi tonda e posta alla destra della proposizione cui la lettera si riferisce. Se successivamente tale proposizione viene impiegata nell'applicazione di una regola di derivazione, essa viene richiamata con la sua lettera indicativa, posta fra parentesi tonde, a sinistra del segno intermedio della regola in cui essa interviene. In uno stesso passaggio può applicarsi due volte la stessa regola o possono applicarsi successivamente due regole diverse: nei due casi, rispettivamente, viene ripetuto il segno distintivo della regola o vengono indicati in successione i segni delle due regole applicate. Se nell'applicazione di una regola intervengono piú proposizioni, a sinistra del segno intermedio della regola applicata, vengono riportate fra parentesi tonde le lettere distintive delle varie proposizioni.

Riportiamo ora le regole in questione con qualche esempio che serva a chiarire quanto detto finora. Ripetiamo per esse l'enunciazione che ne dà Frege nel suo volume.

5) *Derivazione* (a)

"Se una premessa di una proposizione si differenzia da una seconda proposizione solo per la mancanza del segno di giudizio, allora si può derivare una proposizione che si ottiene dalla prima mediante la soppressione di quella premessa." Segno intermedio ——. È chiaro che tale regola altro non è che la ben nota regola di separazione. Siano date ad esempio le proposizioni

$$\vdash \begin{array}{l} q \\ p \end{array} \quad (\alpha \qquad \text{e} \qquad \vdash p \quad (\beta;$$

si ha allora

$$(\beta)\!::\; \begin{array}{l} \vdash \begin{array}{l} q \\ p \end{array} \\ \vdash q \end{array} \qquad \text{oppure} \qquad (\alpha)\!:\frac{\vdash p}{\vdash q}\,.$$

Per avere un esempio di doppia applicazione della stessa regola, supponiamo date, oltre alla (α e alla (β, le altre due proposizioni

```
|-┬──┬── q
  │  └── p
  │──── r
  └──── s      (γ
```

e |— r (ϱ. Si avrà allora, ad esempio:

```
         |-┬──┬── q
           │  └── p
           │──── r
           └──── s
(β, ϱ) :: ═══════════ .
         |─────┬─ q
               └─ s
```

5) *Derivazione* (b)

"Se uno stesso complesso di segni figura in una proposizione come conseguenza e in una seconda proposizione come premessa, allora si può derivare una proposizione che abbia come conseguenza la conseguenza della seconda proposizione e come premessa tutte le premesse delle due proposizioni ad eccezione di quella sopra nominata." Segno intermedio - - - - . Si tratta evidentemente della cosiddetta "inferenza a catena".

Siano ancora date la proposizione (α e la proposizione |-┬─ p / └─ t (δ

Avremo allora

```
       |-┬─ q                       |-┬─ p
         └─ p                         └─ t
(δ) :: - - - - -      oppure   (α): - - - - - .
       |-┬─ q                       |-┬─ q
         └─ t                         └─ t
```

Anche in questo caso potrà aversi una doppia applicazione della regola, il che sarà indicato dal segno intermedio (,):: = = = =, come pure l'applicazione contemporanea di questa regola e della precedente: in questo seconda caso si avrà il segno intermedio (,):: = - - - .

5) *Derivazione* (c)

"Se due proposizioni hanno conseguenze uguali, mentre una premessa dell'una si differenzia da una premessa dell'altra solo per il segno di negazione, allora si può derivare una proposizione che abbia per con-

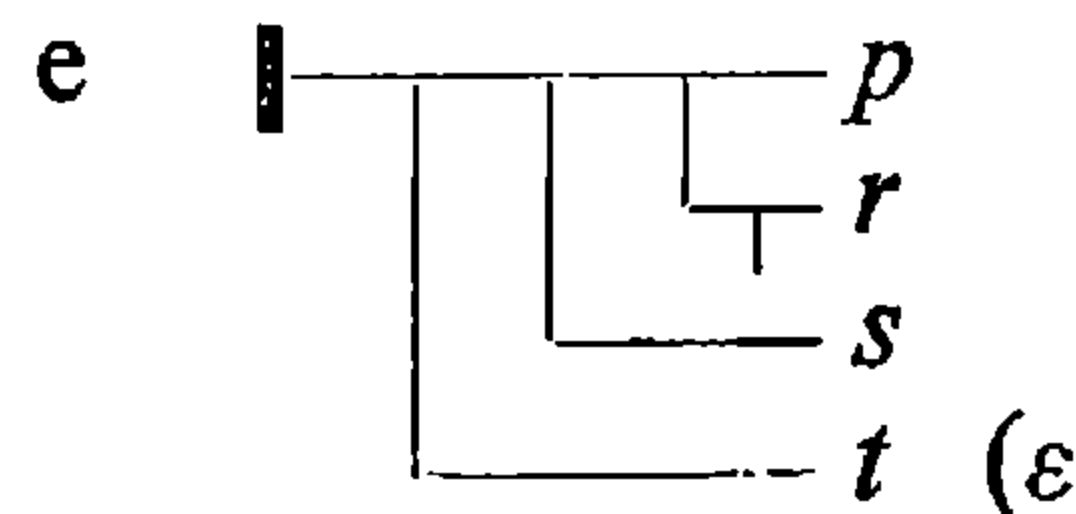
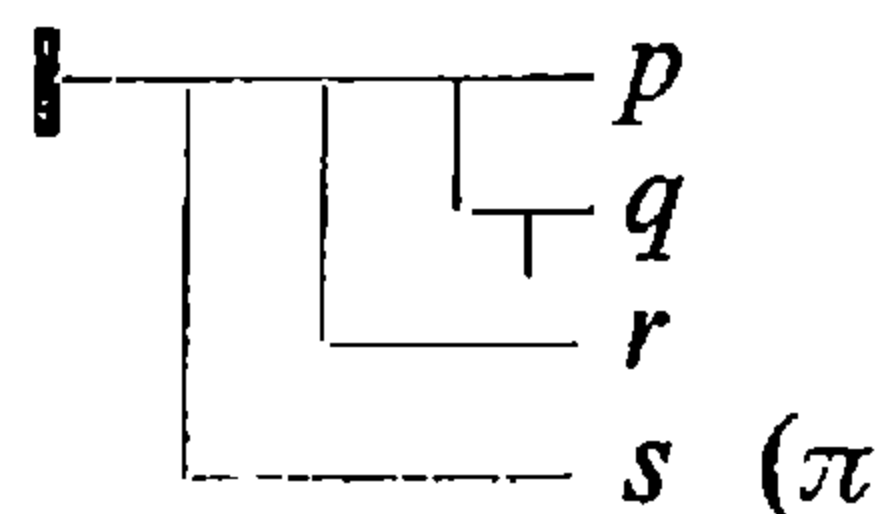
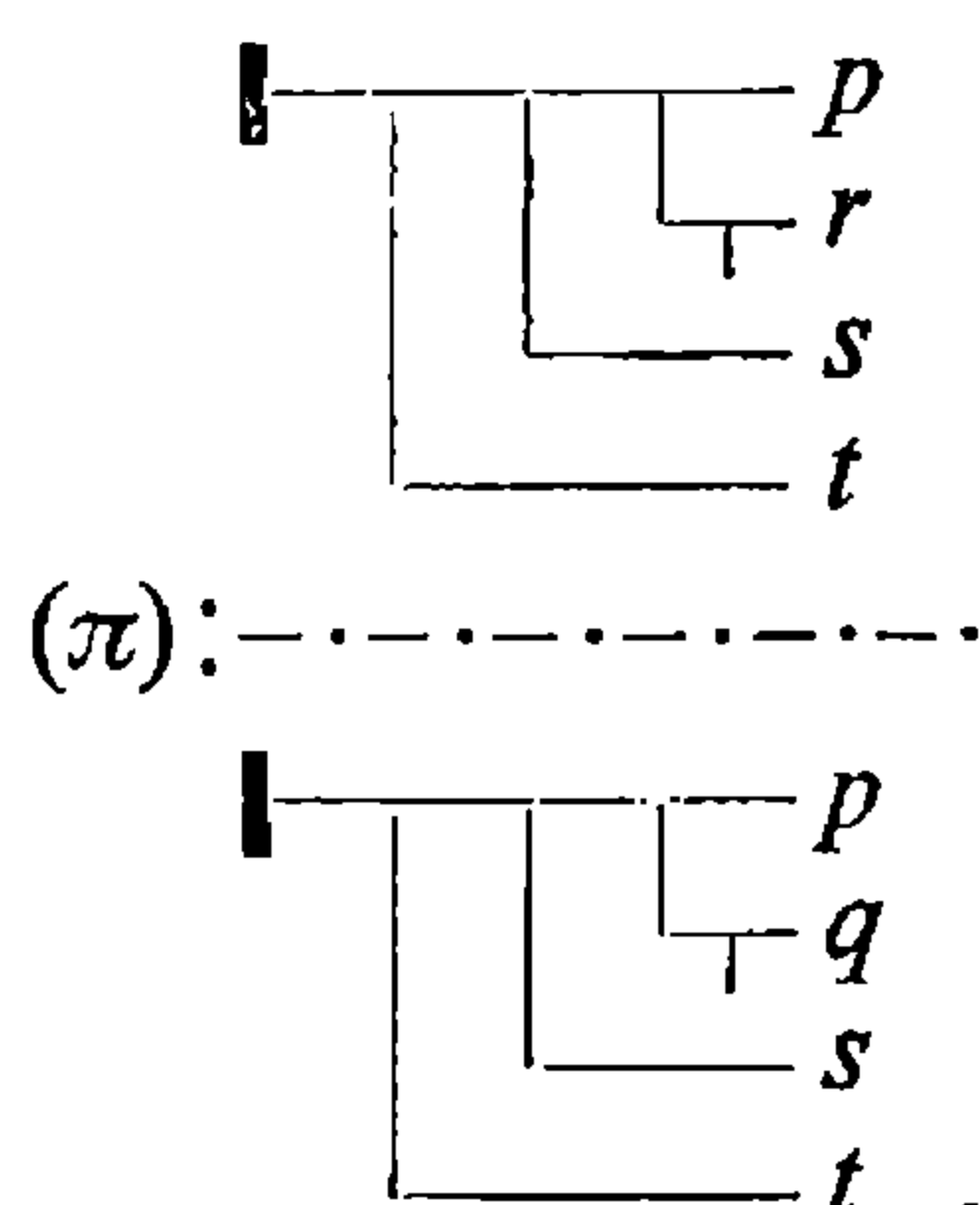
seguenza la conseguenza comune delle sue proposizioni e per premesse tutte le loro premesse eccettuate le due sopra nominate." Segno intermedio —·—·—·—.

Date le due proposizioni ⊢ p q r s (π e ⊢ p r s t (ε

avremo

⊢ p r s t

(π):—·—·—·—·—·—·

⊢ p q s t .

Prima di concludere questa breve esposizione dell'ideografia di Frege, ci sembra opportuno elencare i sei assiomi sui quali egli basa la costruzione dei *Princípi.* Poiché nell'appendice (riportata nella parte quinta del presente volume) Frege utilizza oltre tali assiomi alcune altre proposizioni da essi derivate, riporteremo, per comodità del lettore, accanto a ogni assioma, anche queste proposizioni, rispettando la numerazione originale di Frege.

⊢ a b a ⊢ a a ; (I

⊢ b a a ; (Ia

⊢ a a b ; (Ib

⊢ a a b ; (Ic

⊢ a a b ; (Id

⊢ a b a b ; (Ie

⊢ a b a b ; (If

⊢ a a a ; (Ig

⊢ $f(a)$; $\mathfrak{a}$ $f(\mathfrak{a})$ (IIa

⊢ $M_\beta(f(\beta))$; $\mathfrak{f}$ $M_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$ (IIb

$$\vdash\ \begin{array}{l} g\left(\smile^{\mathfrak{f}}\ \begin{array}{l}\mathfrak{f}(a)\\ \mathfrak{f}(b)\end{array}\right)\\ g(a=b)\end{array}\quad \text{(III;}$$

$$\vdash\ \begin{array}{l} f(a)\\ f(b)\\ a=b\end{array}\quad \text{(IIIa;}$$

$$\vdash\ \begin{array}{l} \top\, a=b\\ f(b)\\ \top\, f(a)\end{array}\quad \text{(IIIb;}$$

$$\vdash\ \begin{array}{l} f(b)\\ f(a)\\ a=b\end{array}\quad \text{(IIIc;}$$

$$\vdash\ \begin{array}{l} \top\, a=b\\ f(a)\\ f(b)\end{array}\quad \text{(IIId;}$$

$$\vdash\ a=a\quad \text{(IIIe ;}$$

$$\vdash\ \begin{array}{l} b=a\\ a=b\end{array}\quad \text{(IIIf;}$$

$$\vdash\!\top\,(-a)=(\top a)\quad \text{(IIIg ;}$$

$$\vdash\ \begin{array}{l} f(a)=f(b)\\ a=b\end{array}\quad \text{(IIIh;}$$

$$\vdash\ (-a=b)=(a=b)\quad \text{(IIIi ;}$$

$$\vdash\ \begin{array}{l} (-a)=(-b)\\ \top\,(-a)=(\top b)\end{array}\quad \text{(IV;}$$

$$\vdash\ \begin{array}{l} (-a)=(-b)\\ b\\ a\\ a\\ b\end{array}\quad \text{(IVa;}$$

$$\vdash\ (-a)=(\top\!\top a)\quad \text{(IVb ;}$$

$$\vdash\ \begin{array}{l} f(-a)\\ f(\top\!\top a)\end{array}\quad \text{(IVc;}$$

$$\vdash\ \begin{array}{l} f(\top\!\top a)\\ f(-a)\end{array}\quad \text{(IVd;}$$

$$\vdash\ (a=b)=(b=a)\quad \text{(IVe ;}$$

$$\vdash\ \left(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)=\grave{\alpha}g(\alpha)\right)=\left(\smile^{\mathfrak{a}}\, f(\mathfrak{a})=g(\mathfrak{a})\right)\quad \text{(V ;}$$

$$\vdash\ \begin{array}{l} F(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon))=F(\grave{\alpha}g(\alpha))\\ \smile^{\mathfrak{a}}\, f(\mathfrak{a})=g(\mathfrak{a})\end{array}\quad \text{(Va;}$$

$$\vdash\ \begin{array}{l} f(a)=g(a)\\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)=\grave{\alpha}g(\alpha)\end{array}\quad \text{(Vb;}$$

$$\vdash\ a=\backslash\grave{\varepsilon}(a=\varepsilon)\quad \text{(VI ;}$$

$$\vdash\ \begin{array}{l} a=\backslash\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)\\ \smile^{\mathfrak{a}}\, f(\mathfrak{a})=(\mathfrak{a}=a)\end{array}\quad \text{(VIa .}$$

PARTE PRIMA

Ideografia

Un linguaggio in formule del pensiero puro, a imitazione di quello aritmetico

1879

[Facciamo iniziare questa nostra raccolta con la prima, importantissima opera logica di Frege, nella quale egli presenta — come strumento essenziale per l'attuazione del suo programma di logicizzazione della matematica — quel simbolismo che, per la sua complessità, fu in gran parte responsabile della scarsa e pressoché nulla incidenza del pensiero e dei risultati di Frege presso i suoi contemporanei. Un'attenta lettura di quest'opera potrà d'altronde convincere facilmente come la su accennata "complessità" sia di fatto piú apparente che sostanziale.

L'*Ideografia* è suddivisa in tre parti, precedute da un'introduzione nella quale, ravvisata l'inadeguatezza della lingua comune a "condurre dimostrazioni", Frege giustifica l'adozione della sua scrittura per concetti, ne precisa gli scopi e ne indica possibili campi d'applicazione.

Nella prima parte Frege procede quindi all'introduzione dei segni fondamentali del simbolismo, ed enuncia l'unica regola ammessa esplicitamente nel suo sistema deduttivo: la regola di separazione. Va notato in particolare come ogni singolo segno fondamentale venga assunto sulla scorta di una sottile ed esauriente analisi linguistica, che ha lo scopo di mettere in evidenza eventuali distinzioni di significato celate nell'uso quotidiano della lingua (si pensi, per esempio, alle diverse accezioni del connettivo "o"), al fine di attribuire al segno in questione un significato unico e fissato una volta per tutte.

Successivamente l'autore sottopone a sottile analisi il concetto di funzione e ne introduce, conformemente, una notazione adeguata; in stretta relazione a ciò passa infine a esporre le sue stipulazioni sulla generalità, in base alle quali possiamo far risalire a Frege l'impostazione moderna della teoria della quantificazione.

La seconda parte fornisce varie esemplificazioni di procedimenti deduttivi. Dopo averli elencati al termine di una breve presentazione della sezione, Frege procede assumendo successivamente gli assiomi del suo sistema, e traendone di volta in volta alcune conseguenze immediate. Nelle sue derivazioni, oltre che della regola di separazione su menzionata, fa altresí uso di una regola di sostituzione, che peraltro non enuncia esplicitamente come tale. I sei assiomi introdotti fino a tutto il paragrafo 19, che nel simbolismo da noi adottato assumono la

forma seguente:

1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$,

2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$,

3) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)$,

4) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$,

5) $\neg\neg p \rightarrow p$,

6) $p \rightarrow \neg\neg p$,

assieme alle due regole su ricordate di separazione e di sostituzione, costituiscono il primo esempio di una sistemazione assiomatica, in senso moderno per la logica delle proposizioni. I successivi paragrafi di questa seconda parte forniscono esempi di derivazione al livello di una logica dei predicati con identità, essendovi impiegati, oltre ai precedenti, i tre assiomi

7) $x = y \rightarrow (Px \rightarrow Py)$,

8) $x = x$,

9) $\forall x Px \rightarrow Py$;

la sezione termina con la traduzione simbolica di alcuni classici modi del sillogismo aristotelico.

Nella terza parte, infine, Frege applica le stipulazioni precedenti alla derivazione di alcune proposizioni della teoria delle successioni. Ad esempio, definiti simbolicamente i concetti di "procedimento univoco" e "proprietà ereditaria in una successione", ne deduce ideograficamente proposizioni in apparenza tanto intuitive e "ovvie" da poter essere ritenute addirittura banali, o in ogni caso non analizzabili; in effetti Frege dà in queste pagine un primo accenno di quello che sarà il fondamento piú generale per la caratterizzazione della successione dei numeri naturali (e precisamente con la stessa impostazione poi adottata, indipendentemente da lui, da Bertrand Russell).

In nota nel testo verranno di volta in volta segnalate le variazioni subíte dai singoli segni qui presentati da Frege, rispetto al simbolismo definitivo che egli adotterà nei *Princípi dell'aritmetica*; per i segni tipografici ci si è attenuti per l'*Ideografia* e per la *Nota finale* ai *Fondamenti nell'aritmetica* alle edizioni originali Nebert, Halle 1879, rispettivamente, Pohle, Jena 1903. Per una trattazione generale della questione rimandiamo all'introduzione del presente volume.]

Introduzione

Il riconoscimento di una verità scientifica passa di solito attraverso vari gradi di sicurezza. Indovinata forse, in un primo momento, a partire da un numero insufficiente di casi singoli, la proposizione generale viene consolidata in modo via via piú sicuro nella misura in cui riusciamo a collegarla, per mezzo di catene deduttive, ad altre verità, sia che vengano da essa derivate conclusioni le quali trovano conferma per altra via, sia, al contrario, che essa medesima risulti conseguenza di proposizioni già accertate. Ne deriva che ci si può domandare, da una parte, quale sia il cammino attraverso cui una proposizione è stata gradualmente conseguita, dall'altra, il modo con cui si giunge poi a darle il piú solido fondamento. Alla prima domanda persone diverse risponderanno probabilmente in modi diversi, mentre la seconda è piú determinata e la sua risposta dipende strettamente dalla struttura interna della proposizione considerata. Il modo piú sicuro di condurre una dimostrazione è evidentemente quello puramente logico, che, astraendo dalla natura particolare delle cose, si basa soltanto sulle leggi sulle quali si fonda ogni conoscenza. Per questa ragione suddivideremo in due tipi tutte le verità che abbisognano di una fondazione, ascrivendo al primo quelle la cui dimostrazione può essere condotta in modo puramente logico, al secondo le verità la cui dimostrazione deve appoggiarsi su fatti empirici. Comunque con ciò è ben compatibile il fatto che anche una proposizione, la quale appartenga al primo tipo, non possa mai giungere alla coscienza di uno spirito umano senza un'attività sensoriale.[1] Alla base della nostra suddivisione non sta

[1] Poiché senza percezione sensoriale non è possibile alcuno sviluppo spirituale degli esseri a noi noti, quest'ultima osservazione vale per tutti i giudizi.

quindi la genesi psicologica della proposizione, bensí il modo piú perfetto con cui si conduce la dimostrazione. Orbene, essendomi posto la questione a quale di questi due tipi appartenessero i giudizi aritmetici, dovetti innanzi tutto indagare fino a che punto si possa procedere nell'aritmetica in modo puramente deduttivo, basandosi solo sulle leggi del pensiero, che sono al di sopra di tutte le particolarità. La via da seguire in tale indagine era questa: che dapprima io cercassi di ricondurre alla consequenzialità *logica* il concetto dell'essere ordinato in una successione, per poi proseguire, partendo da ciò, fino al concetto di numero. Per evitare che in questo tentativo si introducesse inavvertitamente alcunché di intuitivo, tutto doveva svolgersi senza la minima lacuna entro la catena deduttiva. Cercando di soddisfare nel modo piú rigoroso a questa esigenza, incontrai un ostacolo nell'inadeguatezza della lingua: infatti, malgrado la crescente pesantezza d'espressione, la lingua tanto meno mi permetteva di raggiungere quella precisione che il mio intento esigeva, quanto piú complesse divenivano le relazioni. Da questa necessità nacque l'idea dell'ideografia che qui presento. Essa deve dunque servire anzitutto a esaminare nel modo piú sicuro la connessione di una catena deduttiva e a mettere in evidenza ogni ipotesi che voglia inavvertitamente insinuarvisi, affinché, successivamente, si possa indagare sulla sua origine. Perciò si è rinunciato ad esprimere tutto ciò che è senza importanza per la *consequenzialità delle deduzioni*. Ho dato il nome di *contenuto concettuale* (§ 3) a ciò su cui si accentra per intero il mio interesse. Questa spiegazione deve quindi esser tenuta sempre presente se si vuol comprendere rettamente l'essenza del mio linguaggio in formule. Da questo deriva pure la denominazione "ideografia". Poiché per prima cosa mi sono limitato a esprimere quelle relazioni che sono indipendenti dalla natura particolare delle cose, potevo anche impiegare l'espressione "linguaggio in formule del pensiero puro". L'imitazione del linguaggio in formule aritmetico, cui faccio cenno nel titolo, si riferisce piú ai pensieri fondamentali che alla struttura particolare. Mi sono rimaste qui assolutamente estranee quelle tendenze che vorrebbero stabilire un'analogia artificiale, sulla base dell'interpretazione del concetto come somma delle sue note caratteristiche. Il mio linguaggio in formule aderisce nella maniera piú immediata a quello aritmetico nel modo di impiegare le lettere.

Credo di poter rendere nel modo piú chiaro il rapporto della mia ideografia con la lingua di tutti i giorni, paragonandolo al rapporto esistente fra il microscopio e l'occhio. Quest'ultimo, per l'estensione della sua applicabilità, per la rapidità con la quale sa adattarsi alle piú disparate circostanze, ha una grande superiorità nei confronti del microscopio. Considerato però come apparecchio ottico, esso rivela certamente parecchie imperfezioni che di solito passano inosservate solo in conseguenza del suo intimo collegamento con la vita spirituale. Ma, non appena scopi scientifici richiedano precisione nel discernere, l'occhio si rivela insufficiente. Il microscopio invece è adatto nel modo piú perfetto proprio a tali scopi, ma appunto per questo risulta inutilizzabile per tutti gli altri.

In modo analogo la mia ideografia è uno strumento inventato per determinati intenti scientifici e non si può condannarla se essa non è di alcuna utilità per altri scopi. Se essa corrisponde in qualche modo a questi intenti, ebbene, ci si accorga pure della mancanza di nuove verità nel mio lavoro. Mi conforterei di ciò con la consapevolezza che anche un perfezionamento del metodo dà incremento alla scienza. Anche Bacone ritiene sia piú importante scoprire un mezzo mediante cui tutto possa venir facilmente trovato, che non fare una singola scoperta, e del resto tutti i grandi progressi scientifici dei tempi moderni hanno avuto la loro origine in un perfezionamento del metodo.

Anche Leibniz ha riconosciuto, e anzi forse sopravvalutato, i vantaggi di un adeguato tipo di denotazione. La sua idea di una caratteristica universale, di un *calculus philosophicus* o *ratiocinator* [1] era troppo gigantesca perché il tentativo di realizzarla potesse oltrepassare la fase meramente preparatoria. L'entusiasmo da cui fu pervaso il suo creatore nel considerare quale smisurato accrescimento della forza spirituale dell'umanità sarebbe scaturito da un modo di denotazione capace di cogliere le cose stesse, lo portò a sottovalutare le difficoltà che si opponevano a una tale impresa. Però, anche se questo alto scopo non può venir raggiunto con un unico slancio, purtuttavia non si deve disperare della possibilità di un lento, graduale avvicinamento. Quando un problema appare insolubile in tutta la sua generalità, si cominci provvisoriamente

[1] Si veda a questo riguardo: TRENDELENBURG, *Historische Beiträge zur Philosophie* [Contributi storici alla filosofia], vol. 3.

a circoscriverlo; allora si giungerà forse alla sua soluzione con ampliamenti graduali. Nei segni aritmetici, geometrici, chimici, si possono vedere altrettante realizzazioni del pensiero di Leibniz per domini particolari. L'ideografia qui proposta aggiunge a questi un nuovo campo, e precisamente quello situato in posizione centrale, che è confinante con tutti gli altri. Da qui perciò si possono prender le mosse — e con le maggiori possibilità di successo — per colmare le lacune dei linguaggi in formule attualmente esistenti, per collegare all'àmbito di un unico di essi i loro campi finora separati, e per estenderli a quei campi che finora non vennero trattati con questo mezzo.

Mi riprometto un fecondo impiego della mia ideografia ovunque debba venir dato un particolare rilievo alla connessione del processo dimostrativo, come per esempio nella fondazione del calcolo differenziale e del calcolo integrale.

Mi sembra ancor piú facile estendere la sfera d'azione di questo linguaggio in formule alla geometria. Sarebbe solo necessario aggiungere ancora pochi segni per le relazioni intuitive che in essa ricorrono. In questo modo si otterrebbe una sorta di *analysis situs*.

Potrebbe qui collegarsi il trapasso alla teoria pura del movimento, e inoltre alla meccanica e alla fisica. In questi ultimi campi, nei quali si fa valere una necessità fattuale accanto alla necessità razionale, è prevedibile che il modo di denotazione subisca molto presto un progressivo sviluppo di pari passo con i progressi della conoscenza. Non è questa però una buona ragione per aspettare fintantoché la possibilità di tali trasformazioni appaia esclusa.

Se è compito della filosofia spezzare il dominio della parola sullo spirito umano svelando gli inganni che, nell'ambito delle relazioni concettuali, traggono origine, spesso quasi inevitabilmente, dall'uso della lingua e liberare cosí il pensiero da quanto di difettoso gli proviene soltanto dalla natura dei mezzi linguistici di espressione, ebbene, la mia ideografia, ulteriormente perfezionata a questo scopo, potrà diventare per i filosofi un utile strumento. Certamente neppure essa rende con fedeltà il pensiero, come del resto non è forse possibile ad alcun mezzo esteriore di presentazione; ma, da un lato, queste divergenze si possono limitare all'inevitabile e all'innocuo, dall'altro, già il fatto che esse siano di tutt'altro tipo da quelle proprie della lingua, fornisce una

protezione da un'influenza unilaterale da parte di uno di questi mezzi espressivi.

La stessa scoperta di questa ideografia è già stata utile — mi sembra — alla logica. Io spero che i logici, se non si lasceranno sgomentare dalla prima impressione di stranezza, non mancheranno di dare il loro consenso alle innovazioni cui sono stato spinto da una necessità che è inerente alla materia stessa. Queste divergenze dall'uso tradizionale trovano la loro giustificazione nel fatto che finora la logica è stata sempre troppo strettamente connessa alla lingua e alla grammatica. Io credo, in particolare, che a lungo andare la sostituzione dei concetti *soggetto* e *predicato* con gli altri *argomento* e *funzione*, farà buona prova. Si riconosce facilmente come l'interpretazione di un contenuto quale funzione di un argomento, sia concettualmente feconda. Dovrebbe inoltre meritare considerazione l'analisi del modo come si connettono uno all'altro i significati delle parole: se, e, non, o, esiste, alcuni, tutti, eccetera.

In particolare menzioniamo solo questo: la limitazione, esposta nel paragrafo 6, a un unico modo di deduzione, viene giustificata dal fatto che nella *fondazione* di una tale ideografia gli elementi primitivi debbono venir scelti quanto piú è possibile semplici, se si vogliono ottenere ordine e perspicuità. Questo non esclude che *in seguito* certi passaggi da piú giudizi a un nuovo giudizio, i quali — sulla base di quell'unico modo di deduzione — risultano possibili solo mediatamente, vengano trasformati, per abbreviazione, in passaggi immediati. In effetti ciò potrebbe raccomandarsi in una applicazione successiva. Col che si originerebbero allora altri modi di deduzione.[1]

Solo in un secondo tempo ho osservato che le formule (31) e (41) possono venir riunite nell'unica formula

$$\vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- (\top\!\!\!\top\, a \equiv a)$$

[1] [Nel primo volume dei *Principi* (p. 26) Frege afferma, a proposito della regola di separazione: "Questa è l'unica regola inferenziale che ho usato nella mia *Ideografia* ed essa può anche essere sufficiente da sola; anzi, dal punto di vista della concisione scientifica, sarebbe auspicabile limitarsi a essa; contro questa limitazione, però, si elevano ragioni pratiche alle quali sono qui costretto a concedere qualcosa, dal momento che voglio formare delle lunghe catene deduttive. Se infatti non volessi ammettere qualche altra regola inferenziale — cosa che del resto avevo già prospettato nella prefazione a quella mia piccola opera — ne risulterebbe una notevole prolissità."]

per mezzo della quale divengono possibili alcune altre semplificazioni.

L'aritmetica, come ho osservato all'inizio, è stato il punto di partenza del processo concettuale che mi ha condotto alla mia ideografia. Penso pertanto di applicarla in primo luogo proprio a questa scienza, cercando di analizzare ulteriormente i concetti dell'aritmetica, e di trovare una base piú profonda alle sue proposizioni. Per ora ho dato notizia, nel terzo capitolo, di qualche passo che sto compiendo in questa direzione. L'ulteriore prosecuzione del cammino indicato, l'illuminazione dei concetti di numero, di grandezza, ecc., debbono formare oggetto di successive ricerche che presenterò immediatamente dopo questo libro.

Jena, 18 dicembre 1878

1.

Spiegazione dei segni

1. Lettere e altri segni I segni usati nella teoria generale delle grandezze si dividono in due tipi. Il primo tipo comprende le lettere, ognuna delle quali rappresenta o un numero lasciato indeterminato o una funzione lasciata indeterminata. Questa indeterminatezza fa sí che si possano impiegare le lettere per esprimere la validità generale di proposizioni, come ad esempio in

$$(a+b)c = ac + bc\,.$$

L'altro tipo comprende segni come $+$, $-$, $\sqrt{\ }$, 0, 1, 2, ognuno dei quali ha un significato suo proprio.

Assumo questo pensiero fondamentale, della distinzione di due tipi di segni, che purtroppo nella teoria delle grandezze non è applicato correttamente,[1] *per utilizzarlo in generale nel dominio piú esteso del pensiero puro.* Suddivido perciò tutti i segni che uso in *segni con i quali si possono rappresentare entità diverse* e *segni che hanno un senso completamente determinato.* I primi sono le *lettere* e queste debbono servire fondamentalmente a esprimere la *generalità.* Malgrado la completa indeterminatezza, va stabilito a questo proposito che una lettera, in uno stesso contesto, mantiene immutato il significato che le è stato assegnato inizialmente.

Il giudizio

2. Giudicabilità di un contenuto. Segno di contenuto, segno di giudizio Un giudizio verrà sempre espresso per mezzo del segno

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-$$

[1] Si pensi a 1, log, sin, lim.

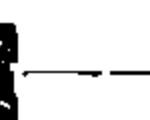
posto alla sinistra del segno o del complesso di segni che denotano il contenuto del giudizio stesso. Se si *omette* il piccolo tratto verticale all'estremo sinistro del tratto orizzontale, questa omissione trasformerà il giudizio in un *puro e semplice collegamento rappresentativo*, del quale chi scrive non esprime se ne riconosca o meno la verità. Se, per esempio,

$$\vdash\!\!-\!\!-\, A$$ [1]

significa il giudizio: "poli magnetici di nome opposto si attraggono", allora

$$-\!\!-\, A$$

non esprimerà questo giudizio, ma richiamerà al lettore semplicemente la rappresentazione dell'attrarsi reciproco di due poli magnetici di nome opposto, eventualmente per trarne conseguenze in base alle quali esaminare l'esattezza del pensiero. In questo caso noi ci *esprimiamo per parafrasi*, con le parole "*la circostanza, che*", oppure "*la proposizione, che*".

Non tutti i contenuti si possono far diventare giudizi facendoli precedere dal segno $\vdash\!\!-\!\!-$: per esempio questo non succede per la rappresentazione "casa". Distinguiamo quindi i contenuti in *giudicabili* e *non giudicabili*.[2]

Il tratto orizzontale, che figura nel segno $\vdash\!\!-\!\!-$, *collega i segni che lo seguono in un tutto, e a questo tutto si riferisce l'affermazione che è espressa dal tratto verticale posto all'estremo sinistro del tratto orizzontale.* Il tratto orizzontale e il tratto verticale possono venir rispettivamente chiamati *segno di contenuto* [3] e *segno di giudizio.* Il segno di contenuto serve del resto a porre in relazione dei segni qualsiasi con la totalità dei segni che lo seguono. *Ciò che segue il segno di contenuto deve sempre avere un contenuto giudicabile.*

[1] Mi servo delle lettere greche maiuscole come abbreviazione; a esse il lettore può assegnare un senso adeguato, se io non lo spiego in modo particolare.

[2] Al contrario, la circostanza che esistono case (o una casa) (cfr. § 12), sarebbe un contenuto giudicabile. Ma la rappresentazione "casa" è solo una parte di questo contenuto. Nella proposizione "La casa di Priamo era di legno", non si potrebbe sostituire "circostanza che esiste una casa" in luogo di "casa". Si veda un esempio di altro tipo per un contenuto non giudicabile, nella formula 81.

[3] [Nei *Princípi* Frege lo chiama semplicemente "segno orizzontale" (*Wagerechte*) e afferma al proposito (vol. 1, p. 9, n. 2): "Prima lo chiamavo 'segno di contenuto', quando ancora comprendevo nell'espressione 'contenuto giudicabile' ciò che ora ho imparato a distinguere in pensiero e valore di verità..."]

3. SOGGETTO E PREDICATO. CONTENUTO CONCETTUALE Nella mia presentazione di un giudizio, *non trova posto* una distinzione fra *soggetto* e *predicato*. Per giustificare questo fatto, osservo che i contenuti di due giudizi possono differire fra loro in due modi diversi: il primo modo si ha quando le conseguenze che possono trarsi dall'uno in collegamento con determinati altri, seguono sempre anche dal secondo in collegamento con gli stessi giudizi; il secondo modo si ha quando ciò non accade. Le due proposizioni: "A Platea i Greci sconfissero i Persiani" e "A Platea i Persiani vennero sconfitti dai Greci" si differenziano nel primo modo. Sebbene si possa riconoscere anche qui una leggera differenza di senso, purtuttavia la concordanza è prevalente. Orbene, io chiamo *contenuto concettuale* quella parte del contenuto che è *la stessa* in entrambe le proposizioni. Poiché *solo questa* ha importanza per l'ideografia, tale ideografia non ha bisogno di fare alcuna distinzione fra proposizioni che abbiano lo stesso contenuto concettuale. Se si dice: "Soggetto è il concetto di cui tratta il giudizio", ebbene, questo si adatta anche all'oggetto. Si può, quindi, dire soltanto: "Soggetto è il concetto di cui il giudizio tratta principalmente." Il posto del soggetto nella successione delle parole ha linguisticamente il significato di un posto *privilegiato*, nel quale si pone ciò su cui si vuol far convergere l'attenzione di chi ascolta (si veda anche § 9). Il far questo può ad esempio avere lo scopo di sottolineare una relazione del giudizio considerato con altri giudizi e di facilitare in tal modo a chi ascolta la comprensione dell'intera connessione. Ora, tutte le sfumature della lingua che scaturiscono soltanto dall'influenza reciproca di chi parla e di chi ascolta, in quanto chi parla tiene per esempio conto delle aspettative di chi ascolta e già prima di pronunciare una frase tenta di indirizzare tali aspettative sulla giusta traccia, non trovano alcunché di corrispondente nel mio linguaggio in formule, perché entro il giudizio viene preso in considerazione soltanto ciò che ha influenza sulle *possibili conseguenze*. Tutto ciò che è necessario per una deduzione esatta è espresso con completezza; ciò invece, che non è necessario, non viene per lo piú neppure indicato; *niente è lasciato da indovinare*. In questo seguo del tutto l'esempio del linguaggio in formule della matematica, ove solo con molto sforzo possiamo distinguere soggetto e predicato. Si

può immaginare una lingua nella quale la proposizione: "Archimede morí nella conquista di Siracusa" venga espressa come segue: "La morte violenta di Archimede nella conquista di Siracusa è un fatto." Anche qui si può, volendolo, distinguere soggetto e predicato, ma il soggetto comprende l'intero contenuto e il predicato ha il solo scopo di presentarlo come un giudizio. *Una lingua siffatta avrebbe un unico predicato per tutti i giudizi, precisamente "è un fatto".* Si vede che qui non si può parlare di soggetto e predicato nell'accezione comune di queste parole. *La nostra ideografia è una lingua di questo tipo e il segno* ⊢— *è il suo predicato comune per tutti i giudizi.*

Nel primo abbozzo di un linguaggio in formule mi lasciai tentare dall'esempio della lingua corrente a comporre i giudizi partendo dal soggetto e dal predicato. Ben presto però mi sono convinto che questo era di ostacolo al mio scopo particolare e conduceva soltanto a inutili prolissità.[1]

4. GIUDIZI: GENERALI, PARTICOLARI; CATEGORICI, IPOTETICI, DISGIUNTIVI; APODITTICI, ASSERTORI, PROBLEMATICI Le osservazioni che seguono chiariranno per i nostri scopi il significato delle distinzioni che sogliono farsi riguardo ai giudizi.

Si distinguono *giudizi generali* e *giudizi particolari*: questa propriamente non è una distinzione dei giudizi, bensí dei contenuti. *Si dovrebbe dire*: "*Un giudizio di contenuto generale*", "*Un giudizio di contenuto particolare.*" Queste proprietà, infatti, spettano al contenuto anche se esso *non* è presentato come giudizio ma come proposizione (si veda § 2).

Lo stesso vale per la negazione. In una dimostrazione indiretta si dice, per esempio: "Posto che i segmenti AB e CD non siano uguali". Qui il contenuto — che i due segmenti AB e CD non siano uguali — contiene una negazione, ma questo contenuto, pur essendo suscettibile di giudizio, non viene presentato come giudizio. La negazione quindi è connessa al contenuto, non importa se questo compaia come giudizio

[1] [Per quanto riguarda l'esigenza di separare rigorosamente la logica dalla grammatica e dalla psicologia — esigenza messa in rilievo nelle pagine precedenti e che rappresenterà uno dei motivi fondamentali del pensiero freghiano — si vedano in particolare: la premessa e i primi tre capitoli de *I fondamenti dell'aritmetica* (nella parte seconda del presente volume) e la recensione di Frege all'opera *Filosofia dell'aritmetica* di Husserl (parte terza); si confrontino inoltre, nella parte quinta, i passi scelti dalla prefazione dei *Principi*.]

oppure no. Ritengo quindi piú appropriato riguardare la negazione come una nota caratteristica di un *contenuto giudicabile.*

La distinzione dei giudizi in categorici, ipotetici e disgiuntivi mi sembra avere solo un significato grammaticale.[1]

Il giudizio apodittico si differenzia dal giudizio assertorio per il fatto che in esso viene indicata l'esistenza di giudizi generali dai quali la proposizione può essere dedotta, mentre nel giudizio assertorio una tale indicazione manca. Se io denoto una proposizione come necessaria, accenno con ciò ai motivi su cui fondo il giudizio. *Poiché però da un tal modo di procedere non viene toccato il contenuto concettuale del giudizio, la forma del giudizio apodittico non ha per noi alcun significato.*

Se una proposizione viene presentata come possibile, allora chi la presenta o si astiene dall'emettere un giudizio su di essa, accennando al fatto che non gli è nota alcuna legge da cui dedurne la negazione, oppure afferma che la negazione della proposizione è, nella sua generalità, falsa. Nell'ultimo caso, abbiamo, secondo la denominazione usuale, un *giudizio particolare affermativo* (cfr. § 12). "È possibile che la terra entri un giorno in collisione con un altro corpo celeste" costituisce un esempio per il primo caso, e invece "Un raffreddore può avere come conseguenza la morte" costituisce un esempio per il secondo.

La condizionalità

5. SE. SEGNO DI CONDIZIONE Se A e B significano contenuti giudicabili (cfr. § 2), esistono le seguenti quattro possibilità:

1) A viene affermato e B viene affermato;
2) A viene affermato e B viene negato;
3) A viene negato e B viene affermato;
4) A viene negato e B viene negato.

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \!\!-\!\!-\!\!-\, A \\ \lfloor\!-\!-\, B \end{array}$$

significa allora il giudizio che *non ha luogo la terza di queste possibilità,*

[1] La ragione di ciò scaturirà dall'intero scritto.

ma una delle tre rimanenti.[1] Se il contenuto

──┬── A
  └── B

viene negato, si afferma di conseguenza che ha luogo la terza possibilità, ossia che A viene negato e B affermato.

Dai casi nei quali

──┬── A
  └── B

viene affermato, rileviamo i seguenti:

1) A deve comunque venire affermato. In tal caso il contenuto di B è del tutto indifferente. Supponiamo per esempio che ├── A significhi: $3 \times 7 = 21$, e B significhi la circostanza che il sole splende. Allora sono possibili i primi due dei quattro casi su nominati. Non è necessario che fra i due contenuti sussista una connessione causale.

2) B deve venir negato. Allora il contenuto di A è indifferente. Se per esempio B significa la circostanza che è possibile un "perpetuum mobile" e A la circostanza che il mondo è infinito, sono ora possibili solo il secondo e l'ultimo dei quattro casi. Non occorre sussista fra A e B una connessione causale.

3) Si può pronunciare il giudizio

├─┬── A
  └── B

senza sapere se A e B vadano negati o affermati. Ad esempio, B significhi la circostanza che la luna è in quadratura, A la circostanza che essa appare come un semicerchio. In questo caso ├─┬── A / └── B si può tradurre servendosi del connettivo "se": "Se la luna è in quadratura allora appare come un semicerchio." La connessione causale, che è contenuta nella parola "se", non viene però espressa dai nostri segni, malgrado che un giudizio di questo tipo possa venir pronunciato solo in base a una tale connessione. Essa infatti è qualcosa di generale, che però a questo punto non viene ancora espressa (cfr. § 12).

[1] [Il segno ─┬─└─ interpreta cioè sostanzialmente la relazione di implicazione materiale (nel simbolismo da noi adottato: $\rightarrow$), per la quale Frege dà le stesse determinazioni di Filone il Megarico.]

Il tratto verticale, che collega i due tratti orizzontali, si chiama *segno di condizione*. La parte del tratto orizzontale superiore che si trova a sinistra del segno di condizione, è il segno di contenuto per il significato, or ora spiegato, del collegamento di segni

```
───┬── A
   └── B ;
```

a essa va applicato ogni segno che debba riguardare l'intero contenuto dell'espressione. Il tratto orizzontale a sinistra di B è il segno di contenuto di B.

Dopo quanto è stato detto è facile riconoscere che il giudizio

```
├──┬──┬── A
   │  └── B
   └───── Γ
```

nega il caso in cui A venga negato, B e Γ affermati. Si deve pensarlo composto da

```
──┬── A        e     Γ
  └── B
```

proprio come

```
──┬── A
  └── B
```

va pensato composta da A e B. Dapprima abbiamo quindi la negazione del caso in cui

```
──┬── A
  └── B
```

venga negato e Γ affermato. La negazione di

```
──┬── A
  └── B
```

significa però che A viene negato e B affermato. Da questo risulta quanto abbiamo anticipato sopra. Se esiste una connessione causale, si può anche dire: "A è la conseguenza necessaria di B e Γ"; oppure: "Se si presentano le circostanze B e Γ, allora si presenta anche A."

Altrettanto facilmente si riconosce che il giudizio

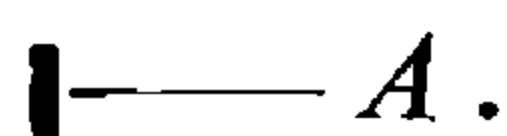
$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\, \Gamma \\ \quad \llcorner\!\!\top\!\!-\, A \\ \qquad \llcorner\!\!-\, B \end{array}$$

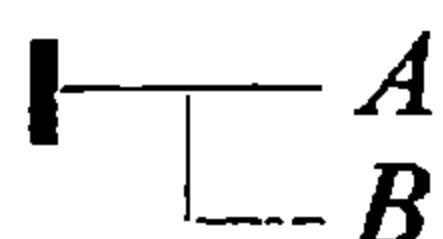
nega il caso in cui B venga affermato, ma A e Γ negati. Se si suppone una connessione causale fra A e B, si può tradurre: "Se A è la conseguenza necessaria di B, allora si può concludere che ha luogo Γ."[1]

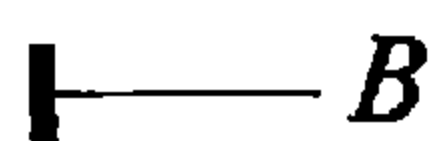
6. La deduzione. I modi di deduzione aristotelici Dalla spiegazione data al paragrafo 5, risulta che dai due giudizi

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\, A \\ \quad \llcorner\!\!-\, B \end{array} \quad \text{e} \quad \vdash\!\!\!-\!\!\!-\, B$$

segue il nuovo giudizio

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\, A\,.$$

Dei quattro casi sopra enumerati, il terzo è escluso da

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\, A \\ \quad \llcorner\!\!-\, B \end{array}$$

ma anche il secondo ed il quarto da

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\, B$$

sicché rimane possibile solo il primo.[2]

[1] [La formula in questione, nel nostro simbolismo, assume la forma seguente:

$$(B \to A) \to \Gamma. \tag{a}$$

Per "venga affermato", rispettivamente "negato", intendiamo l'attribuzione del valore di verità "1" (vero), rispettivamente "0" (falso). Allora, stando alla spiegazione che ne dà Frege, la terna di valori $B=1$, $A=0$, $\Gamma=0$, dovrebbe falsificare la (a), mentre una semplice sostituzione ci convince che la terna ordinata (1, 0, 0) è modello per la (a). Infatti

$$\begin{array}{c} (1 \to 0) \to 0 \\ 0 \quad \to 0\,. \\ 1 \end{array}$$

Già Schröder, a pagina 88 della sua recensione alla *Ideografia*, Z. Math. Phys., vol. 25 (1880), aveva rilevato che la conclusione che Frege trae riguardo a questa formula è errata. Frege stesso fa poi presente l'errore nella sua corrispondenza con Russell e con Jourdain; in ognuna di queste comunicazioni osserva però, nel contempo, come si tratti di errore strettamente localizzato alla formula in questione, e quindi senza conseguenza alcuna sulle successive argomentazioni.]

[2] [Cfr. p. 107, n. 1].

Si potrebbe scrivere questa deduzione all'incirca cosí:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\, A \\ \quad\;\llcorner\!-\, B \\ \vdash\!\!-\!\!-\, B \\ \hline \vdash\!\!-\!\!-\, A\,. \end{array}$$

Una tale scrittura diventerebbe complicata se in luogo di A e B ci fossero espressioni lunghe, perché ognuna di esse dovrebbe venir scritta due volte. Perciò faccio uso della seguente abbreviazione. Ogni giudizio che ricorre nella concatenazione di un procedimento dimostrativo, sarà denotato con un numero che gli verrà posto vicino, a destra, là dove questo giudizio ricorre la prima volta. Ad esempio, sia stato denotato con X il giudizio

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\, A \\ \quad\;\llcorner\!-\, B \end{array}$$

— o un giudizio che lo contenga come caso particolare. Allora scrivo come segue la precedente deduzione:

$$(\mathrm{X}):\ \begin{array}{l} \vdash\!\!-\!\!-\, B \\ \hline \vdash\!\!-\!\!-\, A \end{array}$$

Lasciamo che il lettore componga, a partire da $\vdash\!\!-\!\!-\, B$ e $\vdash\!\!-\!\!-\, A$ il giudizio

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\, A \\ \quad\;\llcorner\!-\, B \end{array}$$

e veda se esso concorda col giudizio X citato.

Se ad esempio il giudizio $\vdash\!\!-\!\!-\, B$ è denotato con XX, allora scrivo come segue la stessa deduzione:

$$(\mathrm{XX})::\ \begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\, A \\ \quad\;\llcorner\!-\, B \\ \hline \vdash\!\!-\!\!-\, A \end{array}$$

In essa i due punti ripetuti stanno a indicare che il giudizio $\vdash\!\!-\!\!-\, B$ indicato soltanto con XX, deve venir formato, a partire dai due giudizi scritti, in modo diverso da quello piú sopra seguíto.[1]

[1] [Vale la pena di ripetere, per chiarezza, il significato da attribuirsi alle abbreviazioni introdotte da Frege. Supponiamo che Y denoti un determinato giudizio. Allora:

Ancora, se il giudizio $\vdash\!\!-\!\!-\, \Gamma$ fosse stato denotato con XXX, allora scriverei entrambi i giudizi

$$
\begin{array}{rl}
 & \vdash\!\!\top\!\!\!\top\!\!-\!\!-\, A \\
 & \quad\ \ \ \llcorner\!\!-\, B \\
 & \quad\ \llcorner\!\!-\!\!-\, \Gamma \\
(\mathrm{XXX})::\ & \overline{\hphantom{\vdash\top\top---A}} \\
 & \vdash\!\!\top\!\!-\, A \\
 & \quad\ \llcorner\!\!-\, B \\
(\mathrm{XX})::\ & \overline{\hphantom{\vdash\top\top---A}} \\
 & \vdash\!\!-\!\!-\, A
\end{array}
$$

ancor piú brevemente cosí:

$$
\begin{array}{rl}
 & \vdash\!\!\top\!\!\!\top\!\!-\!\!-\, A \\
 & \quad\ \ \ \llcorner\!\!-\, B \\
 & \quad\ \llcorner\!\!-\!\!-\, \Gamma \\
(\mathrm{XX},\ \mathrm{XXX})::\ & \overline{\hphantom{\vdash\top\top---A}} \\
 & \vdash\!\!-\!\!-\, A
\end{array}
$$

In logica, da Aristotele in poi, si conta una intera serie di modi di deduzione; io mi servo del solo modo ora delineato — per lo meno in tutti i casi nei quali da piú di un solo giudizio ne viene dedotto uno nuovo. In effetti la verità contenuta in un altro modo di deduzione, può venir espressa in un giudizio della forma seguente: se M vale, e se N vale, anche Λ vale, ossia in simboli:

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\!\top\!\!\!\top\!\!-\!\!-\, \Lambda \\
\quad\ \ \ \llcorner\!\!-\, M \\
\quad\ \llcorner\!\!-\!\!-\, N\,.
\end{array}
$$

Da questo giudizio e da $\vdash\!\!-\!\!-\, N$ e da $\vdash\!\!-\!\!-\, M$, segue allora $\vdash\!\!-\!\!-\, \Lambda$, come sopra. In questo modo può essere ricondotta al nostro caso una conclusione ottenuta secondo un qualunque modo di deduzione. Di con-

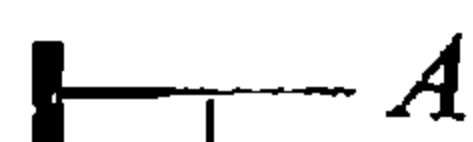
a) se (Y) è seguito da due punti il giudizio denotato da Y afferma un condizionale che — pur senza figurarvi esplicitamente — funge da premessa nell'inferenza;
b) se (Y) è seguito da due punti ripetuti, il giudizio denotato con Y afferma soltanto la premessa del condizionale esplicitamente impiegato nell'inferenza.

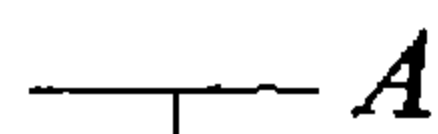
Quanto ora detto ci permette ovviamente di risalire da un determinato schema inferenziale all'esplicitazione dei giudizi in esso soltanto denotati mediante il loro numero distintivo. Si avrebbero allora i due casi seguenti:
a') se alla destra di (Y) si trovano i due punti, il giudizio denotato con Y si ottiene subordinando condizionalmente i giudizi che figurano esplicitamente nello schema inferenziale, e ponendo a premessa del condizionale il giudizio superiore dello schema;
b') viceversa, se alla destra di (Y) si trovano due punti ripetuti, Y denota il giudizio posto a premessa del condizionale che figura nella parte superiore dell'inferenza.]

seguenza, dal momento che è possibile limitarsi a un unico modo di deduzione, il farlo diventa un obbligo per la chiarezza.[1] Si aggiunga a questo il fatto che, d'altra parte, non vi sarebbe neppure alcuna ragione di arrestarsi ai modi di deduzione di Aristotele, ma, in caso di indeterminatezza, se ne potrebbero assumere sempre di nuovi: da ogni giudizio espresso in una formula, nei paragrafi dal 13 al 22, si potrebbe costruire un modo particolare di deduzione. *Con questa limitazione a un unico modo di deduzione, non deve tuttavia per nessuna ragione venire espressa una proposizione psicologica, ma deve soltanto venir decisa una questione di forma in vista della massima conformità allo scopo.* Alcuni dei giudizi che figurano in luogo dei modi di deduzione aristotelici verranno introdotti nel paragrafo 22 ai numeri 59, 62, 65.

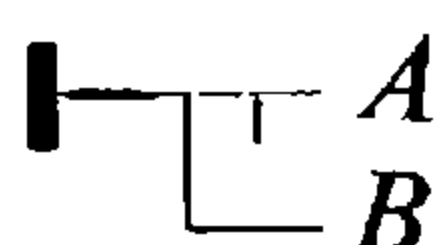
La negazione

7. Segno di negazione O, o ... o, e, ma e non, né ... né ... Se nella parte inferiore nel segno di contenuto si applica un piccolo tratto verticale, con ciò si vuole esprimere la circostanza *che il contenuto non ha luogo.* Cosí, ad esempio,

$$\vdash\!\!\top\!\!-\, A$$

significa: "*A* non ha luogo." Chiamo questo piccolo tratto verticale il *segno di negazione.*[2] La parte del tratto orizzontale che si trova a destra del segno di negazione è il segno di contenuto di *A*, mentre al contrario quella che si trova a sinistra è il segno di contenuto della negazione di *A*. Anche qui, come dappertutto nella ideografia, se manca il segno di giudizio non si esprime un giudizio. Cosí il segno

$$-\!\!\top\!\!-\, A$$

invita soltanto a formarsi la rappresentazione che *A* non ha luogo, senza esprimere se questa rappresentazione sia vera.

Prendiamo ora in considerazione alcuni casi nei quali i segni della condizionalità e della negazione sono fra loro collegati. Il giudizio

$$\vdash\!\!\!\begin{array}{l}\top\!\!-\, A\\ \llcorner\!\!-\, B\end{array}$$

[1] [Cfr. p. 107, n. 1.]

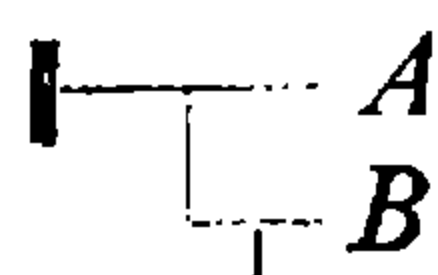
[2] [Noi esprimeremo la stessa determinazione col segno $\neg$.]

significa: "Non ha luogo il caso in cui si deve affermare *B* e negare la negazione di *A*"; in altre parole: "Non sussiste la possibilità di affermare entrambi *A* e *B*"; ossia "*A* e *B* si escludono a vicenda." Rimangono quindi soltanto i tre casi seguenti:

A viene affermato e *B* viene negato;
A viene negato e *B* viene affermato;
A viene negato e *B* viene negato.

Dopo quanto già detto è facile stabilire quale significato abbia ognuna delle tre parti del tratto orizzontale che precede *A*.[1]

Il giudizio

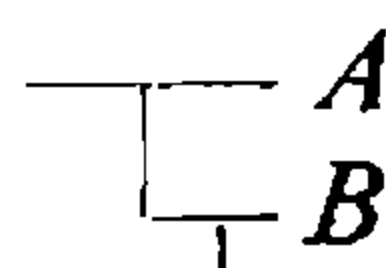
```
|—┬—— A
  └┬— B
```

significa: "Non sussiste il caso in cui *A* viene negato e la negazione di *B* affermata"; oppure: "*A* e *B* non possono entrambi venir negati." Rimangono soltanto le tre seguenti possibilità:

A viene affermato e *B* viene affermato;
A viene affermato e *B* viene negato;
A viene negato e *B* viene affermato.[2]

A e *B* esauriscono assieme l'intera possibilità. Notiamo ora che le parole "o" e "o ... o", vengono usate in due modi diversi:

"*A* o *B*"

ha in un primo caso l'identico significato di

```
——┬—— A
  └┬— B
```

cosicché nulla è pensabile all'infuori di *A* e *B*. Per esempio: se una massa gassosa viene riscaldata, allora aumenta il suo volume o la sua pres-

[1] [È evidente che la formula ⊢┬ q / ┬ p traduce l'uso linguistico dell' "o" incompatibile, che è qui reso come uguale per definizione a $p \rightarrow \neg q$.]

[2] [Ossia la ⊢┬ q / ┬ p traduce l'uso linguistico dell' "o" alternativo, che non esclude cioè la verità di entrambi gli enunciati alternati, ma solo la loro contemporanea falsità. Corrisponde, come noto, al "vel" latino, ed è il significato del connettivo "o" di gran lunga più interessante in logica. Frege lo rende qui mediante la definizione $p \vee q \underset{Df}{=} \neg p \rightarrow q$.]

sione. In un secondo caso l'espressione

"*A* o *B*"

riunisce in sé i due significati di

```
──┬┬─ A
  └── B
```

e di

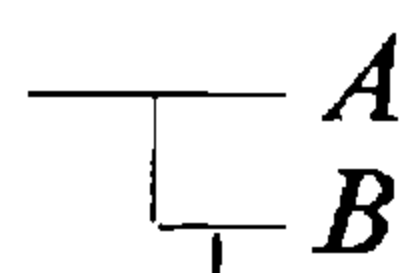
```
──┬── A
  └┬─ B
```

, cosicché in primo luogo non è possibile una terza evenienza all'infuori di *A* e *B*, e in secondo luogo *A* e *B* si escludono. Delle quattro possibilità rimangono allora solo le due seguenti:

A viene affermato e *B* viene negato;

A viene negato e *B* viene affermato.[1]

Dei due modi di usare l'espressione "*A* o *B*", quello piú importante è il primo, col quale non si esclude che *A* e *B* sussistano contemporaneamente, e *noi useremo il termine "o" in questo significato.* È forse opportuno esplicitare la distinzione fra "o" e "o ... o": solo quest'ultimo ha il significato aggiuntivo della reciproca esclusione. Si può dunque tradurre

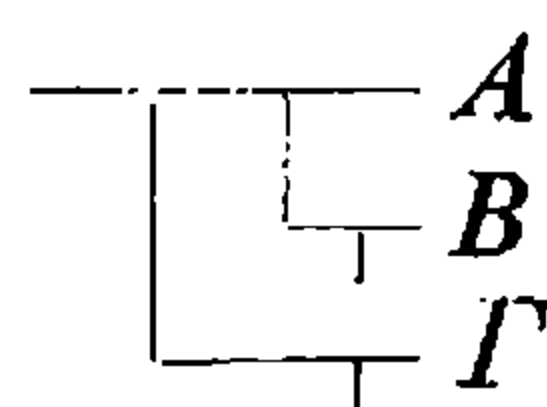
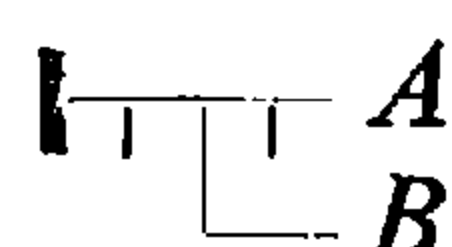
```
──┬── A
  └┬─ B
```

con "*A* o *B*". Allo stesso modo

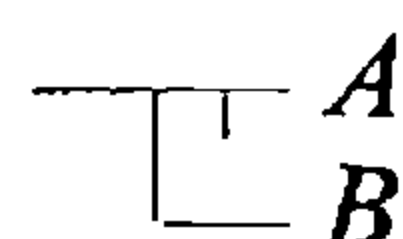
```
──┬──┬── A
  │  └┬─ B
  └──┬── Γ
```

significa "*A* o *B* o *Γ*".

```
├┬┬┬── A
   └── B
```

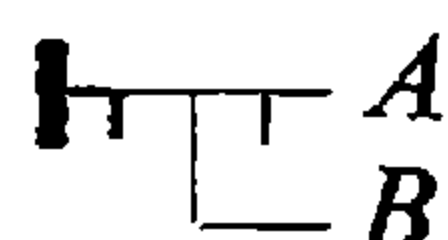
significa: "

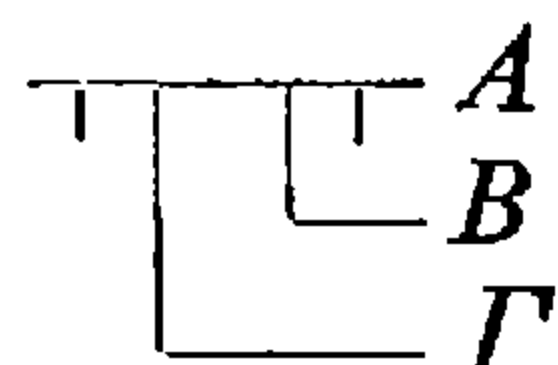
```
──┬┬─ A
  └── B
```

viene negato", oppure "Si presenta il caso nel quale *A* e *B* vengono entrambi affermati." Le tre possibilità che

```
──┬┬─ A
  └── B
```

lasciava sussistere, sono in questo caso escluse. Di conseguenza si può

[1] [Viene cosí caratterizzato, come congiunzione dell' "o" alternativo e dell' "o" incompatibile, l'uso linguistico dell' "o" esclusivo, corrispondente all' "aut" latino. Viene introdotto come uguale per definizione a $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q))$, che si dimostra facilmente essere equivalente a $(p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$.]

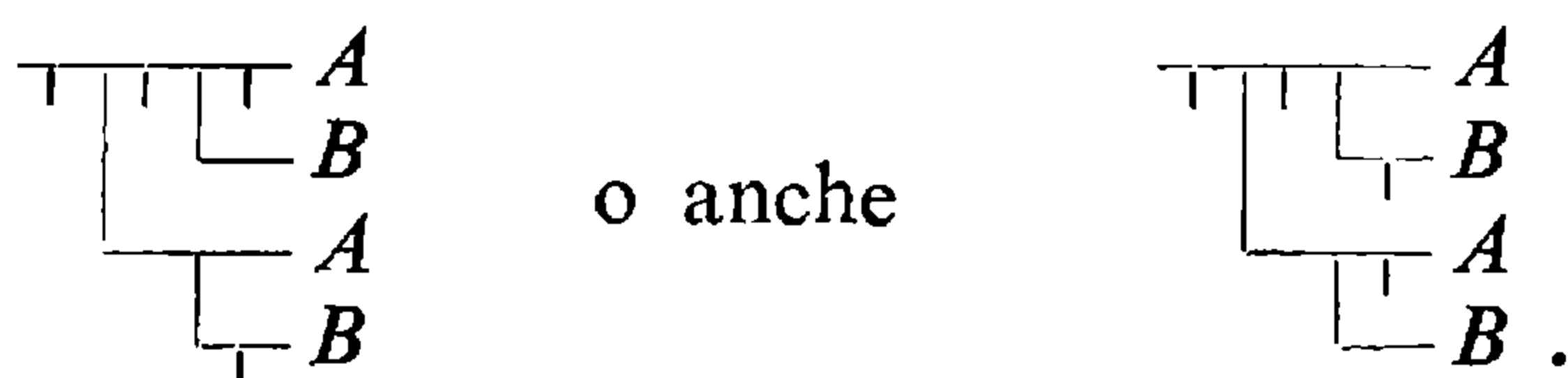
tradurre

```
├┬┬─ A
   └── B
```

con “A e B sono entrambi dei fatti.” Si vede anche facilmente che

```
─┬┬──┬─ A
  │  └── B
  └───── Γ
```

può essere reso con “A e B e Γ”. Se si vuol rappresentare in simboli “o A o B” col significato aggiuntivo della mutua esclusione fra essi, si deve esprimere “

```
──┬─ A        ──── A
  └── B         └┬─ B
```

”. Questo dà

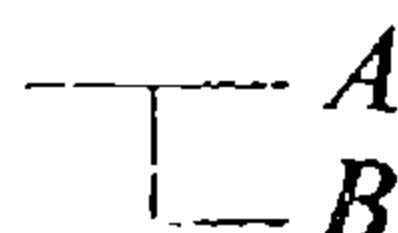
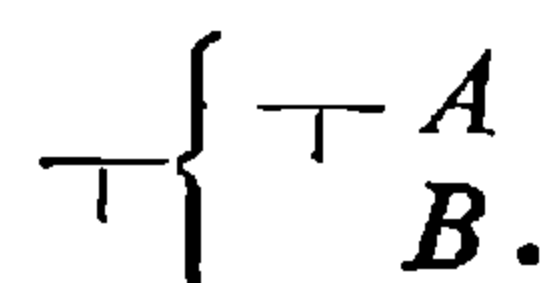
```
─┬┬┬┬─ A                 ─┬┬┬──── A
 │ └── B                  │  └┬─ B
 └─┬── A      o anche     └──┬─ A
   └┬─ B .                   └── B .
```

Invece di esprimere l’“e”, come qui succede, mediante i segni della condizionalità e della negazione,[1] si potrebbe anche, viceversa, esprimere la condizionalità per mezzo di un segno per “e” e del segno di negazione. Si potrebbe per esempio introdurre il segno

```
{ Γ
{ Δ
```

come segno per il contenuto complessivo di Γ e $\varDelta$ e rendere quindi

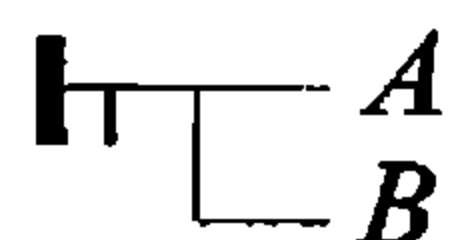
```
──┬── A
  └── B
```

mediante

```
─┬─{ ─┬─ A
   {     B .
```

Ho scelto l’altro modo di espressione perché con esso mi sembra che la deduzione venga espressa in modo piú semplice. La differenza fra “e” e “ma” è di tipo tale da non venire espresso in questa ideografia. Chi parla usa la particella “ma” se vuole avvertire che quanto egli

[1] [Ossia Frege introduce il connettivo “e” mediante la seguente definizione: $p \wedge q \underset{Df}{=} \neg(p \rightarrow \neg q)$.]

dirà è diverso da ciò che a primo acchito ci si potrebbe aspettare. Il giudizio

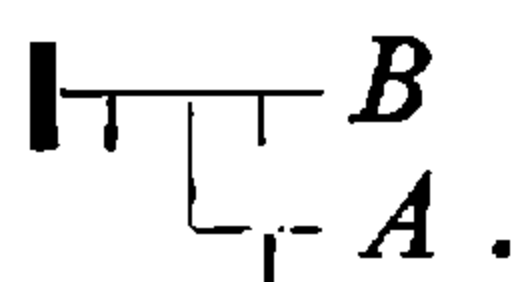
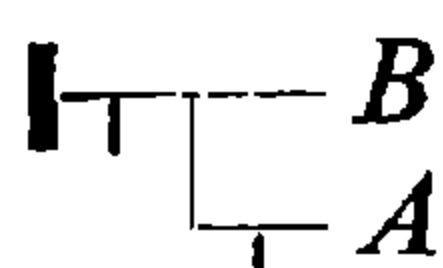
```
├┬─┬── A
   └── B
```

significa: "Delle quattro possibilità ha luogo la terza, ossia quella per cui *A* viene negato e *B* affermato." Di conseguenza lo si può tradurre cosí:

"Ha luogo *B* e (ma) non *A*."

Allo stesso modo può tradursi il complesso segnico

```
├┬─┬─┬── B
     └┬─ A .
```

Il giudizio

```
├┬─┬─── B
     └┬─ A
```

significa: "Si presenta il caso in cui *A* e *B* risultano entrambi negati"; il che può quindi essere tradotto con:

"Né *A* né *B* sono dei fatti."

È di per sé evidente che le parole "o", "e", "né ... né", vengono qui prese in considerazione solo quando colleghino contenuti *giudicabili.*

L'uguaglianza di contenuto

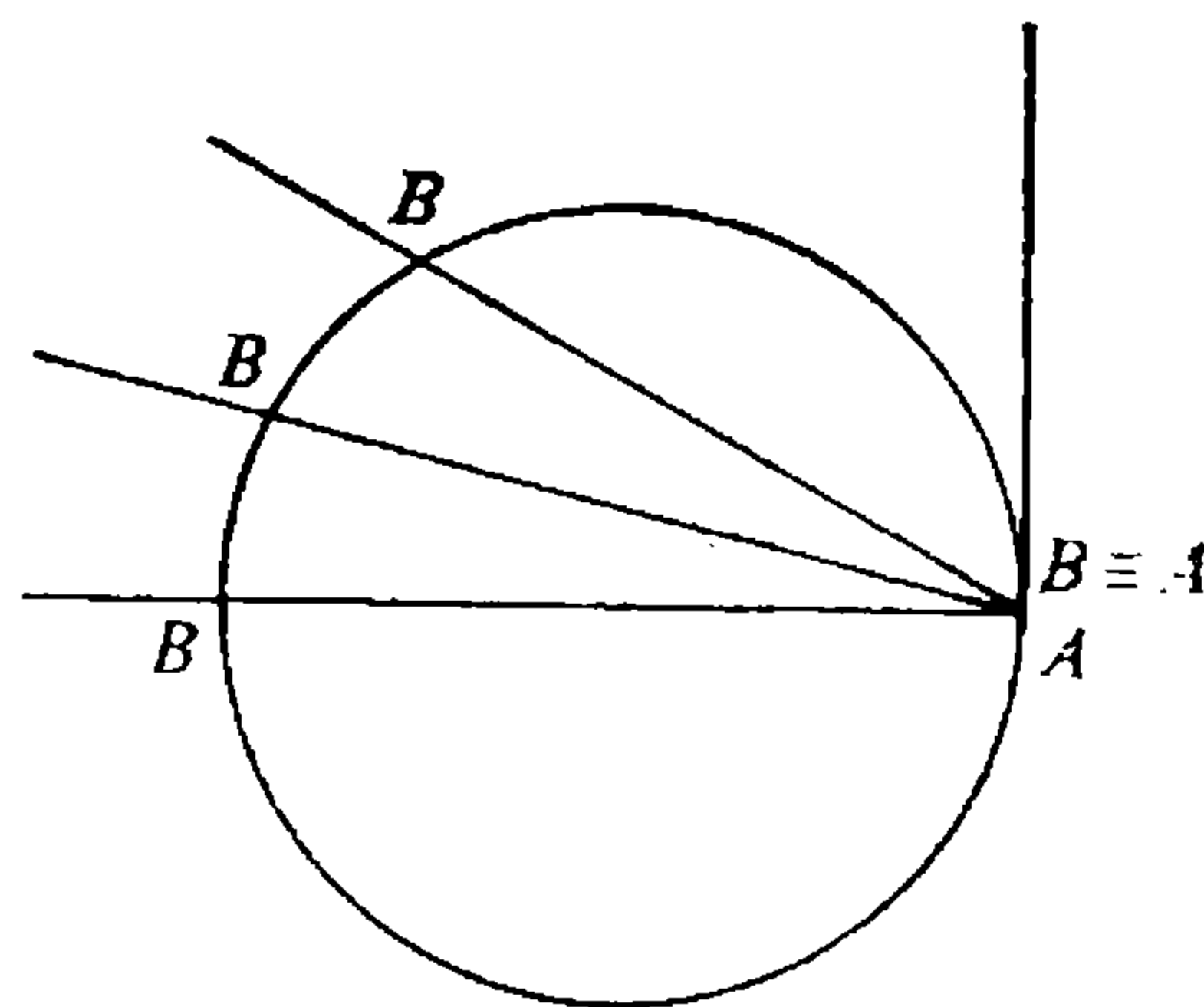
8. Necessità di un segno per l'uguaglianza di contenuto, introduzione di tale segno L'uguaglianza di contenuto si differenzia dalla condizionalità e dalla negazione per il fatto che essa riguarda nomi, non contenuti. Mentre in tutti gli altri casi i segni sono puri e semplici rappresentanti del loro contenuto — cosicché ogni collegamento nel quale si presentano esprime solo una relazione dei loro contenuti — al contrario essi rivelano di colpo il carattere individuale che è loro proprio non appena li colleghiamo col segno dell'uguaglianza di contenuto; con questo infatti viene denotata la circostanza che due nomi diversi hanno lo stesso contenuto. E invero, con l'introduzione di un segno per l'uguaglianza di contenuto viene necessariamente a crearsi la scissione nel significato di tutti i segni, potendo essi figurare ora per il loro contenuto, ora per sé stessi. Questo, a tutta prima, suscita l'im-

pressione che qui si tratti di qualcosa che riguarda solo *l'espressione, non il pensiero*, e che, non essendo assolutamente necessari segni diversi per uno stesso contenuto, non occorra un segno per l'uguaglianza di contenuto. Per chiarire l'inconsistenza di una tale impressione scelgo dalla geometria il seguente esempio. Sia A un punto fisso di una circonferenza, attorno al quale ruoti una retta.[1] Se questa retta forma un diametro, chiamiamo il suo estremo opposto ad A punto B associato a questa posizione. Chiamiamo inoltre punto B associato a una qualunque posizione della retta quel punto di intersezione fra retta e circonferenza, che si ottiene in base al principio seguente: a variazioni di posizioni continue della retta, devono sempre corrispondere variazioni di posizione continue del punto B. Il nome B denota dunque qualcosa di indeterminato fintantoché non è assegnata la corrispondente posizione della retta. Possiamo ora chiedere: quale punto è associato a quella posizione della retta nella quale essa risulta perpendicolare al diametro? La risposta sarà: il punto A. Il nome B ha quindi, in questo caso, il medesimo contenuto del nome A; e tuttavia non si potrebbe a priori usare un unico nome, perché il farlo viene giustificato solo dalla risposta testé riferita. Lo stesso punto è determinato in due modi:

1) immediatamente per mezzo dell'intuizione;

2) come punto B associato alla retta avente una posizione perpendicolare al diametro.

A ognuno di questi due modi di determinazione corrisponde un nome particolare. La necessità di un segno dell'uguaglianza di contenuto si basa quindi su quanto segue: lo stesso contenuto può venire completamente determinato in differenti modi; il fatto però che in un caso particolare, a mezzo di *due modi differenti di determinazione* venga

[1] [Per comodità del lettore visualizziamo l'esempio di Frege nella figura:

dato effettivamente *lo stesso contenuto*, è il contenuto di un *giudizio*. Prima che questo giudizio sia provato, devono venir dati, in corrispondenza ai due modi di determinazione, due nomi diversi a quanto da essi determinato. Il giudizio però, per venire espresso, abbisogna di un segno di uguaglianza di contenuto che colleghi quei due nomi. Risulta da ciò che i nomi differenti per lo stesso contenuto non sempre sono semplicemente una trascurabile questione di forma, ma riguardano l'essenza della cosa stessa, se sono connessi a modi diversi di determinazione. In questo caso il giudizio che ha per oggetto l'uguaglianza di contenuto è un giudizio sintetico in senso kantiano. Una ragione piú esteriore per l'introduzione di un segno dell'uguaglianza di contenuto risiede nel fatto che talvolta è opportuno introdurre una abbreviazione in luogo di espressioni molto lunghe. In tali casi si deve esprimere l'uguaglianza fra il contenuto dell'abbreviazione e quello della forma originaria.

Il significato di

$$\vdash\!\!\!\text{——}\ (A \equiv B)$$

sarà quindi: *il segno A e il segno B hanno lo stesso contenuto concettuale, cosicché in ogni occorrenza si può porre A al posto di B e viceversa.*[1]

La funzione

9. SPIEGAZIONE DELLE PAROLE "FUNZIONE" E "ARGOMENTO". FUNZIONI DI PIÚ ARGOMENTI. POSTI DI ARGOMENTO. SOGGETTO, OGGETTO Immaginiamo di aver espressa nel nostro linguaggio in formule la circostanza che l'idrogeno è piú leggero dell'acido carbonico: possiamo allora sostituire, al segno dell'idrogeno, il segno dell'ossigeno o dell'azoto. Il senso viene cosí a variare, in quanto il termine "ossigeno" o "azoto" subentra nelle relazioni nelle quali prima si trovava "idrogeno". Se si considera un'espressione come variabile nel modo testé indicato, essa

[1] [Nella definitiva elaborazione dei *Principi*, questo segno verrà sostituito dall'usuale segno di uguaglianza. Frege afferma al proposito (*Principi*, vol. 1, p. 9): "Invece dei tre tratti paralleli ho scelto infatti l'ordinario segno di uguaglianza, in quanto mi sono convinto che esso ha in aritmetica proprio lo stesso significato che anch'io voglio denotare. In effetti, io adopero la parola 'uguale' nello stesso significato di 'coincidente con' o 'identico a' e in realtà il segno di uguaglianza viene usato cosí anche nell'aritmetica..."]

si spezza in una componente che resta fissa — componente che rappresenta la totalità delle relazioni — e nel segno, pensato sostituibile con altri, il quale denota l'oggetto che si trova in queste relazioni. Chiamo funzione la prima componente, suo argomento la seconda. Questa distinzione non ha niente a che fare col contenuto concettuale, ma dipende solo dalla nostra concezione di tale contenuto.[1] Mentre nel modo di considerazione su accennato "idrogeno" era l'argomento ed "essere piú leggero dell'acido carbonico" era la funzione, possiamo concepire lo stesso contenuto concettuale anche in modo che "acido carbonico" diventi argomento e "essere piú pesante dell'idrogeno" diventi funzione. È allora necessario che noi pensiamo "acido carbonico" come sostituibile con altre rappresentazioni quali "acido cloridrico" o "ammoniaca" eccetera.

"La circostanza che l'acido carbonico è piú pesante dell'idrogeno"

e

"La circostanza che l'acido carbonico è piú pesante dell'azoto"

sono la medesima funzione con argomenti diversi, se consideriamo "idrogeno" e "azoto" come argomenti; sono al contrario funzioni distinte dello stesso argomento, se si riguarda come argomento "acido carbonico".

Consideriamo ancora, quale altro esempio, "la circostanza che il centro di gravità del sistema solare ha accelerazione nulla, purché agiscano solo forze interne al sistema solare stesso." Qui l'espressione "sistema solare" ricorre in due posti. Possiamo quindi concepire questa proposizione quale funzione dell'argomento "sistema solare" in diversi modi, a seconda che pensiamo tale espressione come sostituibile con qualcosa d'altro nel primo o nel secondo o in entrambi i posti. Queste tre funzioni sono completamente diverse. Lo stesso mostra la proposizione che Catone uccise Catone. Se in essa pensiamo sostituibile "Catone" al primo posto, la funzione è "uccidere Catone"; se pensiamo sostituibile "Catone" al secondo posto, la funzione è "venire

[1] [Quest'affermazione di Frege va intesa nel senso che la possibilità di fungere da argomento o da funzione non è legata a peculiari proprietà dell'una o dell'altra componente di un dato contenuto, ma, in larga misura, è frutto di una stipulazione arbitraria. Una volta introdotta un'adeguata notazione simbolica, atta a rendere con naturalezza la possibilità su accennata, egli ne concluderà (al termine del § 10) che il suo concetto di funzione è notevolmente piú ampio di quello adottato in Analisi.]

uccisi da Catone"; se infine pensiamo "Catone" sostituibile in entrambi i posti, allora la funzione è "uccidere sé stessi".

Esprimiamo ora la questione in generale:

Se in una espressione, di cui non è necessario che il contenuto sia giudicabile, un segno semplice o composto ricorre in uno o piú posti, e noi pensiamo tale segno come sostituibile in tutti o in alcuni di questi posti da un altro segno, purché lo stesso in ogni posto, allora chiamiamo funzione la parte dell'espressione che rimane invariata nelle sostituzioni anzidette, e suo argomento la parte sostituibile.

Dal momento che, secondo quanto abbiamo accennato, qualcosa può ricorrere nella funzione come argomento e contemporaneamente in posti tali dove viene pensata come non sostituibile, distinguiamo nella funzione i posti di argomento dai rimanenti.

Desidero qui mettere in guardia da un inganno al quale dà facilmente luogo l'uso comune della lingua. Confrontando le due proposizioni:

> "Il numero 20 è rappresentabile come somma di quattro interi quadratici"

e

> "Ogni numero intero positivo è rappresentabile come somma di quattro interi quadratici",

sembra possibile concepire l'espressione "essere rappresentabile come somma di quattro interi quadratici", quale funzione che una volta ha per argomento "il numero 20" e l'altra volta "ogni numero intero positivo". La falsità di una tale concezione si riconosce osservando che "il numero 20" e "ogni numero intero positivo" non sono concetti dello stesso rango. Ciò che può venir affermato per il numero 20, non può essere affermato nello stesso senso per "ogni numero positivo", ma può certamente esserlo nel caso che si tratti di un qualunque intero positivo. L'espressione "ogni numero intero positivo" non ha di per sé stessa — come invece avviene per "il numero 20" — una rappresentazione indipendente, ma riceve un senso solo attraverso il contesto della proposizione.

I diversi modi coi quali uno stesso contenuto concettuale può venir concepito come funzione di questo o di quell'argomento non hanno per noi alcuna importanza, fintantoché funzione e argomento sono completamente determinati. Ma se l'argomento diventa *indeterminato*,

come nel giudizio: “Tu puoi assumere, quale argomento per la funzione ‘essere rappresentabile come somma di quattro numeri quadratici’ un intero positivo arbitrario e la proposizione rimane sempre giusta”, in tal caso la distinzione fra funzione e argomento assume un significato *contenutistico.* Viceversa, può anche essere determinato l’argomento e invece indeterminata la funzione. In entrambi i casi, per mezzo dell’antitesi fra il *determinato* e l’*indeterminato,* oppure fra il *piú* e il *meno* determinato, la totalità viene scissa in *funzione* e *argomento* in relazione al contenuto e non solo riguardo alla concezione.

Se in una funzione si considera come sostituibile, in alcuni o in tutti i posti in cui esso ricorre, un segno fino a quel momento ritenuto non sostituibile,[1] *si ottiene con questo modo di concepire una funzione che ha un altro argomento oltre a quelli fino ad allora posseduti.* In questo modo hanno origine le *funzioni di due o piú argomenti.* Cosí, per esempio, “La circostanza che l’idrogeno è piú leggero dell’acido carbonico”, si può concepire come funzione di due argomenti: “idrogeno” e “acido carbonico”.

Il soggetto è abitualmente, nell’intendimento di chi parla, l’argomento principale; ciò che risulta piú importante dopo di esso compare spesso come oggetto. La lingua comune, potendo scegliere fra forme e parole quali

attivo - passivo
piú pesante - piú leggero
dare - ricevere,

ha la libertà di far apparire a piacere, come argomento principale, questa oppure quella componente della proposizione; libertà questa che tuttavia è limitata dalla mancanza di parole.

10. Uso delle lettere quali segni di funzione. “*A* ha la proprietà *Φ*.” “*B* sta nella relazione *Ψ* con *A*.” “*B* è il risultato di un’applicazione del procedimento *Ψ* sull’oggetto *A*”. Il segno di funzione quale argomento *Per esprimere una funzione indeterminata dell’argomento A, facciamo seguire, a una lettera, l’argomento A*

[1] Un segno, già considerato sostituibile, può ora venir concepito come sostituibile anche in quei posti ove per l’innanzi era riguardato come fisso.

racchiuso tra parentesi, per esempio:

$$\Phi(A)\,.$$

In modo analogo

$$\Psi(A, B)$$

significa una funzione non meglio determinata dei due argomenti A e B. In essa i posti di A e B nella parentesi rappresentano i posti che A e B prendono nella funzione, non importa se questi siano uno o piú, tanto per A quanto per *B. Di conseguenza,*

$\Psi(A, B)$ *è in generale diverso da* $\Psi(B, A)$.

In modo del tutto analogo vengono espresse funzioni indeterminate di piú argomenti.

$$\vdash\!\!—\; \Phi(A)$$

si può leggere: "A ha la proprietà Φ."

$$\vdash\!\!—\; \Psi(A, B)$$

può tradursi con "B sta nella relazione Ψ con A", oppure "B è il risultato di un'applicazione del procedimento Ψ all'oggetto A."

Poiché, nell'espressione

$$\Phi(A)$$

il segno Φ ricorre in un posto, e poiché noi possiamo pensarlo sostituito da altri segni come Ψ, X — per mezzo dei quali verrebbero allora espresse altre funzioni dell'argomento A — *si può concepire* $\Phi(A)$ *come una funzione dell'argomento* Φ. Da quanto ora detto risulta con particolare chiarezza che il concetto di funzione in uso nell'Analisi, al quale mi sono in generale ricollegato, è molto piú ristretto di quello qui sviluppato.[1]

La generalità

11. Lettere gotiche. La cavità del segno di contenuto. Sostituibilità delle lettere gotiche. Dominio (di variabilità) delle stesse.

[1] [Si confronti p. 126, n. 1. Per un'ulteriore precisazione del senso da attribuire a quest'affermazione di Frege — precisazione strettamente connessa alla teoria freghiana del significato — si confronti l'Introduzione del presente volume.]

LETTERE LATINE Nell'espressione di un giudizio si può sempre riguardare il collegamento di segni che sta a destra di $\vdash$—— come funzione di uno dei segni che in esso ricorrono. *Se al posto di questo segno si pone una lettera gotica, e si dà al segno di contenuto una cavità nella quale stia questa stessa lettera, come in*

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi(\mathfrak{a}),$$

ciò significa il giudizio che quella funzione è un fatto, qualunque cosa si riguardi come suo argomento.[1] Dal momento che una lettera usata quale segno di funzione, come ad esempio Φ in $\Phi(A)$, può a sua volta venir riguardata come argomento di una funzione, se ne ricava che al suo posto può subentrare una lettera gotica, nel senso precedentemente stabilito. Il significato di una lettera gotica è sottoposto alle sole limitazioni, di per sé evidenti, che con essa deve rimanere intatta la giudicabilità (cfr. § 2) di un collegamento di segni che segua un segno di contenuto, e che, se la lettera gotica compare come segno di funzione, si deve tener conto di questa circostanza. *Tutte le altre condizioni cui deve essere sottoposto ciò che si può sostituire al posto di una lettera gotica vanno inserite nel giudizio.* Da un giudizio siffatto si può dunque sempre derivare un insieme arbitrario di *giudizi con contenuto meno generale*, sostituendo di volta in volta qualcosa d'altro al posto della lettera gotica, col che la cavità nel segno di contenuto viene di nuovo a scomparire.[2] Il tratto orizzontale che si trova a sinistra della cavità in

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi(\mathfrak{a})$$

è il segno di contenuto rivolto a indicare che $\Phi(\mathfrak{a})$ vale, qualunque cosa si sostituisca ad $\mathfrak{a}$; il tratto a destra della cavità è il segno di contenuto

[1] [In questo e nei successivi paragrafi Frege imposta la teoria della quantificazione quale intesa modernamente. Egli introduce, col simbolo precedente, il quantificatore universale e successivamente definisce in termini di questo il quantificatore esistenziale, come negazione della generalità di una negazione. Per quanto riguarda la traduzione del nostro simbolismo varranno le seguenti corrispondenze:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \forall x Px$$

$$\vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!-\Phi(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \exists x Px\,.]$$

[2] [In altre parole: $\forall x Px \rightarrow Py$, che costituirà il nono assioma del sistema di Frege. Cfr. § 22.]

di $\Phi(\mathfrak{a})$, dove al posto di $\mathfrak{a}$ si deve pensare sostituito qualcosa di ben determinato.[1]

Dopo quanto abbiamo detto riguardo al significato del segno di giudizio, è facile vedere che cosa significhi un'espressione come

$$-\!\!\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a})\,.$$

Essa può presentarsi quale parte componente in un giudizio, per esempio

$$\vdash\!\!\top\!\!\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a})\,, \qquad \vdash\!\!\begin{array}{l}\text{———} A\\ \llcorner\!\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a})\end{array}.$$

È evidente che da questi giudizi non si possono trarre altri giudizi meno generali sostituendo qualcosa di determinato al posto di $\mathfrak{a}$, come invece succedeva per

$$\vdash\!\!\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\Phi(\mathfrak{a})\,.$$

Per mezzo di $\vdash\!\!\top\!\!\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a})$ viene negato che $X(\mathfrak{a})$ risulti sempre un fatto qualunque sia l'oggetto che si sostituisce ad $\mathfrak{a}$. Con questo non si nega però in alcun modo che possa darsi un significato Δ per $\mathfrak{a}$, tale che $X(\Delta)$ risulti un fatto. Il giudizio

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\text{———} A\\ \llcorner\!\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a})\end{array}$$

significa che non può aver luogo il caso in cui $-\!\!\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a})$ viene affermato e A negato. Ma con questo non si nega in alcun modo che abbia luogo il caso in cui $X(\Delta)$ viene affermato e A negato; infatti, come piú sopra abbiamo visto, può venire affermato $X(\Delta)$ e tuttavia negato $-\!\!\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a})$. Anche qui pertanto non si può porre qualcosa di arbitrario al posto di $\mathfrak{a}$, senza pregiudicare l'esattezza del giudizio. Questo spiega il motivo per cui è necessaria la cavità con la lettera gotica in essa contenuta: *essa delimita il dominio al quale si riferisce la generalità denotata con la lettera. Soltanto all'interno del suo dominio la lettera gotica mantiene il proprio significato*; in un giudizio la stessa lettera gotica può ricorrere in domini diversi, senza che il significato ad essa attribuito in uno di tali domini si estenda ai rimanenti. Il dominio di

[1] [Ossia è priva di senso, nell'ideografia, una formula del tipo $\text{———} f(\mathfrak{a})$, dove cioè un segno di contenuto senza cavità preceda immediatamente un'espressione contenente una lettera gotica.]

una lettera gotica può includere quello di un'altra, come mostra l'esempio

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\begin{array}{l} \text{———} A(\mathfrak{a}) \\ \llcorner\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\text{—} B(\mathfrak{a}, \mathfrak{e})\,. \end{array}$$

In questo caso esse debbono essere scelte *diverse*; non si potrebbe porre $\mathfrak{a}$ al posto di $\mathfrak{e}$. È permesso naturalmente sostituire dappertutto, entro il suo dominio, una lettera gotica con un'altra determinata lettera, purché nei posti in cui prima della sostituzione ricorrevano lettere diverse si ritrovino ancora lettere diverse a sostituzione effettuata. Ciò non ha alcuna influenza sul contenuto. *Altre sostituzioni sono permesse solo se la cavità segue immediatamente il segno di giudizio*, cosicché il contenuto dell'intero giudizio costituisca il dominio della lettera gotica. Poiché tuttavia questo caso è di speciale importanza, voglio introdurre per esso la seguente abbreviazione. *Una lettera latina ha sempre come dominio il contenuto dell'intero giudizio*, senza che ciò venga denotato con una cavità nel segno di contenuto. Se una lettera latina ricorre in un'espressione non preceduta da alcun segno di giudizio, l'espressione stessa è priva di senso. *Una lettera latina può sempre venir sostituita da una lettera gotica che ancora non ricorra nel giudizio*, e allora la cavità va posta immediatamente dopo il segno del giudizio. Per esempio, al posto di

$$\vdash\text{——} X(a)$$

si può porre

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\text{—} X(\mathfrak{a}),$$

se a ricorre in $X(a)$ soltanto al posto di argomento.

È pure evidente che, da

$$\vdash\!\begin{array}{l} \text{—} \Phi(a) \\ \llcorner\text{—} A \end{array}$$

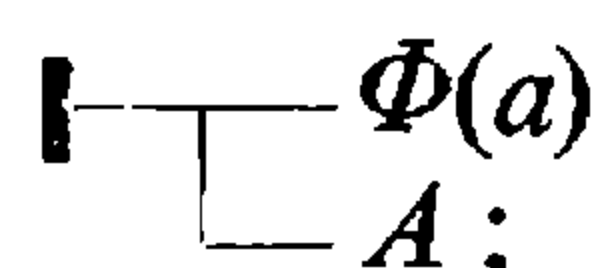
si può derivare

$$\vdash\!\begin{array}{l} \text{—}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\text{—} \Phi(\mathfrak{a}) \\ \llcorner\text{———} A\,, \end{array}$$

se A è un'espressione nella quale a non ricorre, e se a figura in $\Phi(a)$ solo al posto di argomento.[1] Se $\text{—}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\text{—}\,\Phi(\mathfrak{a})$ viene negato, deve essere

[1] [Trattasi della regola inferenziale $\dfrac{H \rightarrow \Theta(x)}{H \rightarrow \forall x\, \Theta(x)}$ che, come è noto, è soggetta alla condizione che x non compaia libera in H.]

possibile trovare un significato per a tale che $\Phi(a)$ risulti negato. Se quindi $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a})$ venisse negato e A affermato, si dovrebbe poter dare un significato per a in modo che A risultasse affermato e $\Phi(a)$ negato. Ma questo non è possibile a causa della

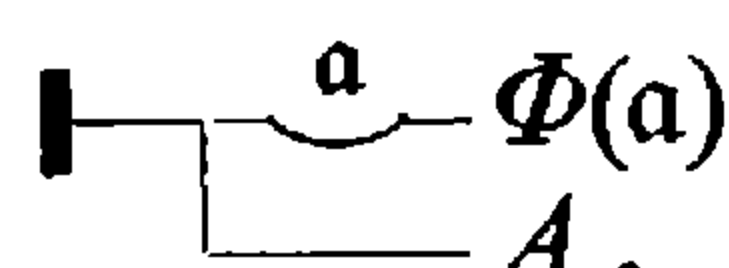
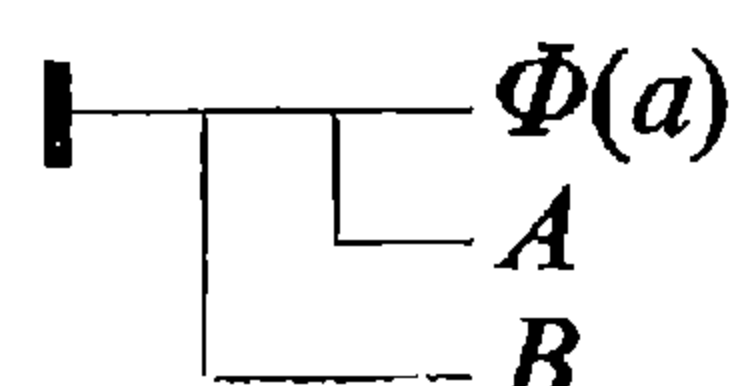
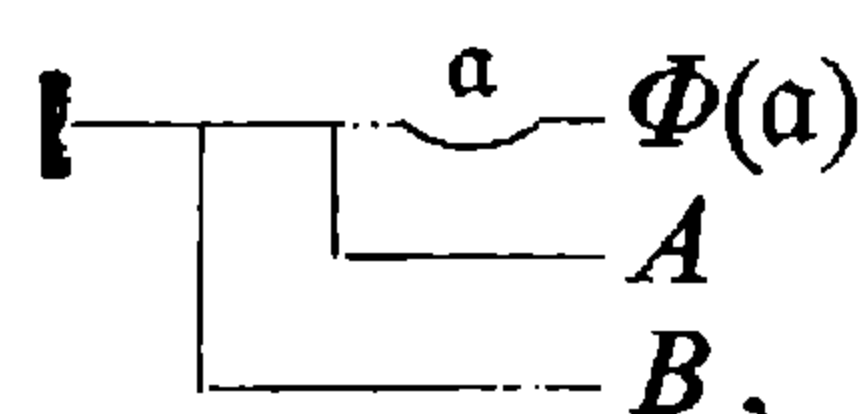
$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\Phi(a)\\ A\end{array};$$

essa significa infatti che, qualunque sia a, viene escluso il caso in cui $\Phi(a)$ risulti negato e A affermato. Di conseguenza non si può negare $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a})$ e affermare A; ossia vale:

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})\\ A\end{array}.$$

Analogamente da

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\Phi(a)\\ A\\ B\end{array}$$

può trarsi

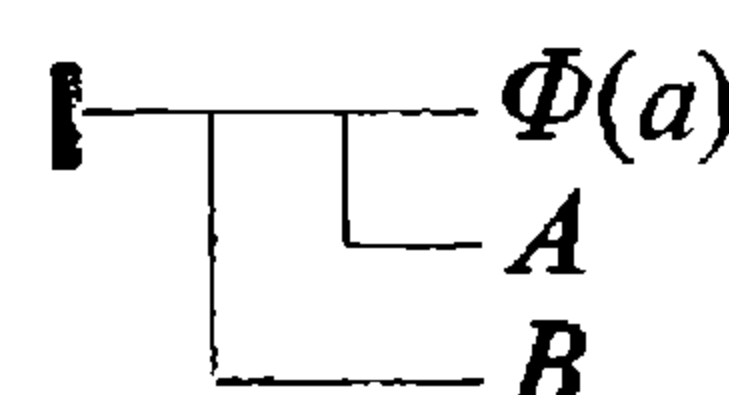
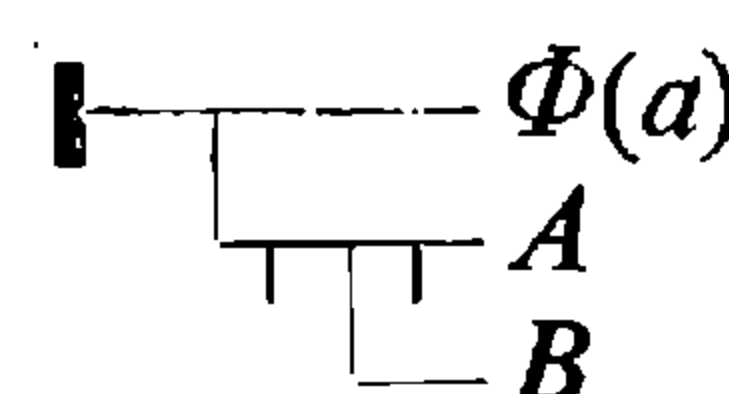
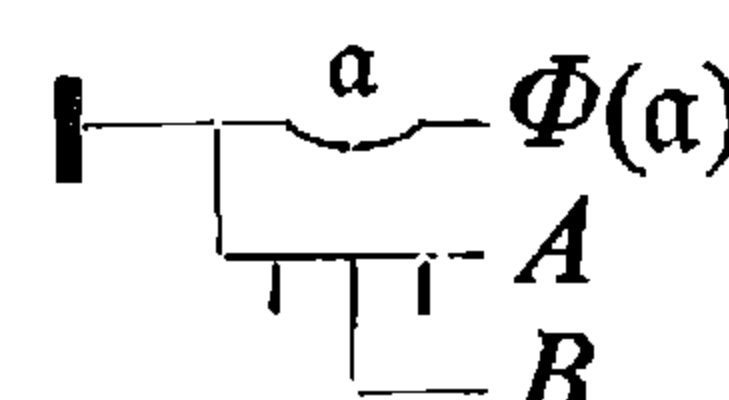
$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})\\ A\\ B\end{array},$$

se a non ricorre in A e B e se $\Phi(a)$ contiene a solo al posto di argomento. Questo caso può essere ricondotto al precedente, poiché, invece di

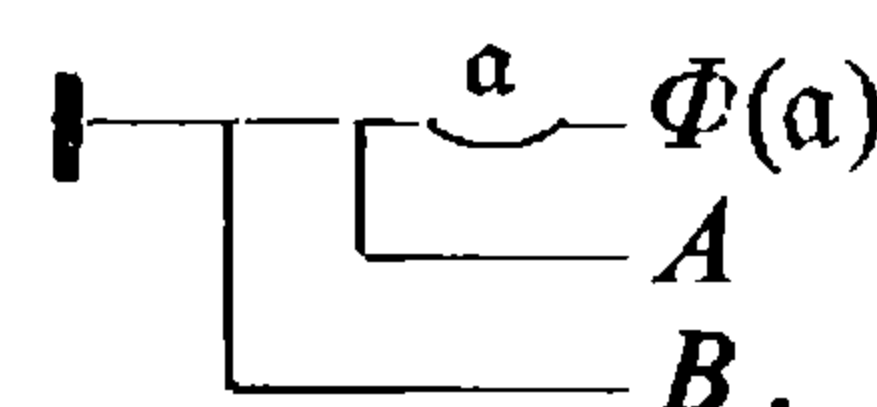
$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\Phi(a)\\ A\\ B\end{array}$$

si può porre

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\Phi(a)\\ \neg\!\!\begin{array}{l}\neg A\\ B\end{array}\end{array}$$

e

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})\\ \neg\!\!\begin{array}{l}\neg A\\ B\end{array}\end{array}$$

si può a sua volta mutare in

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})\\ A\\ B\end{array}.$$

Analogo risultato vale se sono presenti segni di condizionalità in numero ancora maggiore.

12. Esistono alcune cose che non... Non esiste alcuna cosa che... Esistono alcune cose... Ogni. Tutti. Nessi causali. Nessuno. Alcuni non... Alcuni. È possibile che... Tavola delle opposizioni logiche

Consideriamo ora alcuni collegamenti di segni.

$$\vdash\!\!\!\top\!\!\overset{\alpha}{\smile}\!\!-X(\alpha)$$

significa che si può trovare qualcosa, per esempio Δ, tale che $X(\Delta)$ risulti negato. Lo si può quindi tradurre cosí: "Esistono alcune cose che non hanno la proprietà X."

Ben diverso da questo è il senso di

$$\vdash\!\!-\!\overset{\alpha}{\smile}\!\!\top X(\alpha)\,,$$

che significa: "Qualunque sia α, $X(\alpha)$ va sempre negato", ossia: "Non esiste qualcosa che abbia la proprietà X"; oppure, se chiamiamo "un X" qualcosa che abbia la proprietà X: "Non esiste alcun X."

$-\!\overset{\alpha}{\smile}\!\!\top\Lambda(\alpha)$ viene negato per mezzo di [1]

$$\vdash\!\!\!\top\!\!\overset{\alpha}{\smile}\!\!\top\Lambda(\alpha)$$

che si può quindi tradurre: "Esistono dei Λ."[2]

$$\vdash\!\!-\!\overset{\alpha}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\!\!\!-\!\!-P(\alpha)\\ \!\!\!\llcorner\!\!-X(\alpha)\end{array}$$

significa: "Qualunque cosa si sostituisca ad α, non si presenta il caso in cui $P(\alpha)$ debba venir negato e $X(\alpha)$ affermato." È quindi possibile che, per alcuni dei significati che si possono dare ad α,
$P(\alpha)$ vada affermato e $X(\alpha)$ affermato, per altri
$P(\alpha)$ vada affermato e $X(\alpha)$ negato, per altri ancora
$P(\alpha)$ vada negato e $X(\alpha)$ negato.

[1] [Viene cosí introdotto il quantificatore esistenziale, da noi indicato con $\exists x$.]

[2] Questo va inteso in modo da comprendere il caso "esiste un Λ". Se per esempio $\Lambda(x)$ significa la circostanza che x è una casa, allora

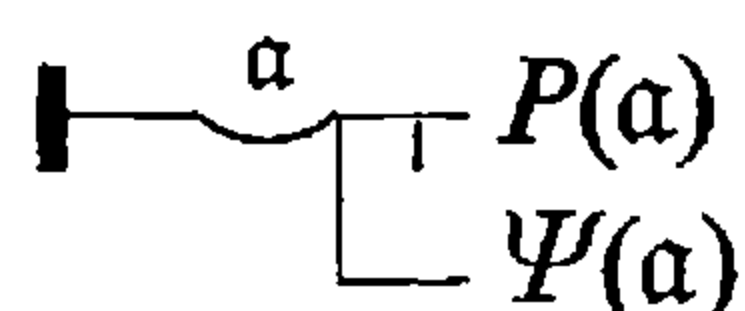
$$\vdash\!\!\!\top\!\!\overset{\alpha}{\smile}\!\!\top\Lambda(\alpha)$$

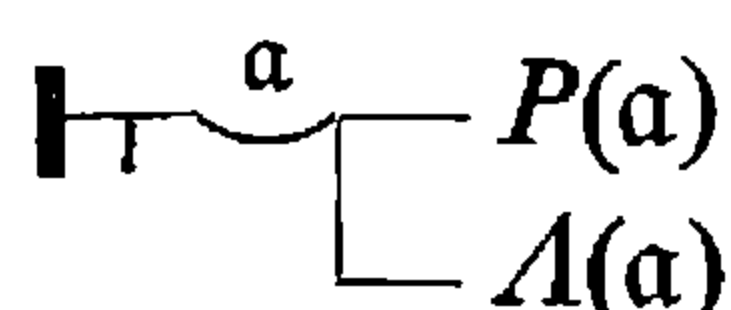
significa: "Esistono delle case, o almeno una casa." Si confronti il paragrafo 2, n. 2.

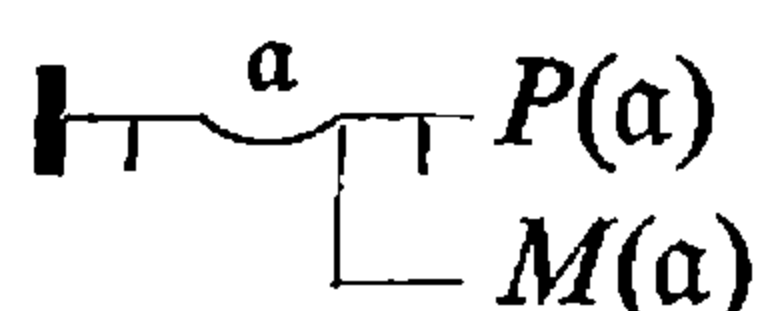
Si può quindi tradurre: "Se qualcosa ha la proprietà X, essa ha anche la proprietà P", oppure "Ogni X è un P", oppure "Tutti gli X sono P."

Questo è il modo col quale vengono espresse le connessioni causali.

Il giudizio

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!\!\begin{array}{l} P(\mathfrak{a}) \\ \Psi(\mathfrak{a}) \end{array}$$

significa: "Non può darsi ad $\mathfrak{a}$ un significato tale che $P(\mathfrak{a})$ e $\Psi(\mathfrak{a})$ possano entrambi venir affermati." Di conseguenza si può tradurre: "Ciò che ha la proprietà Ψ, non ha la proprietà P", oppure "Nessun Ψ è un P."

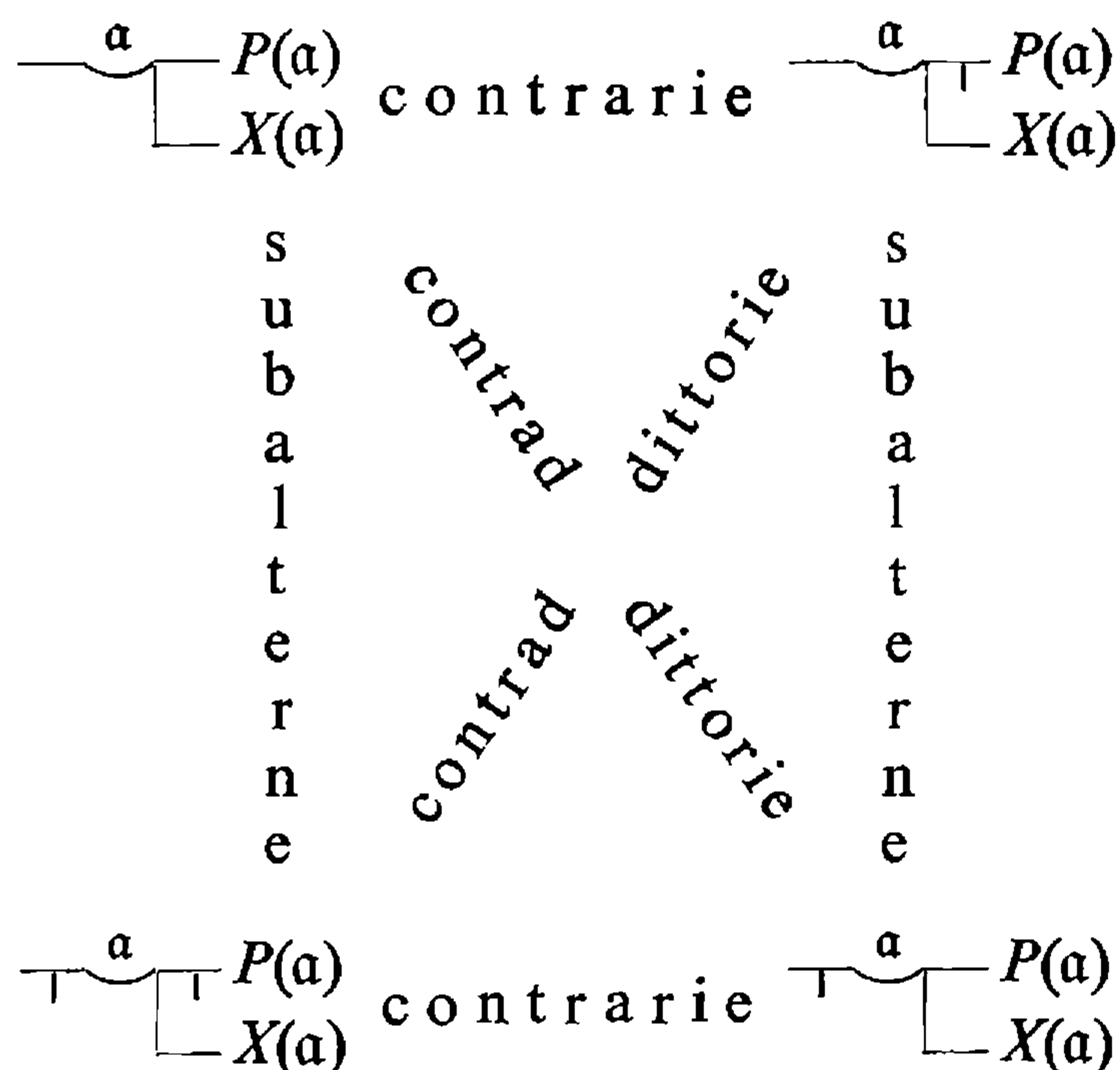
$$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} P(\mathfrak{a}) \\ \Lambda(\mathfrak{a}) \end{array}$$

nega $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} P(\mathfrak{a}) \\ \Lambda(\mathfrak{a}) \end{array}$ e può quindi venir reso per mezzo di "alcuni Λ non sono P."

$$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!\!\begin{array}{l} P(\mathfrak{a}) \\ M(\mathfrak{a}) \end{array}$$

nega che nessun M sia un P e significa di conseguenza: "Alcuni [1] M sono P," ossia: "È possibile che un M sia un P."

Ne risulta così la tavola delle opposizioni logiche:

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} P(\mathfrak{a}) \\ X(\mathfrak{a}) \end{array} \quad \text{contrarie} \quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!\!\begin{array}{l} P(\mathfrak{a}) \\ X(\mathfrak{a}) \end{array}$$

subalterne — contraddittorie — contraddittorie — subalterne

$$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!\!\begin{array}{l} P(\mathfrak{a}) \\ X(\mathfrak{a}) \end{array} \quad \text{contrarie} \quad \top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} P(\mathfrak{a}) \\ X(\mathfrak{a}) \end{array}$$

[1] La parola "alcuni", va sempre intesa in modo da comprendere il caso "uno". Esplicitamente si dovrebbe dire: "Alcuni, o comunque almeno uno."

2.

Esposizione e derivazione di alcuni giudizi del pensiero puro

13. UTILITÀ DEL MODO DERIVATIVO DI ESPOSIZIONE Alcuni princípi del pensiero sono già stati presi in esame nel primo capitolo, per venire trasformati in regole per l'applicazione dei nostri simboli. Queste regole e le leggi delle quali esse sono le immagini, non possono venir espresse nell'ideografia, per il motivo che ne formano il fondamento. In questo capitolo saranno esposti in simboli alcuni giudizi del pensiero puro per i quali ciò risulta possibile. È cosa ovvia derivare i piú complessi di tali giudizi da quelli piú semplici, non per renderli piú certi, il che per lo piú sarebbe superfluo, ma per mettere in luce le relazioni dei giudizi fra loro. Evidentemente, il conoscere semplicemente le leggi non è la stessa cosa che sapere anche come le une siano già date per mezzo delle altre. Seguendo questa via si giunge a un ristretto numero di leggi, nelle quali — aggiungendovi quelle contenute nelle regole — è racchiuso, anche se non sviluppato, il contenuto di tutte le altre. E uno dei vantaggi di esporle derivandole una dall'altra è proprio quello di insegnarci a conoscere questo nucleo. Dal momento che non si possono enumerare tutte le leggi del vastissimo insieme di quelle enunciabili, la completezza non potrà venir raggiunta per altra via se non con la ricerca di quelle che *in base alla loro forza* le racchiudono tutte in sé. Certamente bisogna ammettere che la riconduzione delle une alle altre è possibile non solo nell'unico modo da noi seguito. Se ne ricava che con questo modo di esposizione non vengono messe in evidenza tutte le relazioni delle leggi del pensiero. Esiste forse ancora un'altra serie di giudizi, dai quali — aggiungendovi quelli contenuti nelle regole — sarebbe parimenti possibile derivare tutte le leggi del pensiero. Nondimeno, col presente modo di riconduzione viene presentato un insieme

di relazioni tale che ogni altra derivazione risulta, per suo mezzo, di molto facilitata.

Le proposizioni che formano il nucleo della nostra esposizione sono in numero di nove. Per essere espresse, tre di queste, le formule 1, 2 e 8, abbisognano, a parte le lettere, soltanto del segno di condizionalità; altre tre, le formule 28, 31 e 41, oltre a esso contengono il segno della negazione; due, le formule 52 e 54, il segno di eguaglianza di contenuto, e in una, la formula 58, viene impiegata la cavità del segno di contenuto.

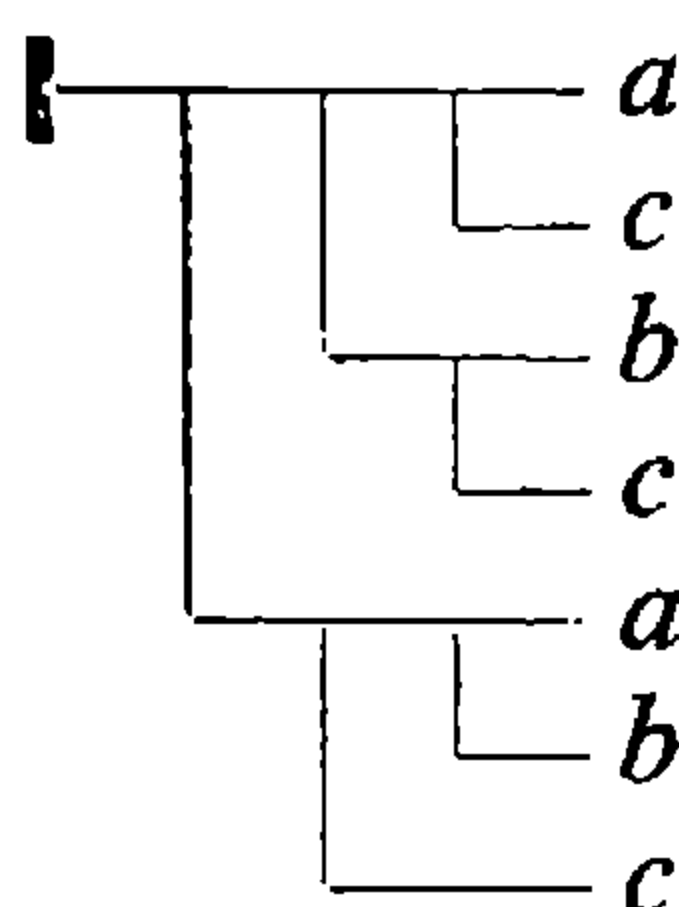
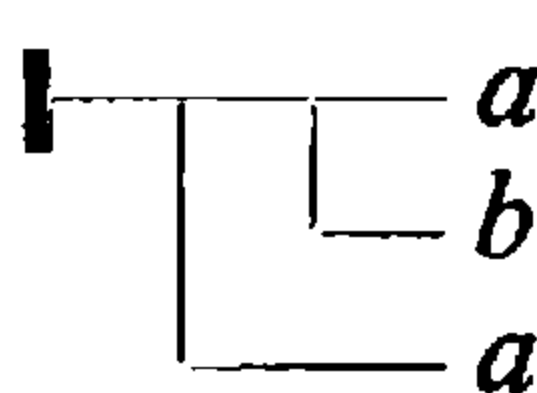
La nostra derivazione risulterebbe faticosa per il lettore, se egli volesse seguirla in tutti i particolari; essa ha soltanto lo scopo di tener pronta la risposta per ogni questione sulla derivazione di una legge.

14. I due primi princípi della condizionalità

$$\vdash \begin{array}{l} a \\ b \\ a \end{array} \qquad (1.$$

afferma: "È escluso il caso in cui *a* risulti negata, *b* affermata e *a* affermata."[1] Questo è evidente, dal momento che *a* non può essere affermata e nello stesso tempo negata. In parole il giudizio può anche esprimersi cosí: "Se una proposizione *a* vale, allora essa vale anche se vale una proposizione *b* arbitraria." Per esempio *a* significhi la proposizione che la somma degli angoli di un triangolo *ABC* è uguale a due angoli retti; *b* significhi la proposizione che l'angolo $A\hat{B}C$ è retto. Allora otteniamo il giudizio: "Se la somma degli angoli in un triangolo *ABC* è uguale a due angoli retti, questo vale anche per il caso in cui l'angolo $A\hat{B}C$ sia retto."

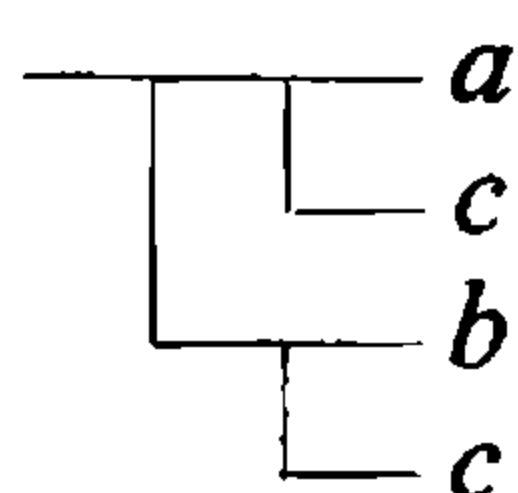
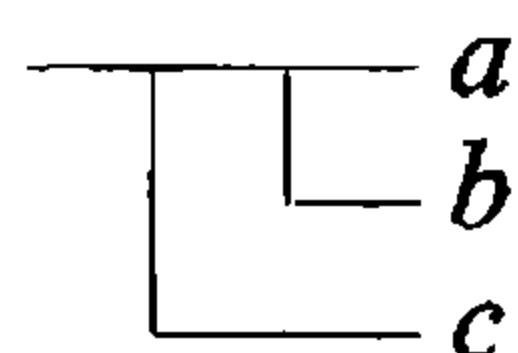
L'1 a destra della $\vdash \begin{array}{l} a \\ b \\ a \end{array}$ è il numero di questa formula.

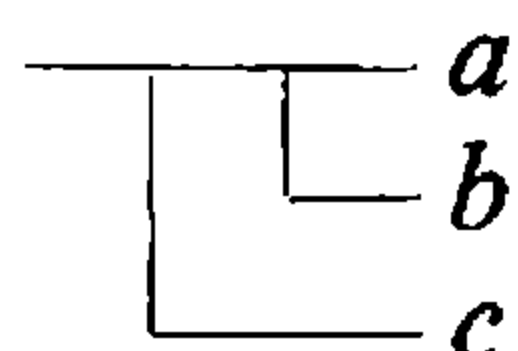
$$\vdash \begin{array}{l} a \\ c \\ b \\ c \\ a \\ b \\ c \end{array} \qquad (2.$$

[1] [Si tratta dell'assioma $p \to (q \to p)$.]

significa: “Non ha luogo il caso in cui

```
──┬──┬── a
  │  └── c
  └──┬── b
     └── c
```

viene negato e

```
──┬──┬── a
  │  └── b
  └───── c
```

viene affermato.”[1] Ma

```
──┬──┬── a
  │  └── b
  └───── c
```

denota la circostanza che è escluso il caso in cui *a* viene negata *b* e *c* affermate. La negazione di

```
──┬──┬── a
  │  └── c
  └──┬── b
     └── c
```

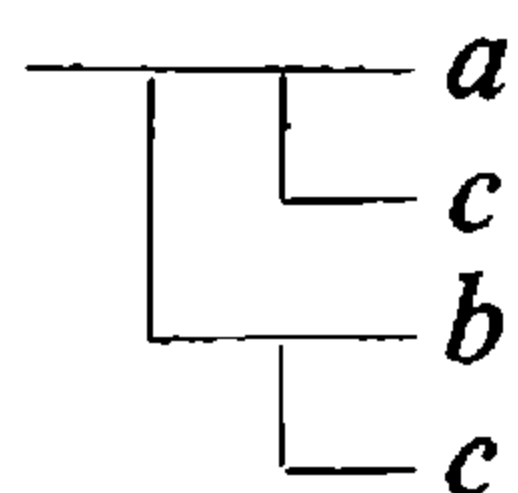
dice che

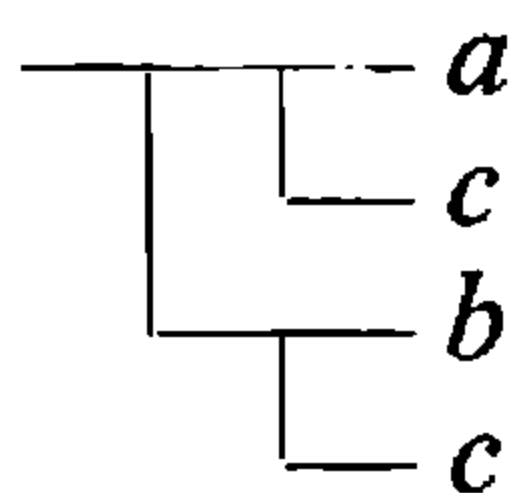
```
──┬── a
  └── c
```

viene negato e

```
──┬── b
  └── c
```

affermato. La negazione di

```
──┬── a
  └── c
```

significa però che *a* viene negata, *c* affermata. Quindi la negazione di

```
──┬──┬── a
  │  └── c
  └──┬── b
     └── c
```

significa che *a* viene negata, *c* affermata e

```
──┬── b
  └── c
```

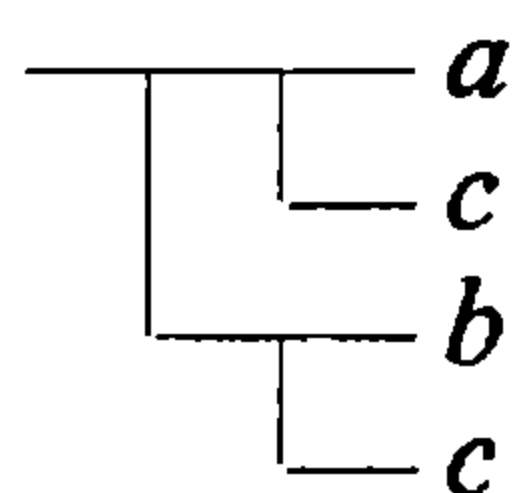
affermato. L’affermazione di

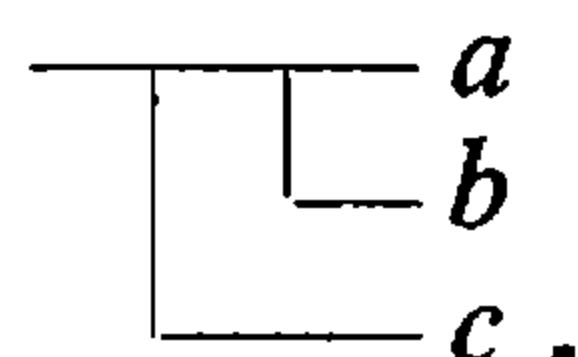
```
──┬── b
  └── c
```

e *c* comporta però l’affermazione di *b*. Dopo di

[1] [È il secondo assioma introdotto da Frege, ossia $(p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r))$.]

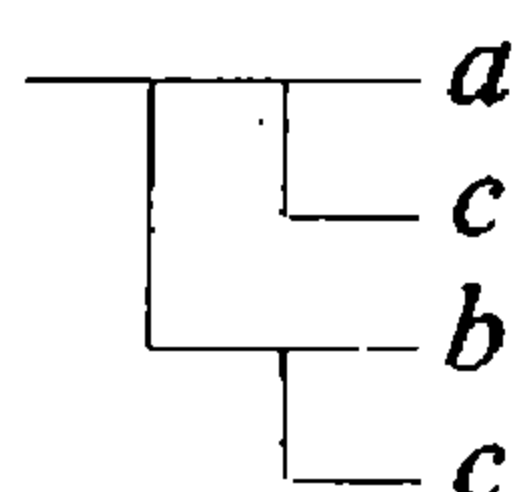
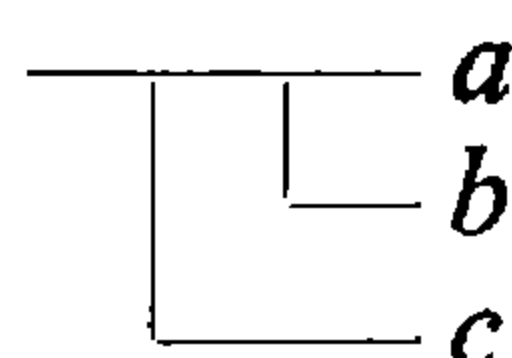
che la negazione di

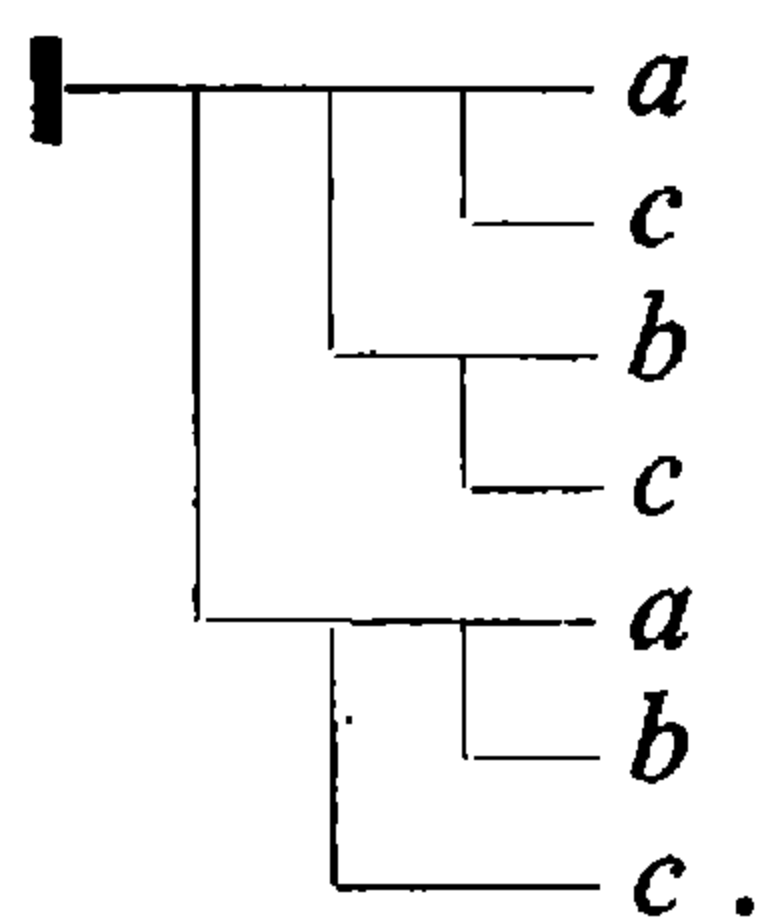
```
──┬──┬── a
  │  └── c
  └──┬── b
     └── c
```

ha per conseguenza la negazione di a e l'affermazione di b e c. Questo caso esclude precisamente l'affermazione di

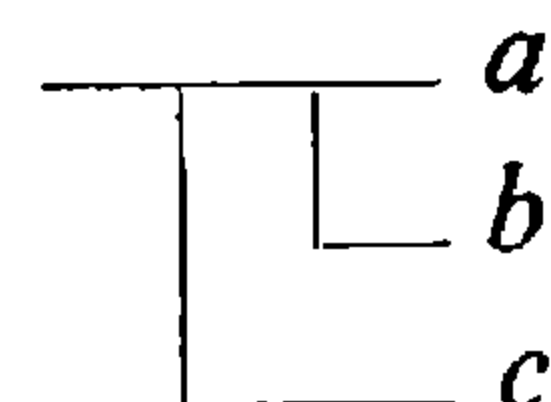
```
──┬──┬── a
  │  └── b
  └───── c .
```

Quindi il caso nel quale

```
──┬──┬── a
  │  └── c
  └──┬── b
     └── c
```

viene negato e

```
──┬──┬── a
  │  └── b
  └───── c
```

affermato, non può aver luogo, e proprio questo asserisce il giudizio

```
├──┬──┬──┬── a
   │  │  └── c
   │  └──┬── b
   │     └── c
   └──┬──┬── a
      │  └── b
      └───── c .
```

Nel caso in cui sussistono delle connessioni causali, questo fatto si può esprimere come segue: "Se una proposizione (a) è la conseguenza necessaria di due altre proposizioni (b e c), in formula

```
──┬──┬── a
  │  └── b,
  └───── c
```

e se inoltre la prima di queste (b) è conseguenza necessaria dell'altra (c), allora la proposizione (a) è conseguenza necessaria di quest'ultima sola (c)."

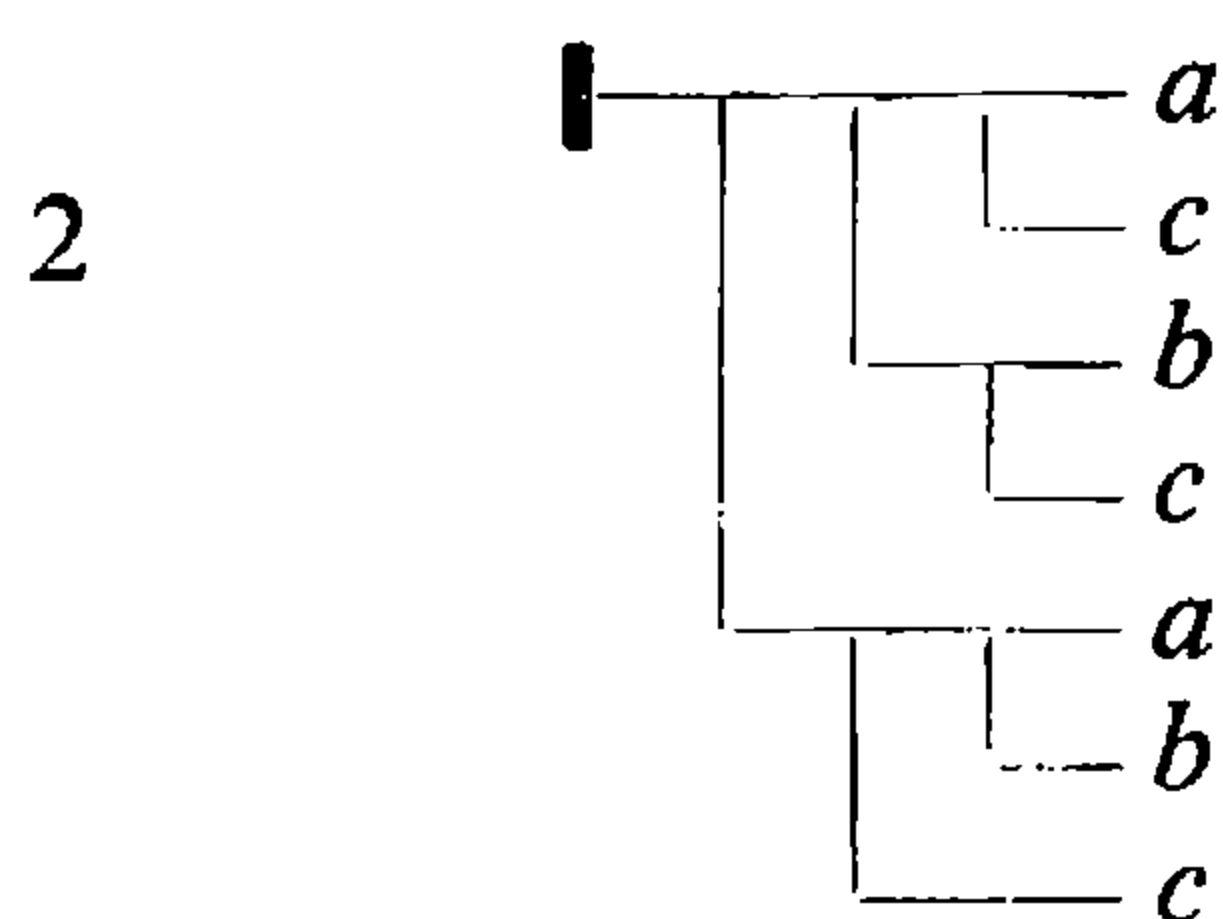
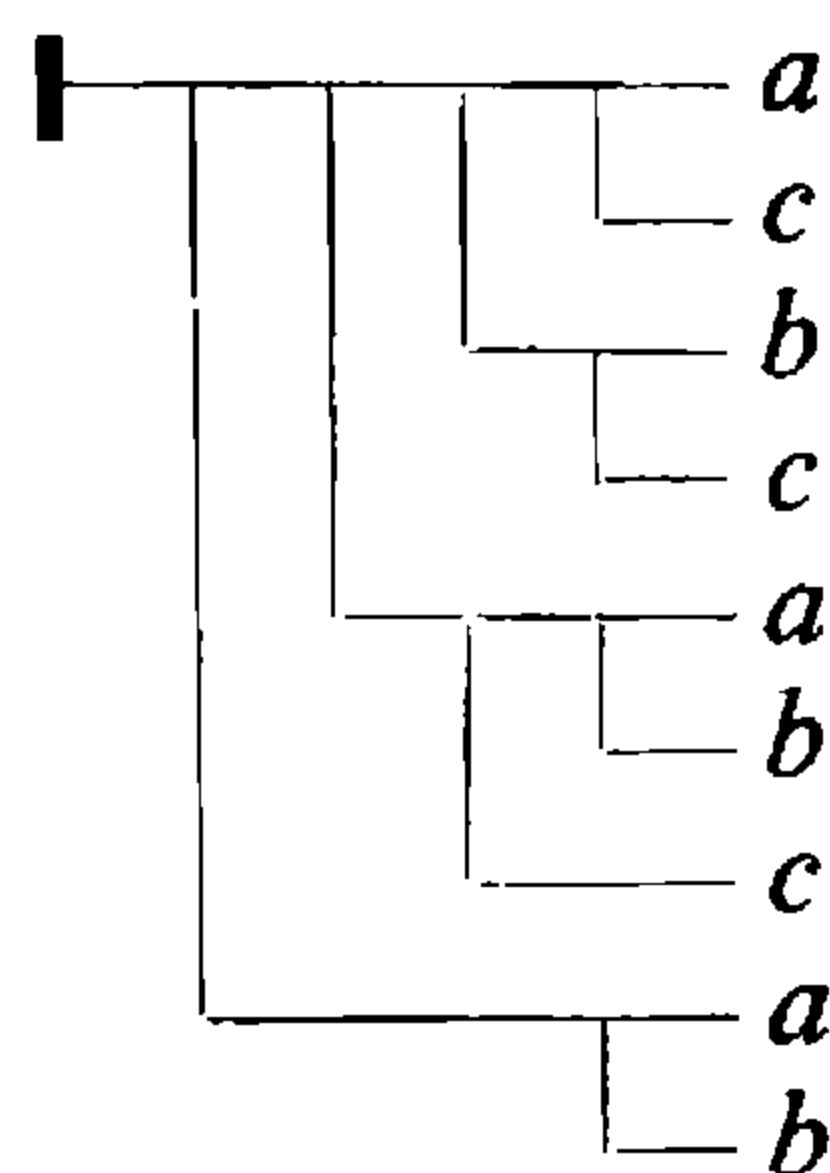
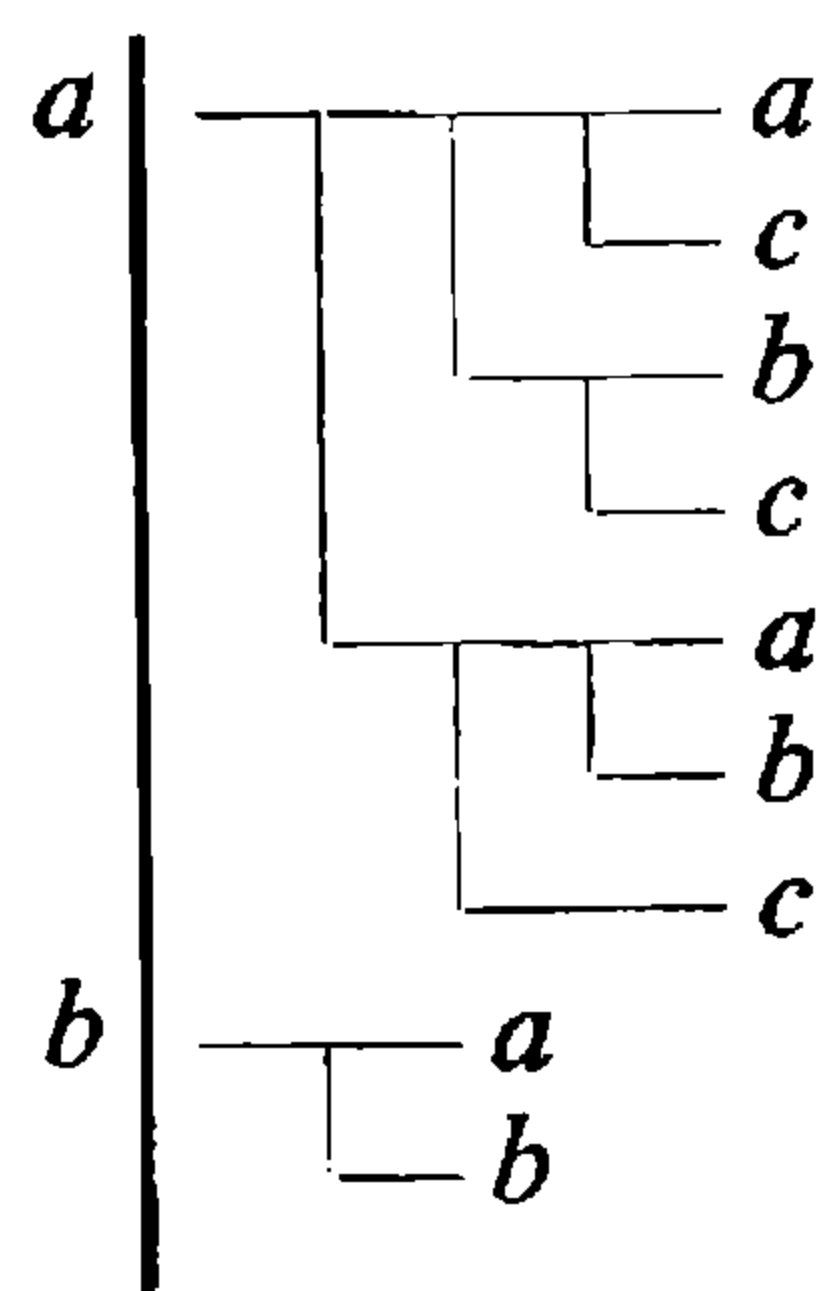
Per esempio:
c significhi che in una successione numerica *Z* ogni termine è maggiore del precedente;
b che un termine *M* è maggiore di *L*;
a che un termine *N* è maggiore di *L*.
Allora otteniamo il giudizio:

"Se dalle due proposizioni che in una successione numerica *Z* ogni termine è maggiore del precedente, e che il termine *M* è maggiore di *L*, può venire concluso che il termine *N* è maggiore di *L*; e se dalla proposizione che nella successione numerica *Z* ogni termine è maggiore del precedente ne segue che *M* è maggiore di *L*; allora la proposizione che *N* è maggiore di *L* può dedursi dalla proposizione che ogni termine della successione numerica *Z* è maggiore del precedente."

15. LORO CONSEGUENZE

2 — *a*, *c*, *b*, *c*, *a*, *b*, *c*

(1):

a — *a*, *c*, *b*, *c*, *a*, *b*, *c*
b — *a*, *b*

— *a*, *c*, *b*, *c*, *a*, *b*, *c*, *a*, *b* (3.

Il 2 a sinistra significa che alla sua destra sta la formula (2). La deduzione che fa passare dalla (2) e dalla (1) alla (3), è qui espressa in modo

abbreviato, secondo l'abbreviazione spiegata nel paragrafo 6. Per esteso si sarebbe dovuto scriverla cosí:

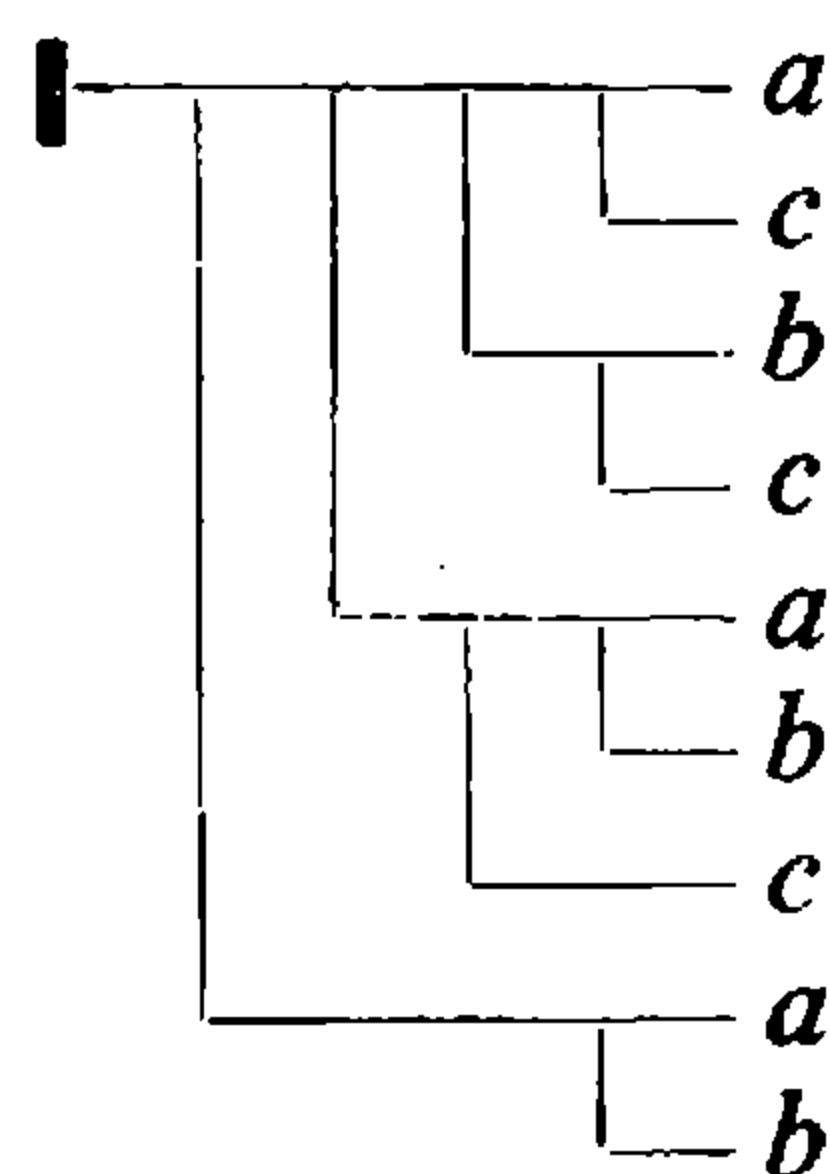
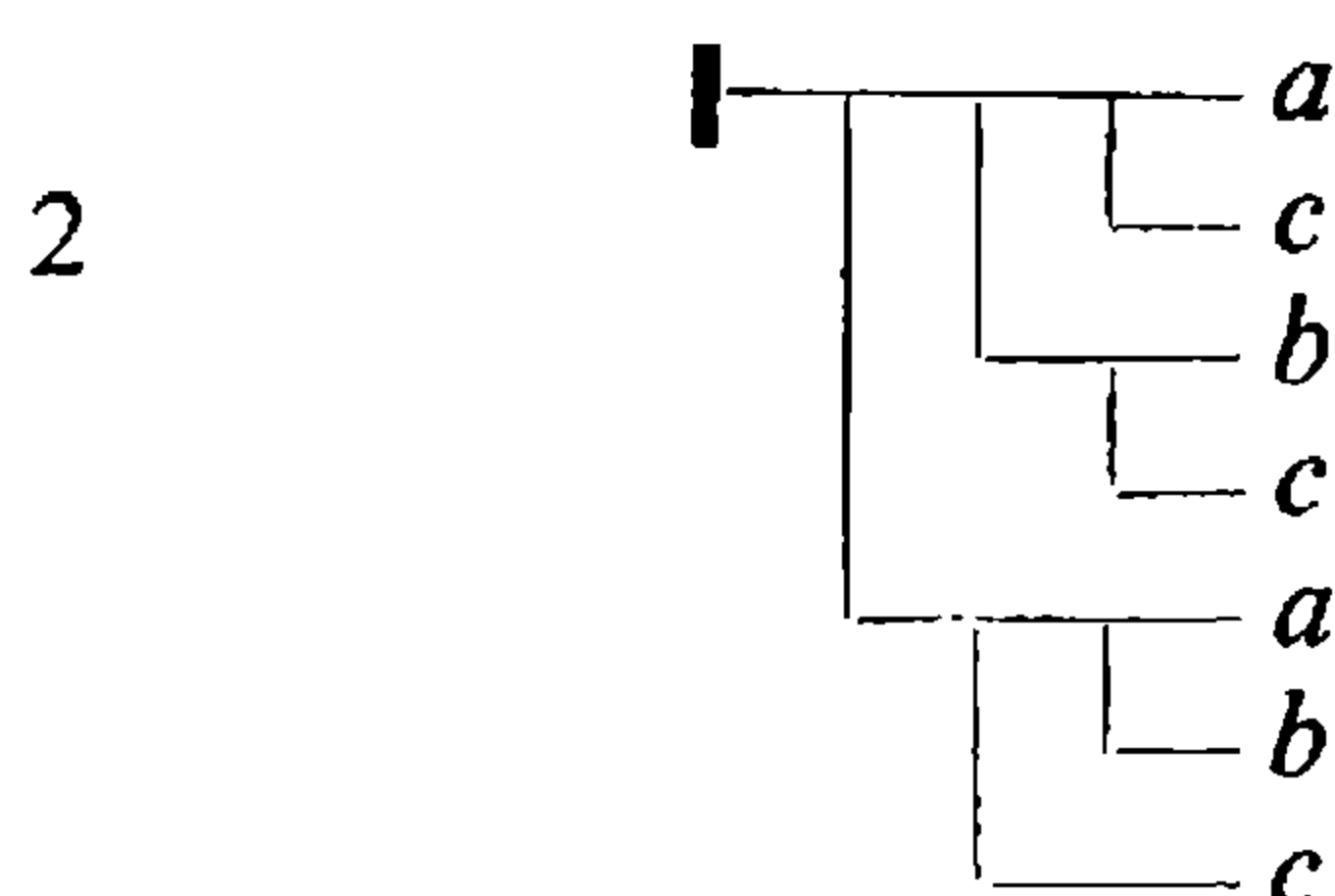
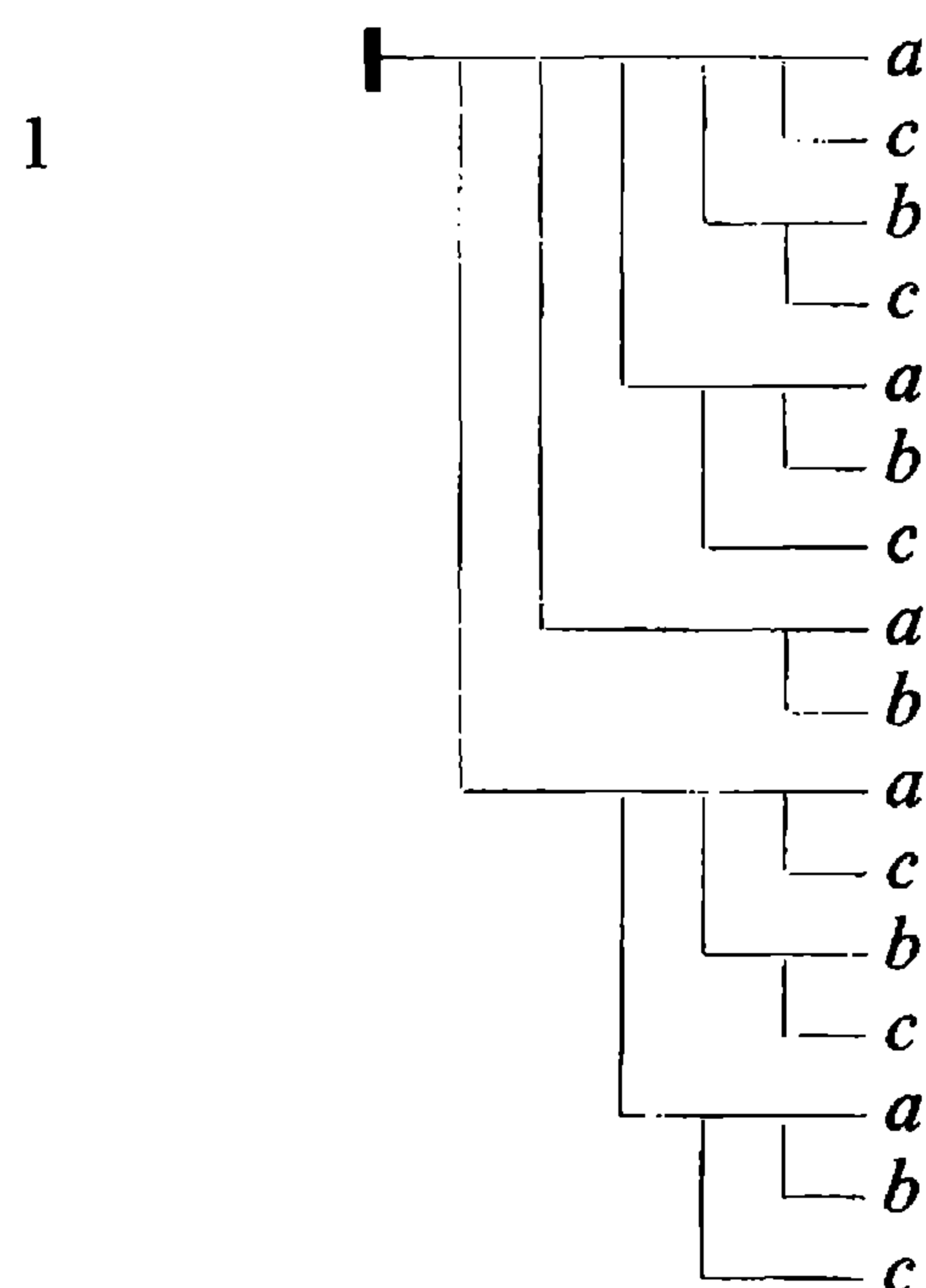
1

a
c
b
c
a
b
c
a
b
a
c
b
c
a
b
c

2

a
c
b
c
a
b
c

---

a
c
b
c
a
b
c
a
b

(3.

Per rendere piú facilmente riconoscibile la proposizione (1) nella

forma complicata in cui qui compare, serve la piccola tabella [1] posta sotto l'(1). Essa afferma che nella ⊢ a b a occorre sostituire

a
c
b
c
a
b
c

al posto di *a*, e

a
b

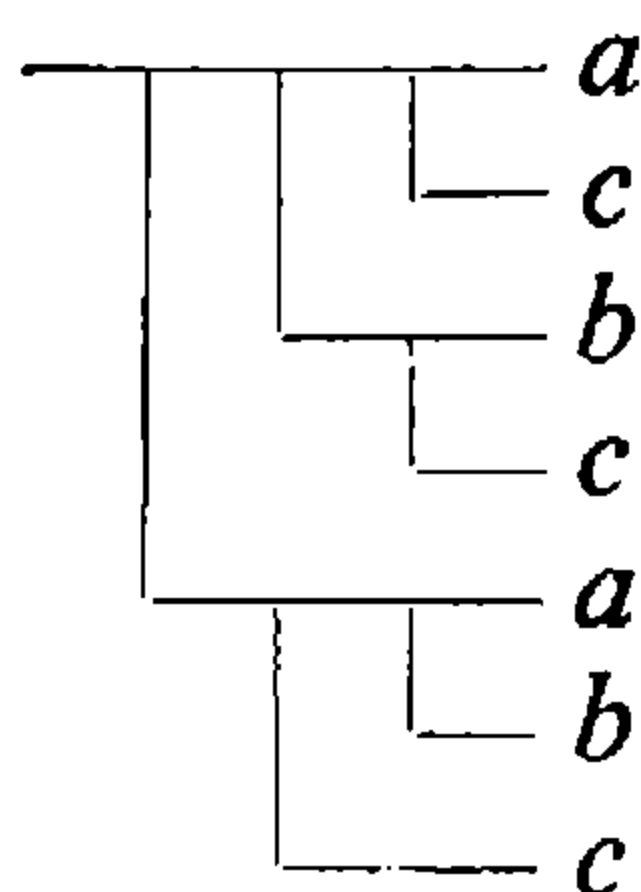
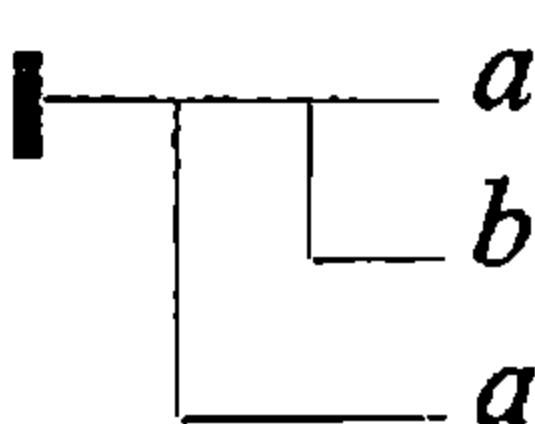
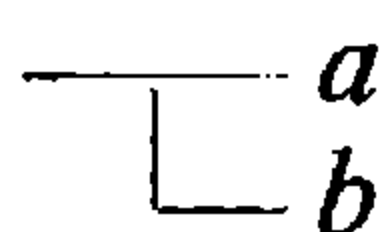
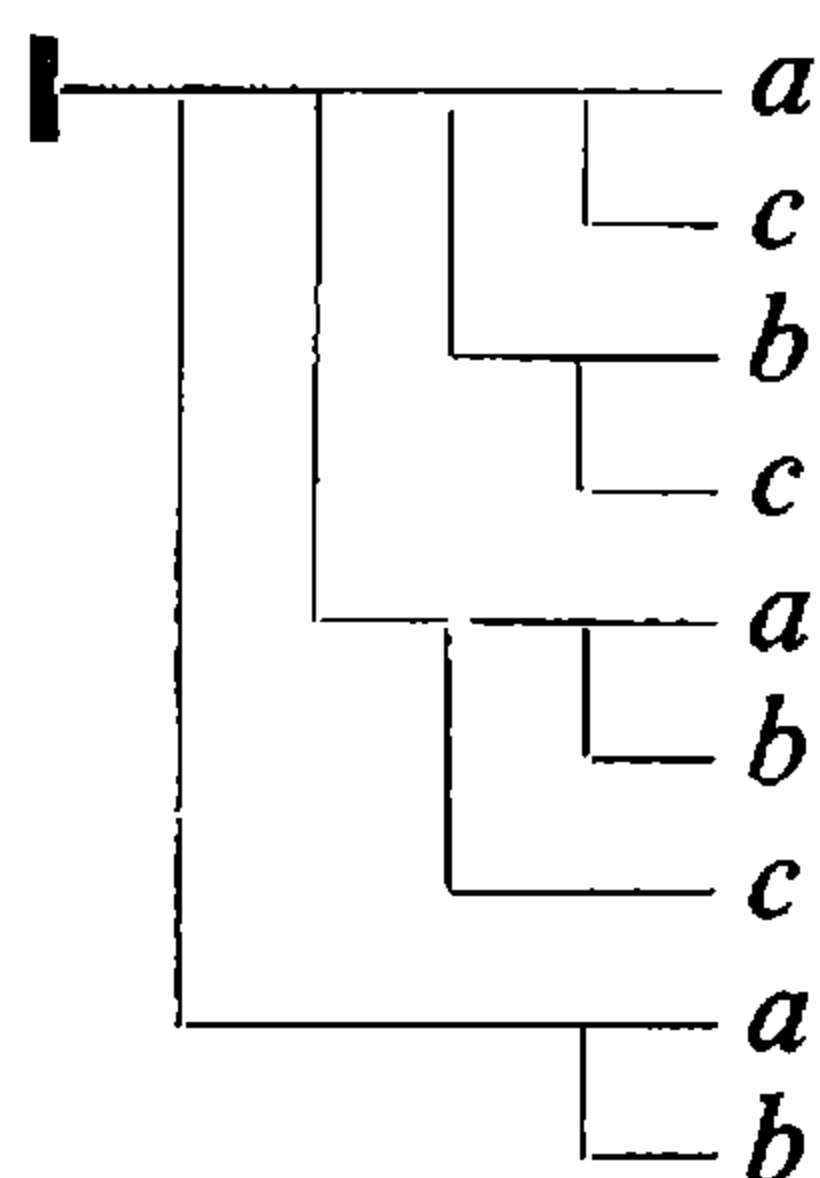
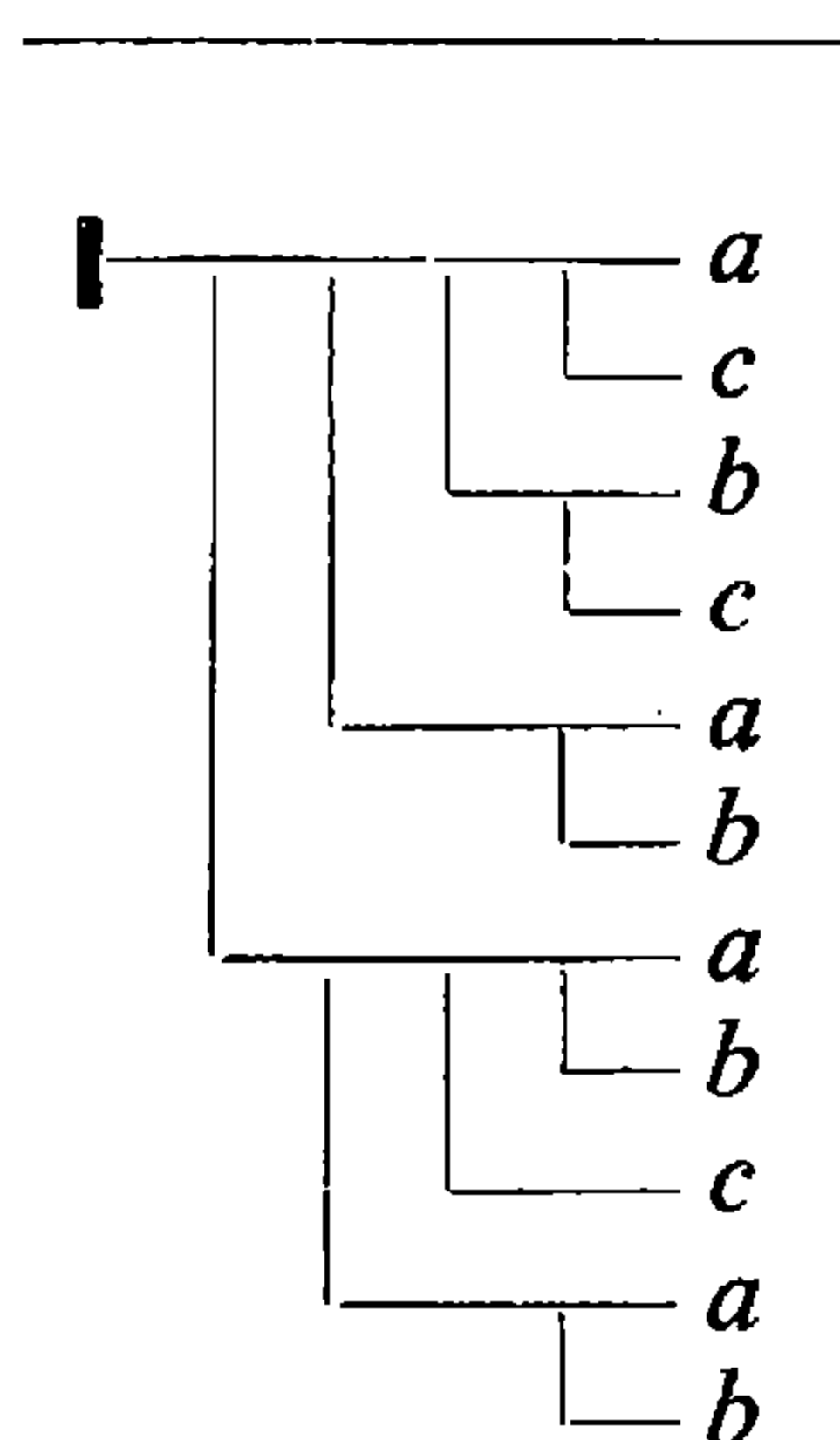
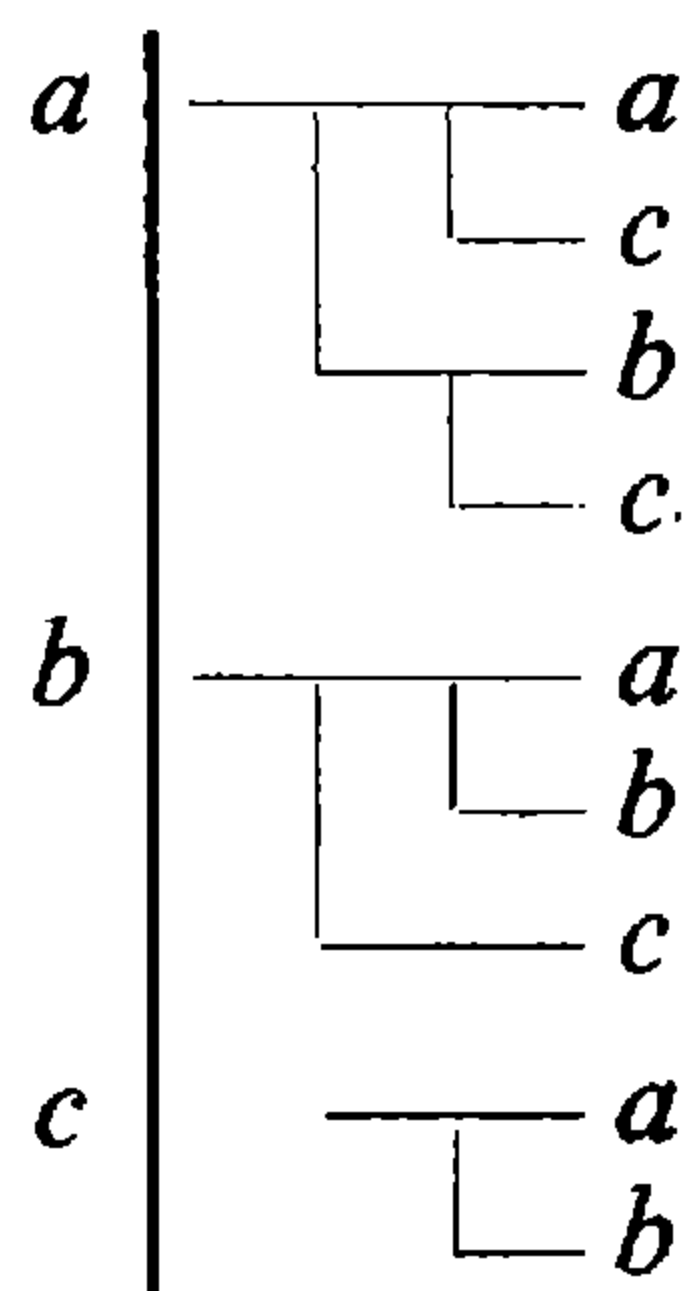
al posto di *b*.

3

⊢ a
c
b
c
a
b
c
a
b

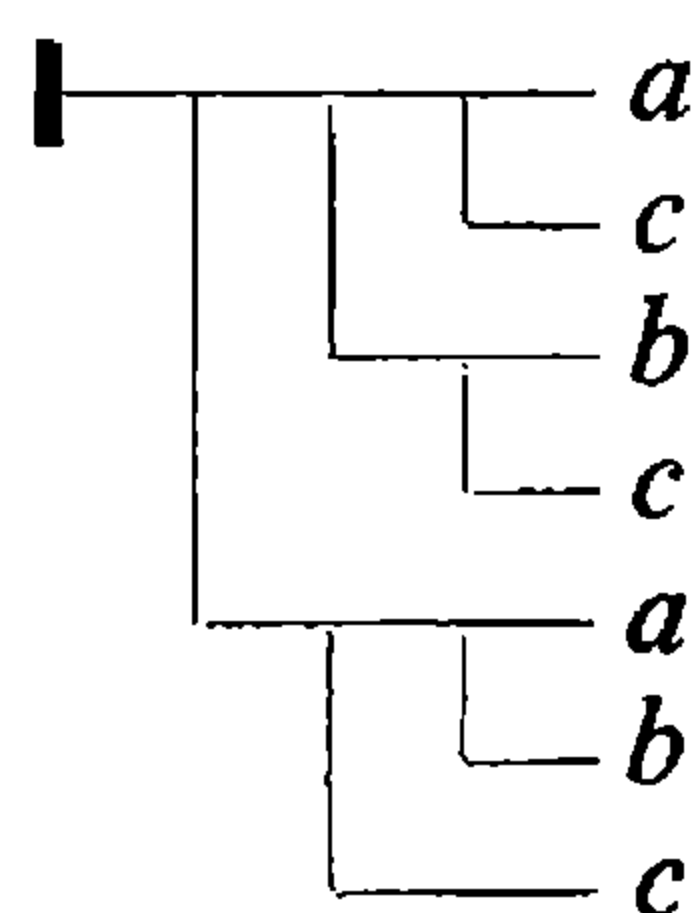
(2):

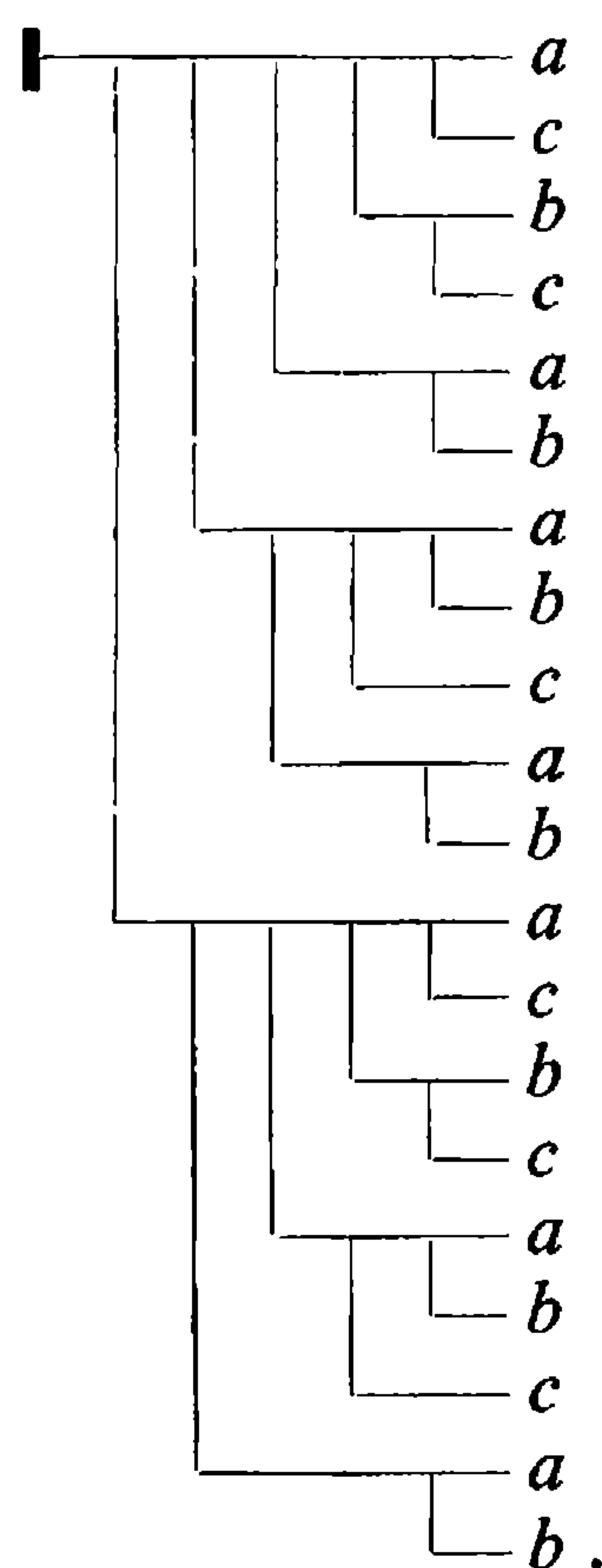
a	a c b c
b	a b c
c	a b

⊢ a
c
b
c
a
b
a
b
c
a
b

(4.

[1] [Nella tabella a sinistra in basso della formula (3) possiamo ravvisare la tacita assunzione della regola di sostituzione.]

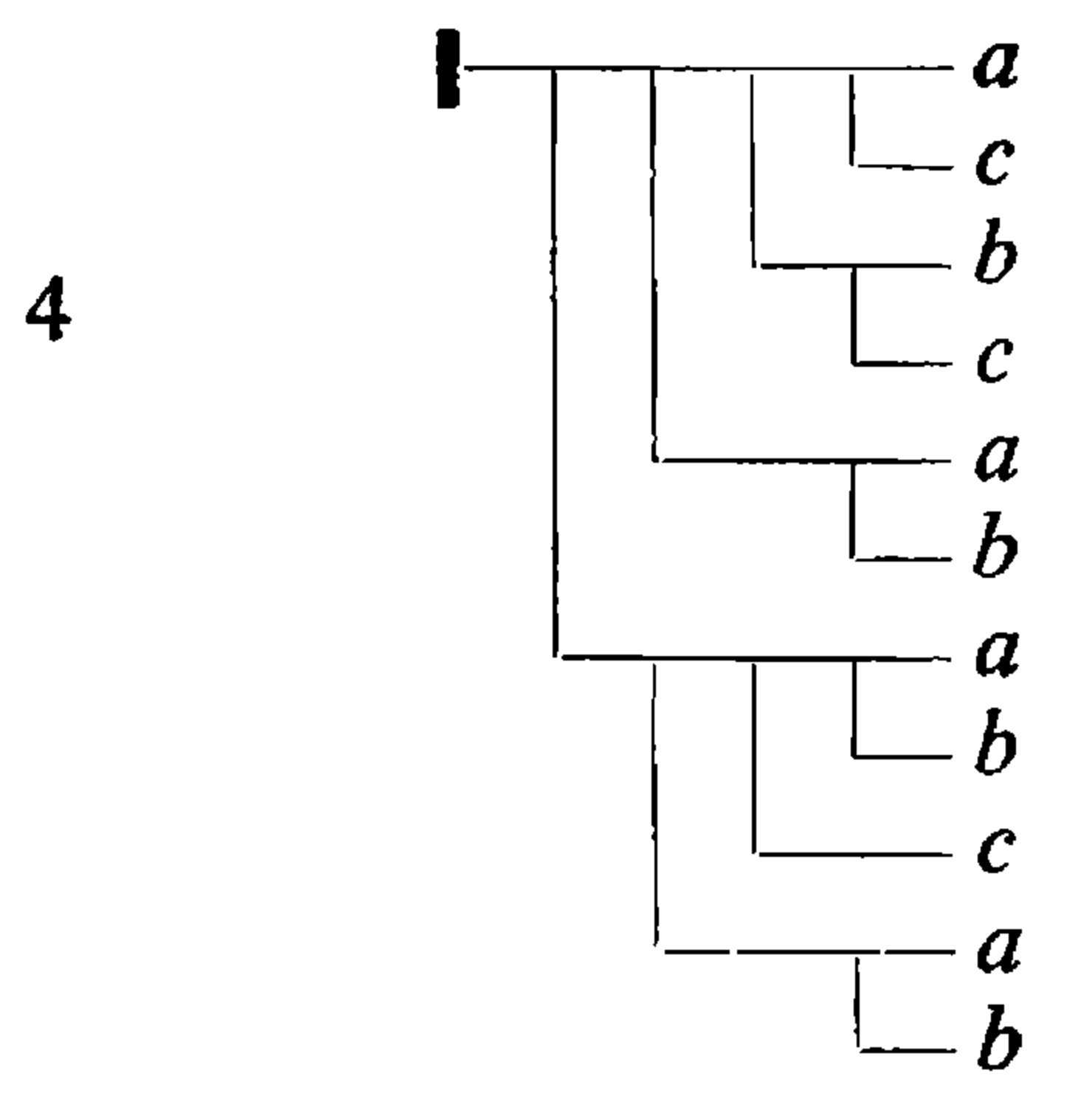
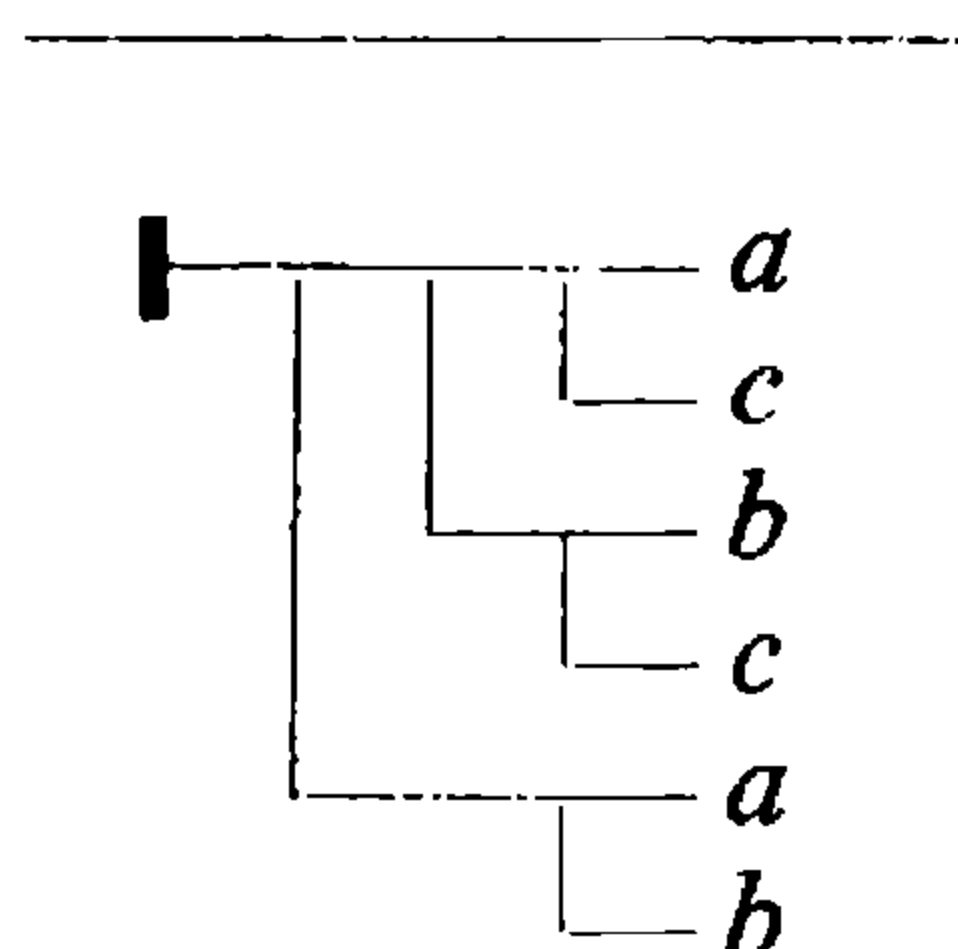
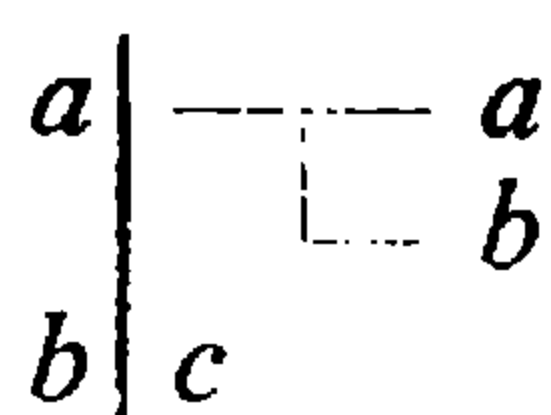
La tabella sotto il (2) significa che nella formula

```
⊢─┬──┬──┬─ a
  │  │  └─ c
  │  └──┬─ b
  │     └─ c
  └──┬──┬─ a
     │  └─ b
     └──── c
```

al posto di *a*, *b*, *c*, occorre sostituire le espressioni poste alla rispettiva destra, col che si ottiene

```
⊢─┬──┬──┬──┬──┬─ a
  │  │  │  │  └─ c
  │  │  │  └──┬─ b
  │  │  │     └─ c
  │  │  └─────┬─ a
  │  │        └─ b
  │  └──┬──┬──┬─ a
  │     │  │  └─ b
  │     │  └──── c
  │     └─────┬─ a
  │           └─ b
  └──┬──┬──┬──┬─ a
     │  │  │  └─ c
     │  │  └──┬─ b
     │  │     └─ c
     │  └──┬──┬─ a
     │     │  └─ b
     │     └──── c
     └────────┬─ a
              └─ b .
```

Si vede facilmente come da questa e dalla (3) segue la (4).

```
        ⊢─┬──┬──┬──┬─ a
          │  │  │  └─ c
          │  │  └──┬─ b
  4       │  │     └─ c
          │  └─────┬─ a
          │        └─ b
          └──┬──┬──┬─ a
             │  │  └─ b
             │  └──── c
             └─────┬─ a
                   └─ b
       ──────────────────
```

(1)::

a | a, b
b | c

⊢ a, c, b, c, a, b (5.

Il significato dei due punti ripetuti è stato spiegato nel paragrafo 6.
Esempio per la (5). Sia
a la circostanza che un pezzo di ferro *E* si magnetizza;
b la circostanza che il conduttore *D* è percorso da una corrente elettrica;
c la circostanza che viene abbassato l'interruttore *T*.

Allora otteniamo il giudizio:

"Se vale la proposizione che *E* si magnetizza non appena *D* è percorso da una corrente elettrica;
se inoltre vale la proposizione che non appena *T* viene abbassato *D* è percorso da una corrente:
allora *E* si magnetizza se *T* viene abbassato."

Se facciamo l'ipotesi di connessioni causali, la (5) può venire cosí espressa:

"Se *b* è una condizione sufficiente per *a*, se *c* è una condizione sufficiente per *b*, allora *c* è una condizione sufficiente per *a*."

5

c | d

⊢ a, d, b, d, a, b

(5):

a | a, d, b, d
b | a, b

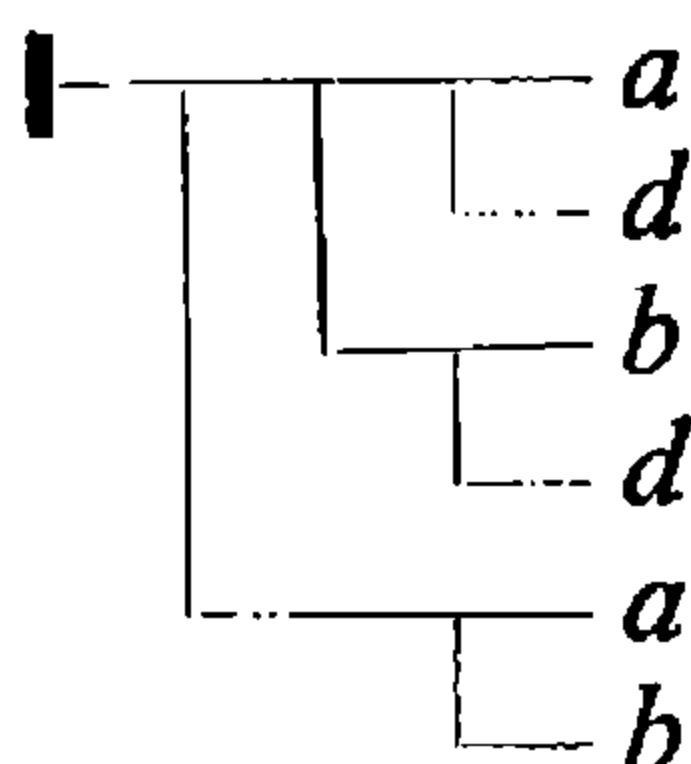
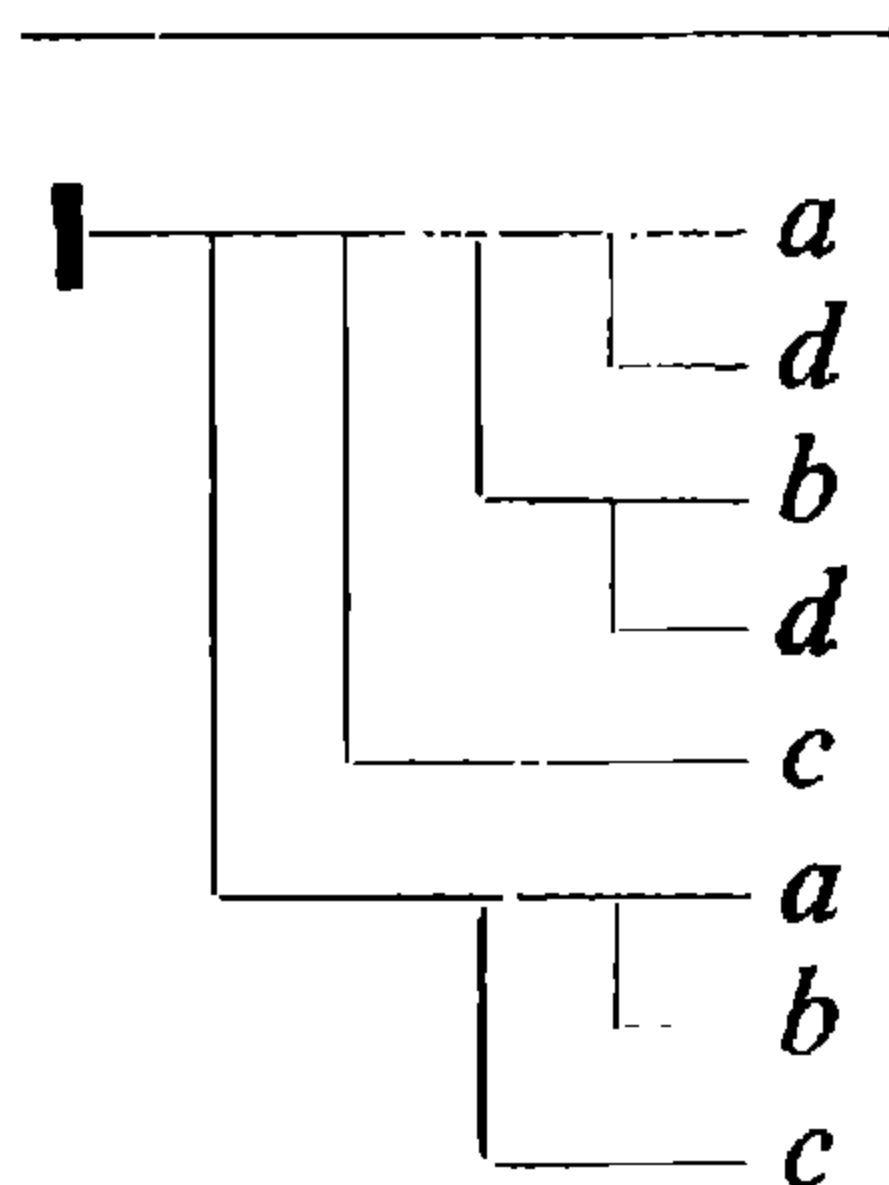
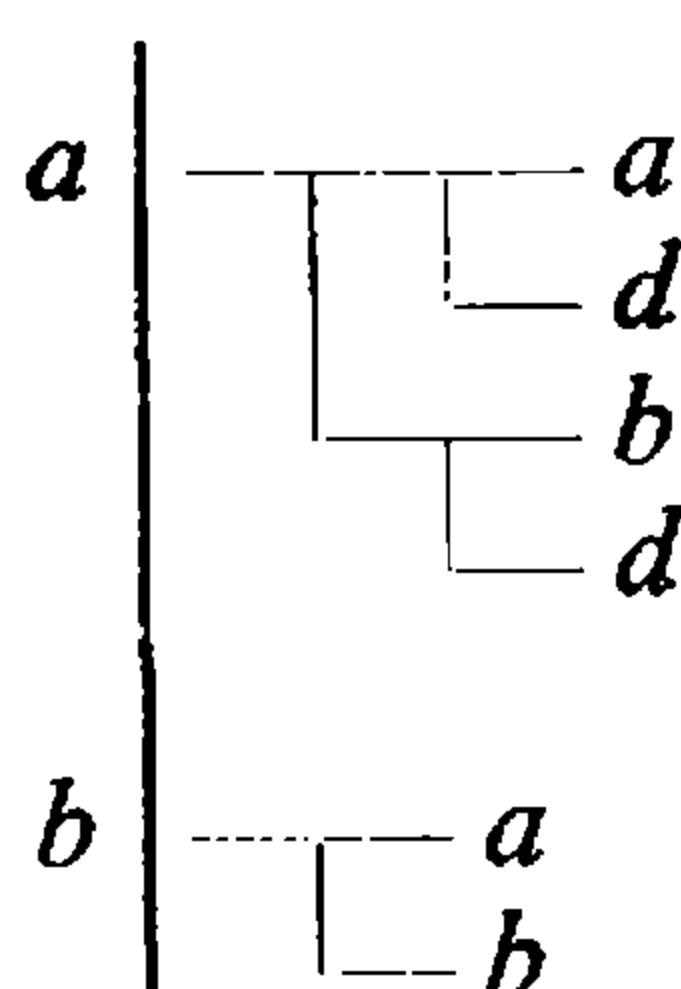
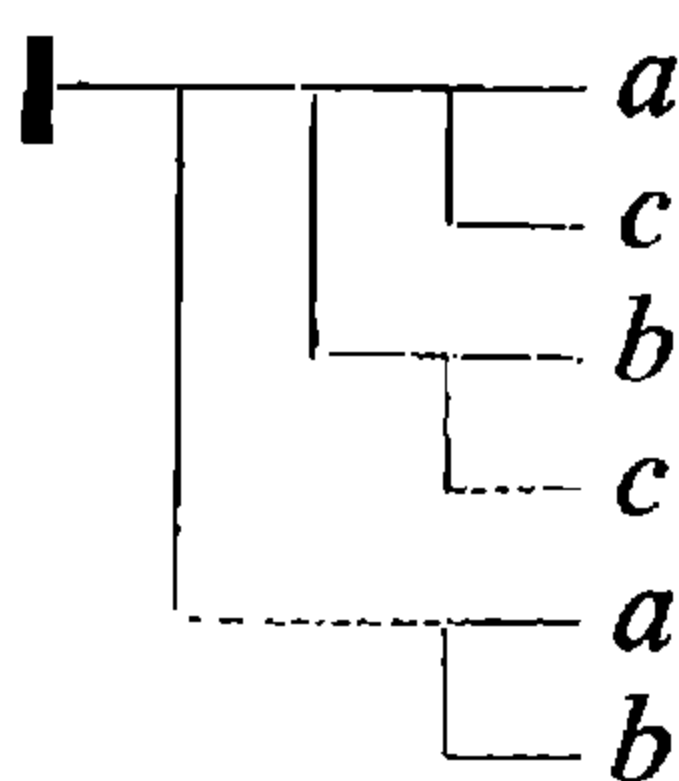
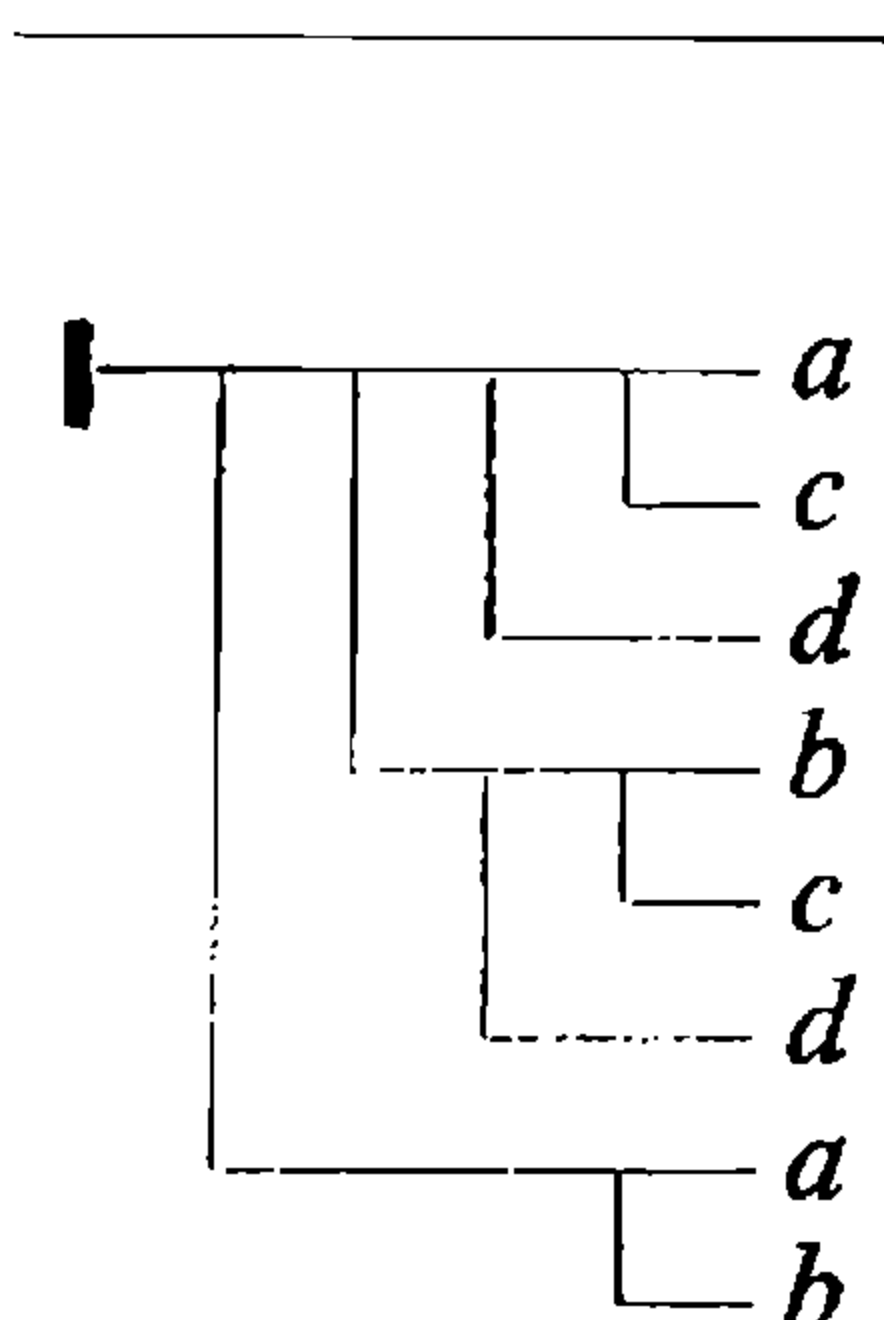
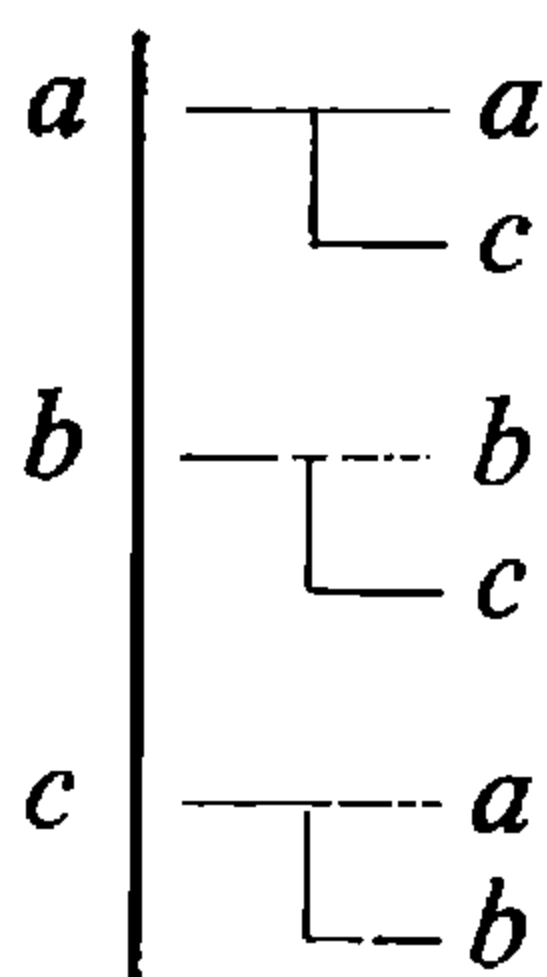
⊢ a, d, b, d, c, a, b, c (6.

5

a
c
b
c
a
b

(6):

a | a c
b | b c
c | a b

a
c
d
b
c
d
a
b

(7.

Questa proposizione si distingue dalla (5) soltanto per il fatto che in luogo dell'unica condizione *c*, ne sono intervenute due, *c* e *d*.

Esempio per la (7). Significhino:

d la circostanza che il pistone *K* di una pompa aspirante viene spostato dal suo punto morto interno al punto morto esterno;

c la circostanza che il rubinetto *H* si trova nella posizione *I*;

b la circostanza che la densità *D* dell'aria nel cilindro della pompa viene dimezzata;

a la circostanza che l'altezza *H* della colonna di un barometro collegato col cilindro della pompa si riduce alla metà.

Allora otteniamo il seguente giudizio:

"Se vale la proposizione che l'altezza *H* della colonna barometrica si riduce alla metà, non appena la densità *D* dell'aria viene dimezzata;

"se inoltre vale la proposizione che la densità *D* dell'aria si dimezza, se il pistone *K* viene spostato dal punto morto interno a quello esterno e se il rubinetto *H* si trova nella posizione *I*:

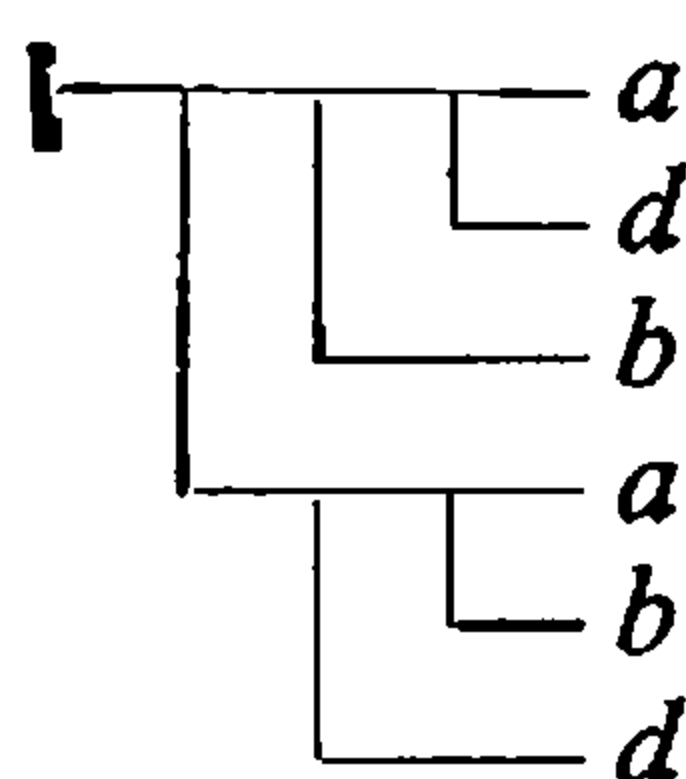
allora ne segue

che l'altezza *H* della colonna barometrica si riduce a metà, se il pistone *K* viene spostato dal punto morto interno a quello esterno, mentre il rubinetto *H* si trova nella posizione *I*."

16. Il terzo principio della condizionalità e sue conseguenze

```
|-+--+--+-- a
  |  |  +-- d
  |  +----- b
  +--+--+-- a
     |  +-- b
     +----- d
```

(8

```
--+--+-- a
  |  +-- b
  +----- d
```

significa che non ha luogo il caso nel quale *a* viene negata ma *b* e *d* affermate:

```
--+--+-- a
  |  +-- d
  +----- b
```

ha lo stesso significato, e la (8) dice che è escluso il caso in cui

```
--+--+-- a
  |  +-- d
  +----- b
```

viene negato e

```
--+--+-- a
  |  +-- b
  +----- d
```

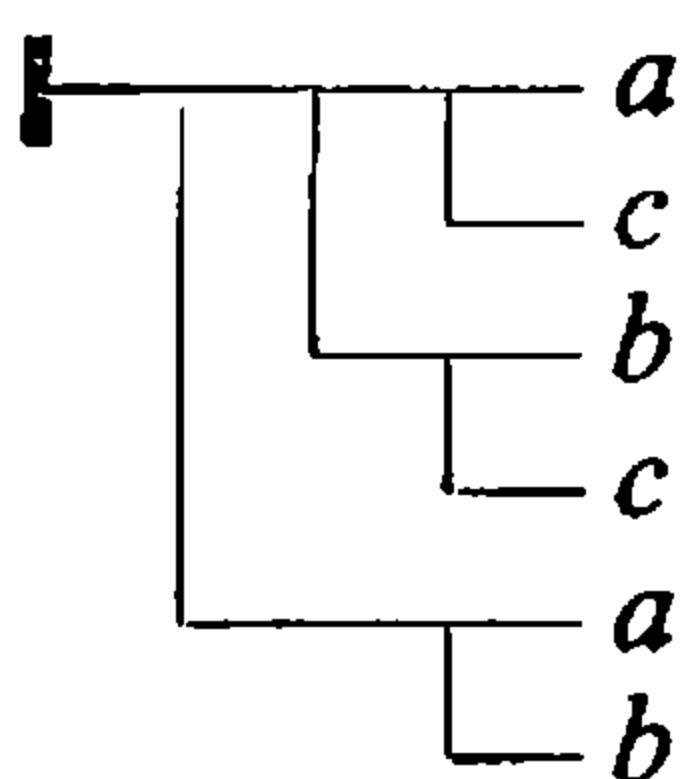
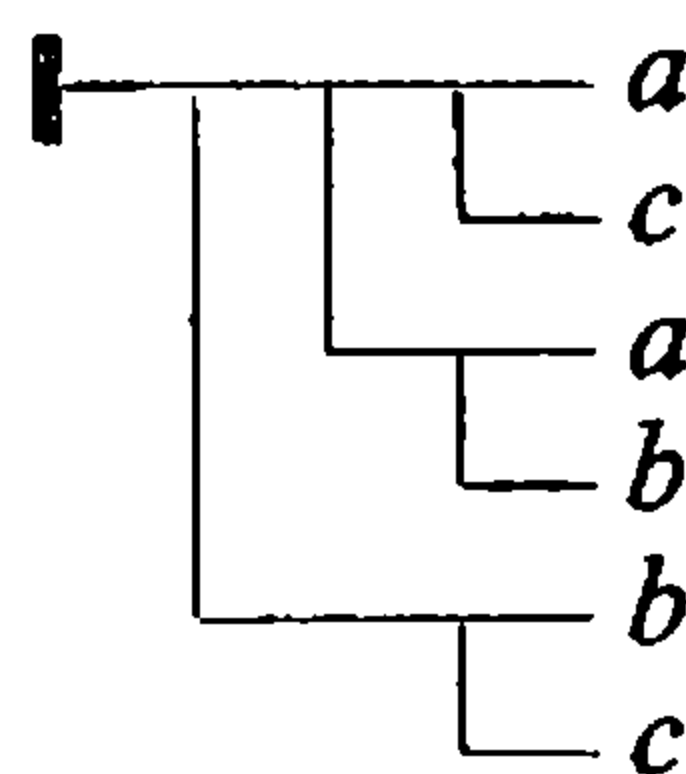
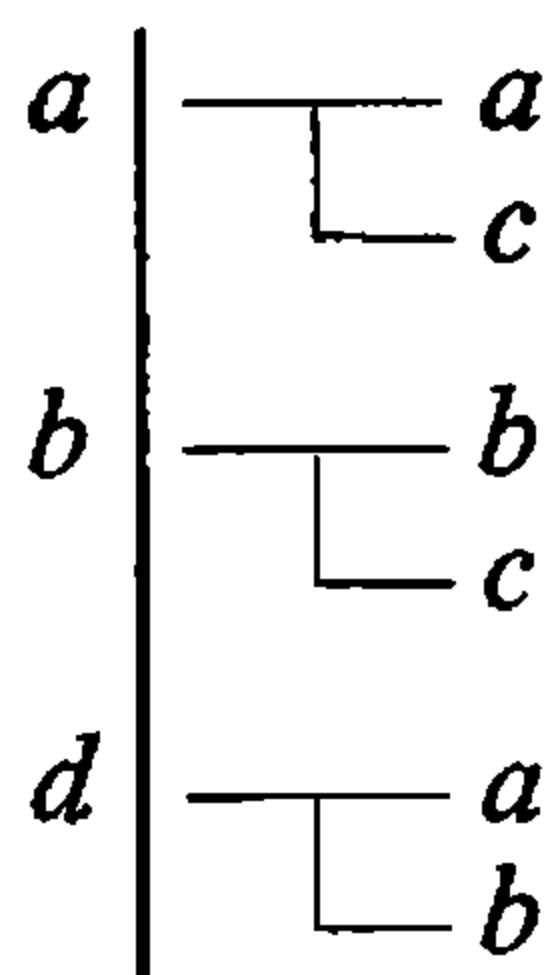
affermato. Questo può anche esprimersi come segue: "Se una proposizione è conseguenza di due condizioni, è indifferente l'ordine con cui queste si succedono."[1]

5

```
|-+--+--+-- a
  |  |  +-- c
  |  +--+-- b
  |     +-- c
  +-----+-- a
        +-- b
```

(8):

```
a | --+-- a
  |   +-- c
  |
b | --+-- b
  |   +-- c
  |
d | --+-- a
  |   +-- b
```

```
|-+--+--+-- a
  |  |  +-- c
  |  +--+-- a
  |     +-- b
  +-----+-- b
        +-- c
```

(9.

[1] [È questo il terzo assioma del sistema di Frege, che nel nostro simbolismo assume la forma $(p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow(q\rightarrow(p\rightarrow r))$, e rappresenta la nota legge di scambio dell'antecedente.]

Questa proposizione si distingue dalla (5) solo in modo inessenziale.

8

$a \mid b$
$b \mid e$

⊢ b d e b e d

(9):

$b \mid$ b d e

$c \mid$ b e d

⊢ a b e d a b d e (10.

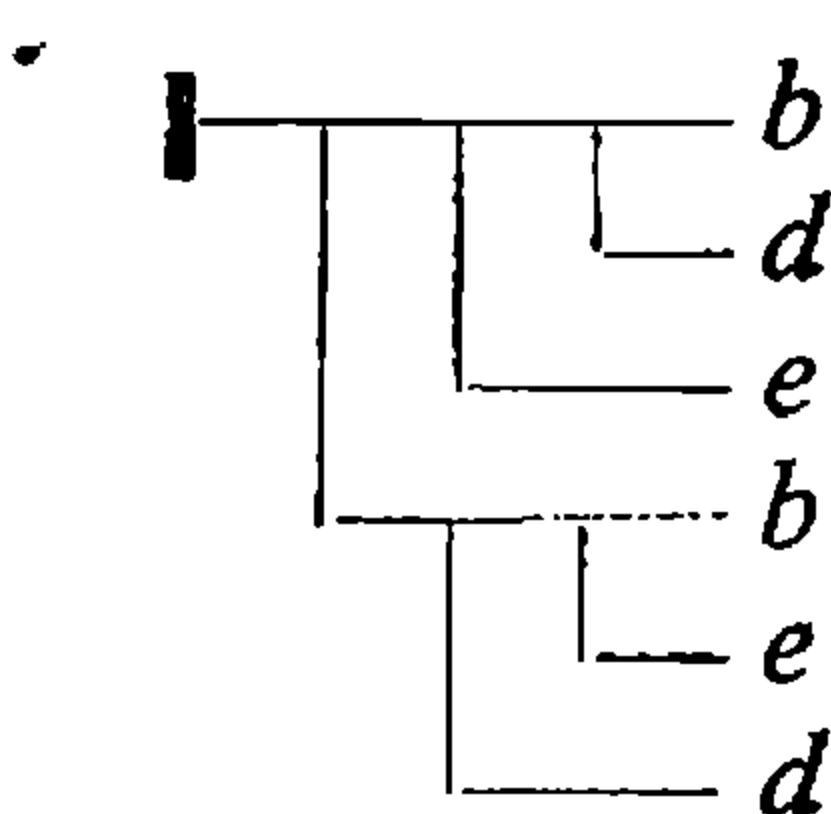
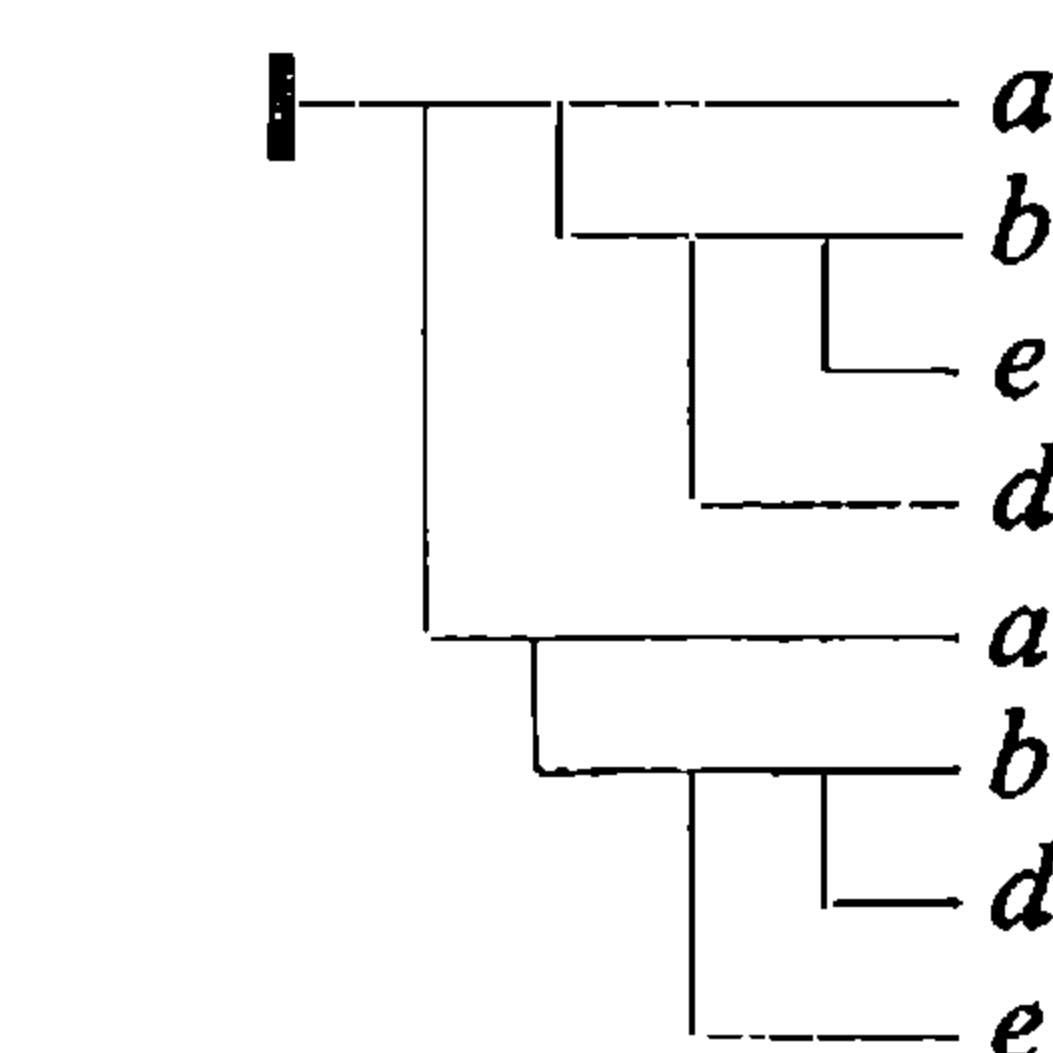
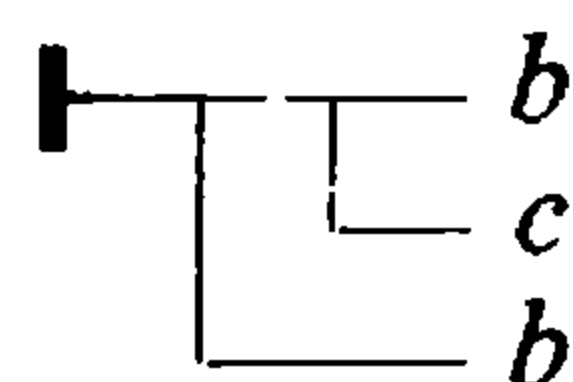
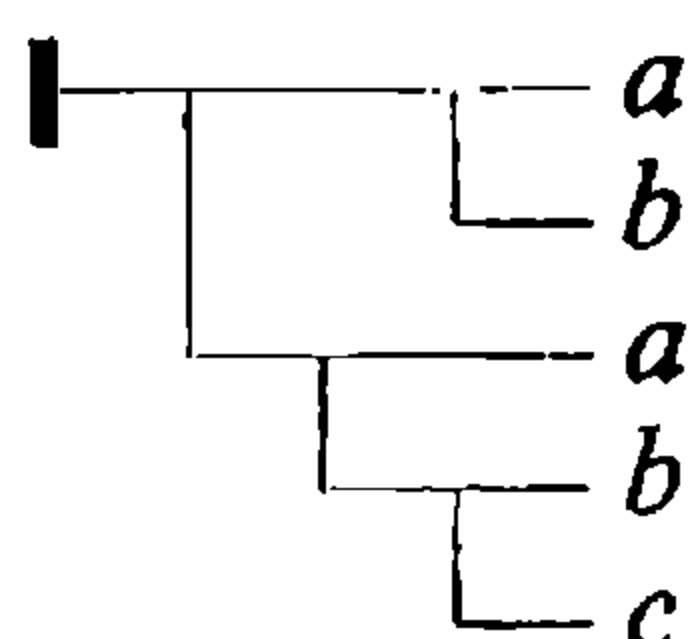
1

$a \mid b$
$b \mid c$

⊢ b c b

(9):

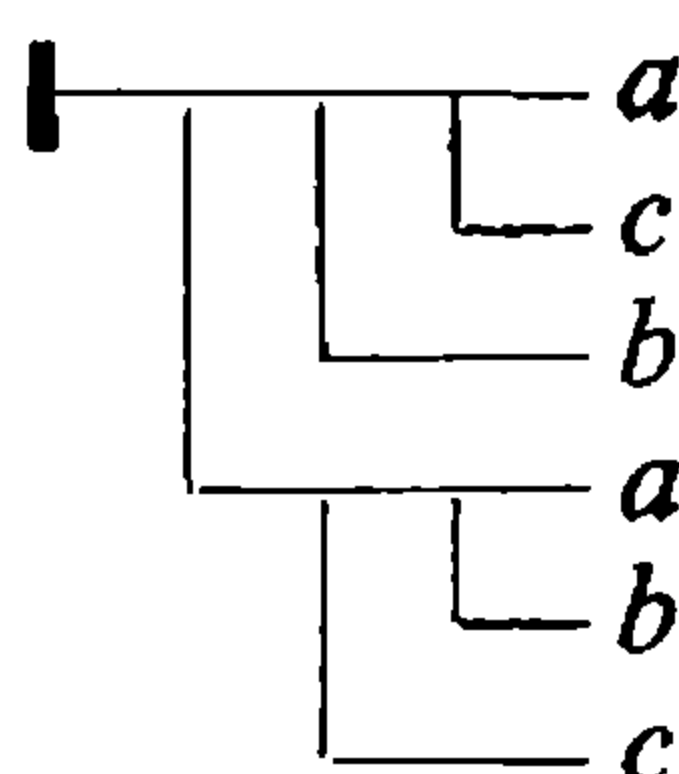
$b \mid$ b c

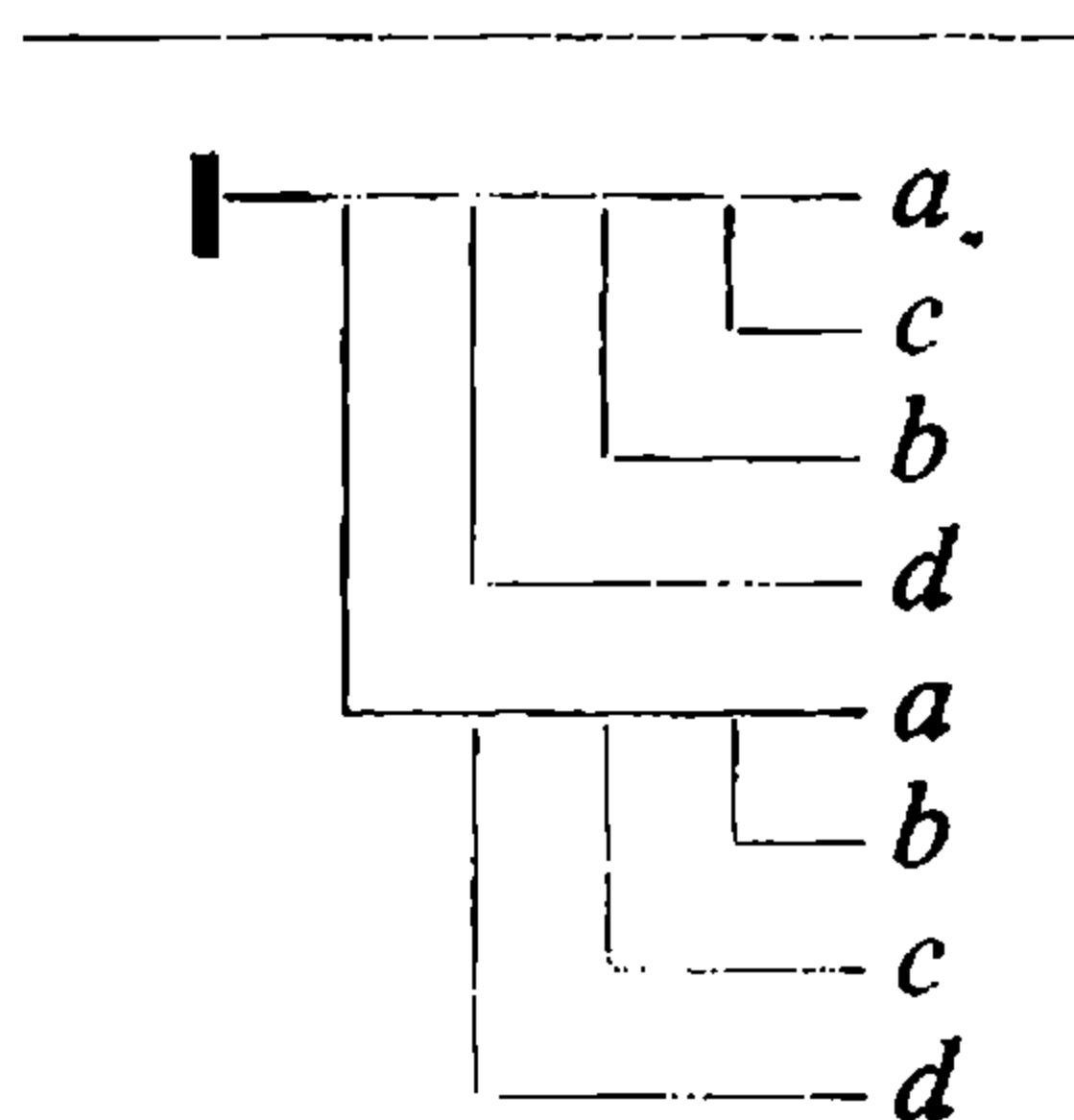
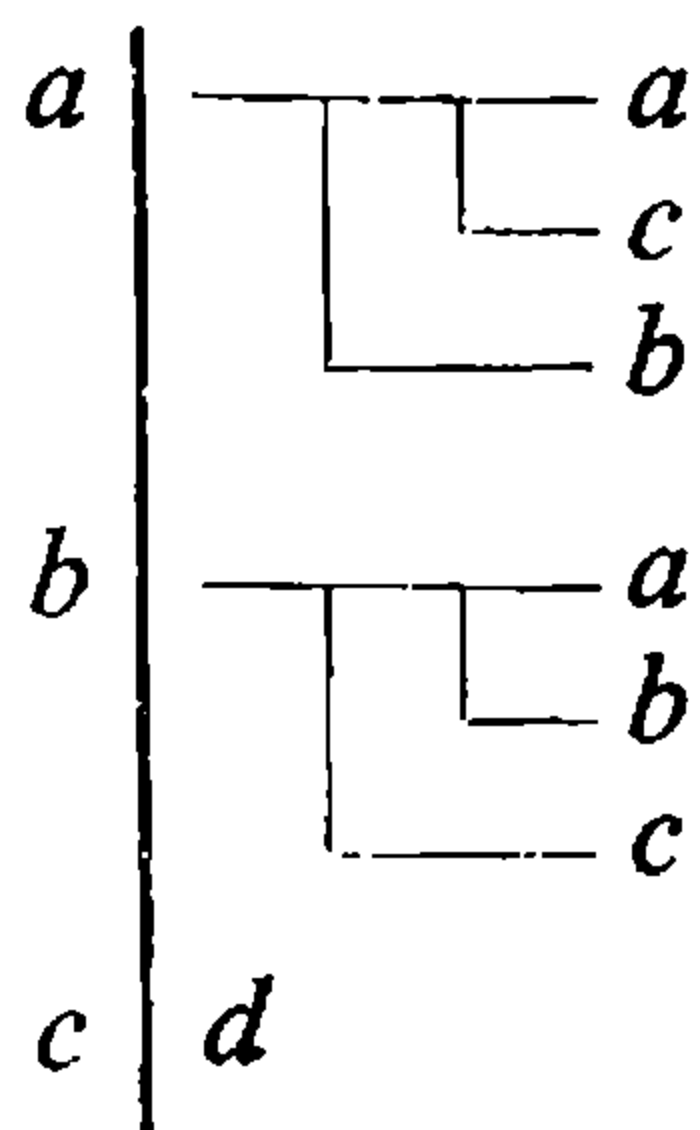
$c \mid b$

⊢ a b a b c (11.

Questa formula può tradursi cosí: “Se la proposizione che ha luogo b o non c, è una condizione sufficiente per a; allora la sola b è una condizione sufficiente per a.”

8

$d \mid c$

⊢ a c b a b c

(5):

(5):

(12.

Le proposizioni dalla (12) alla (17), e la (22) mostrano come, nel caso in cui ci siano piú condizioni, sia possibile variarne l'ordine.

12

(12):

(13.

(5):

(14.

(12):

(12):

a | a c d
c | e
d | a b c d e

a c d e b a b c d e

(15.

12

a c b d a b c d

(5):

a | a c b d
b | a b c d
c | e

a c b d e a b c d e

(16.

8

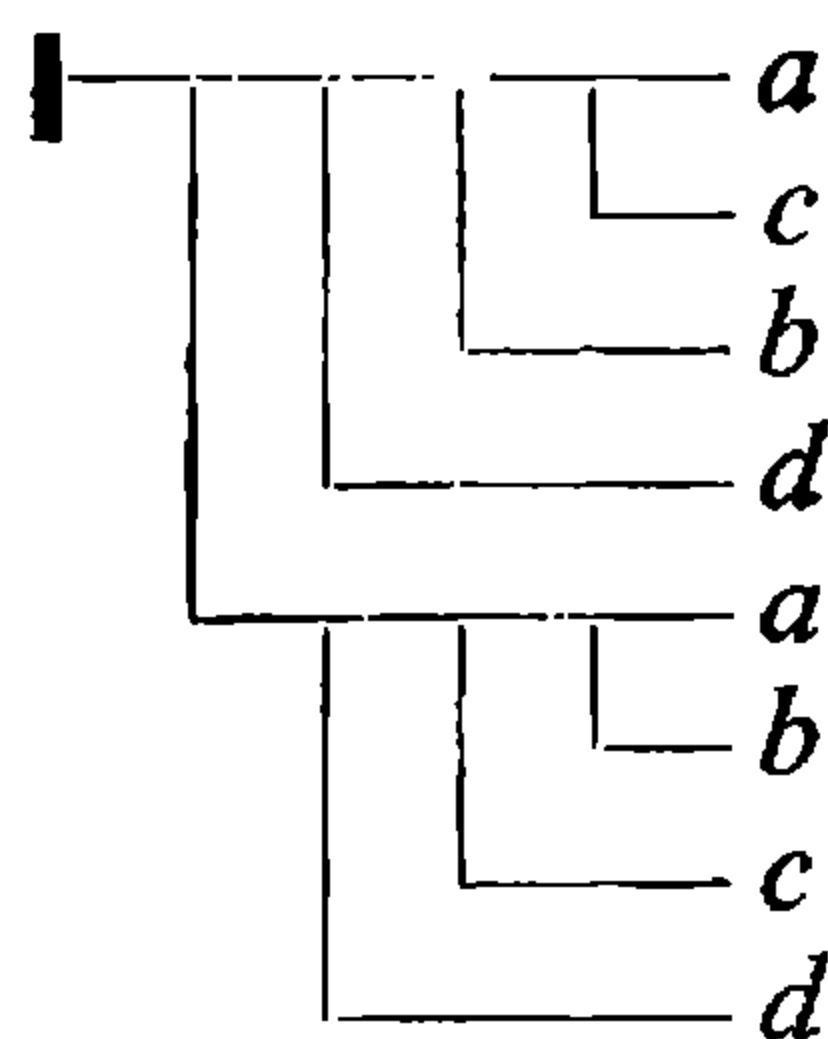
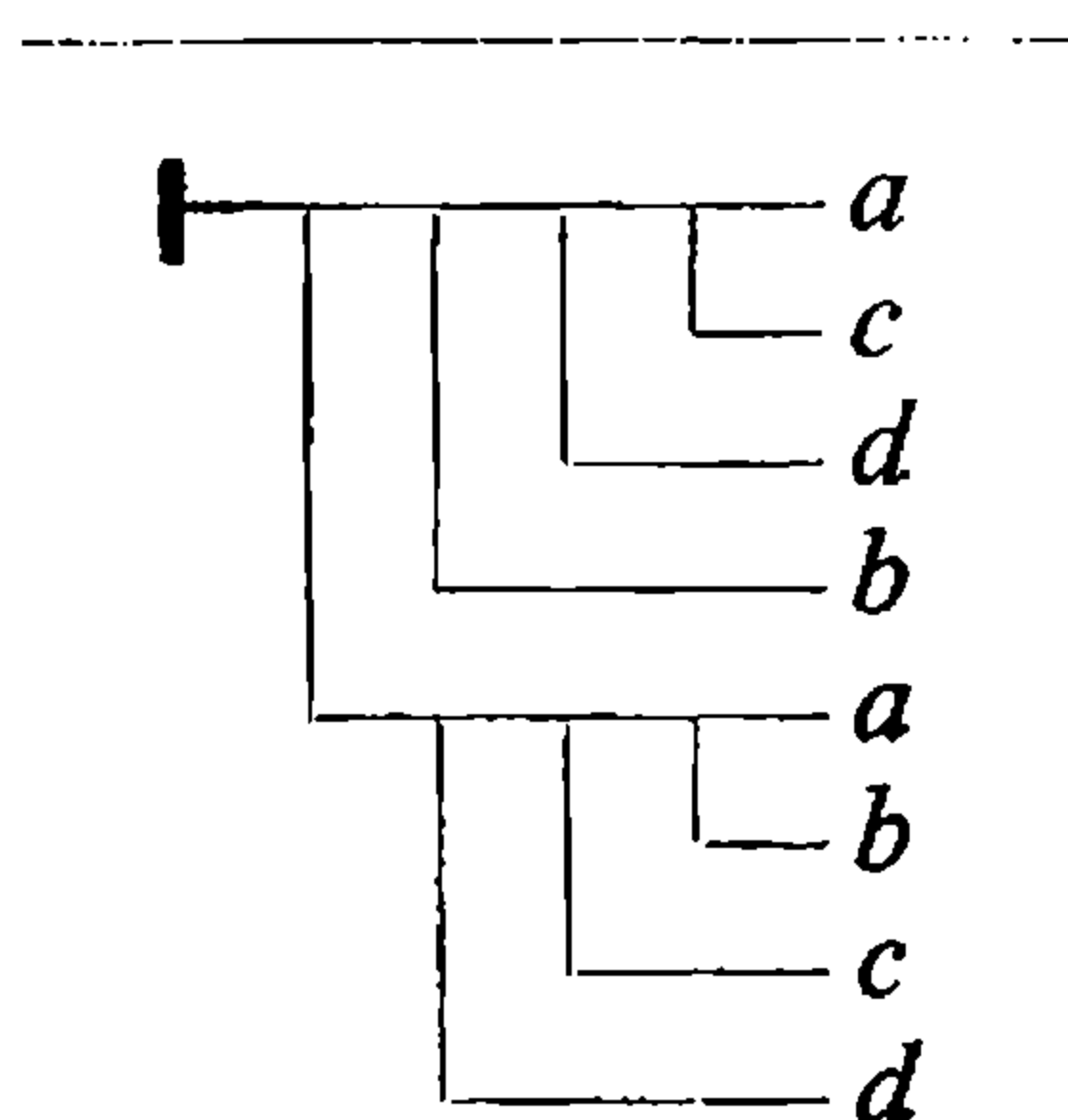
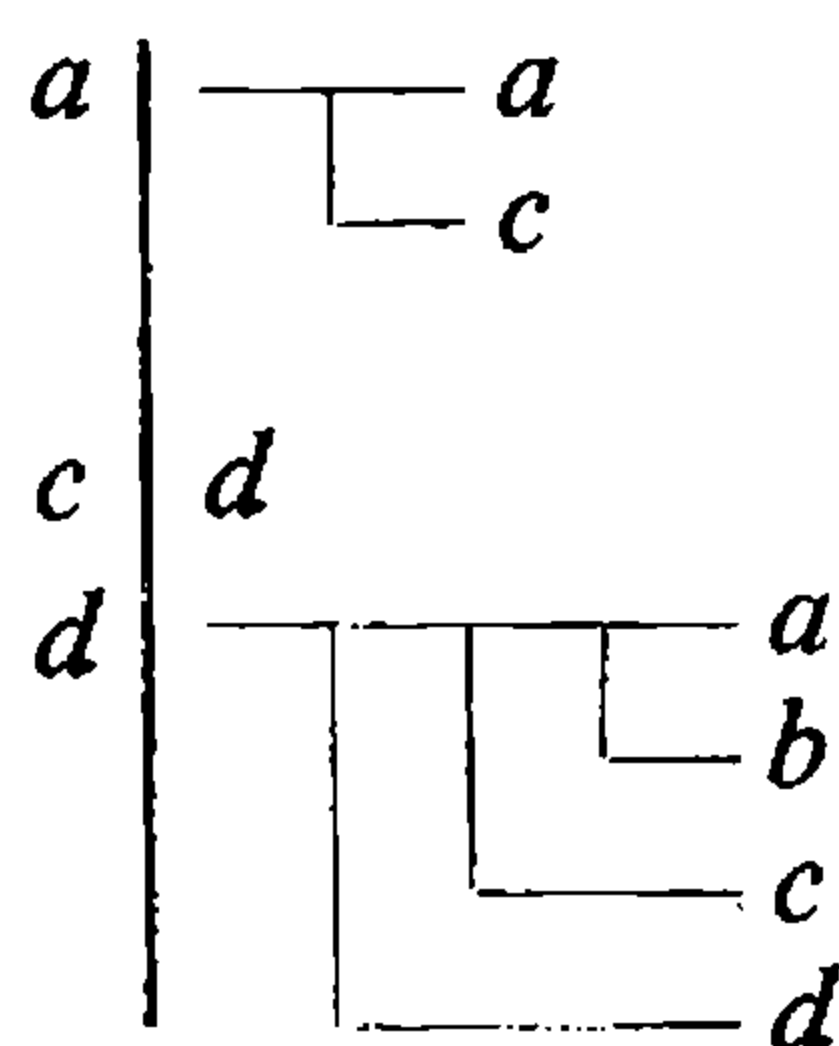
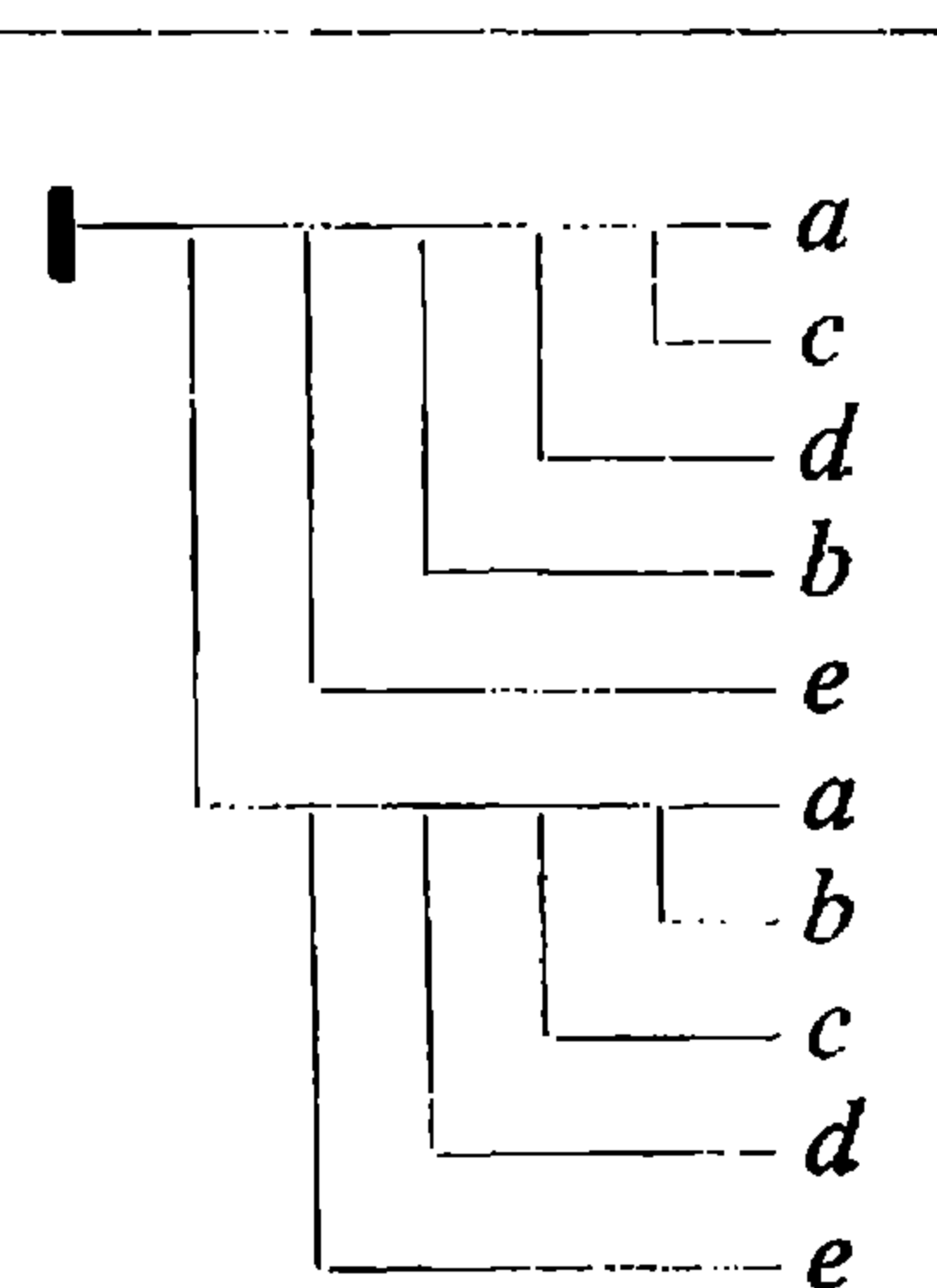
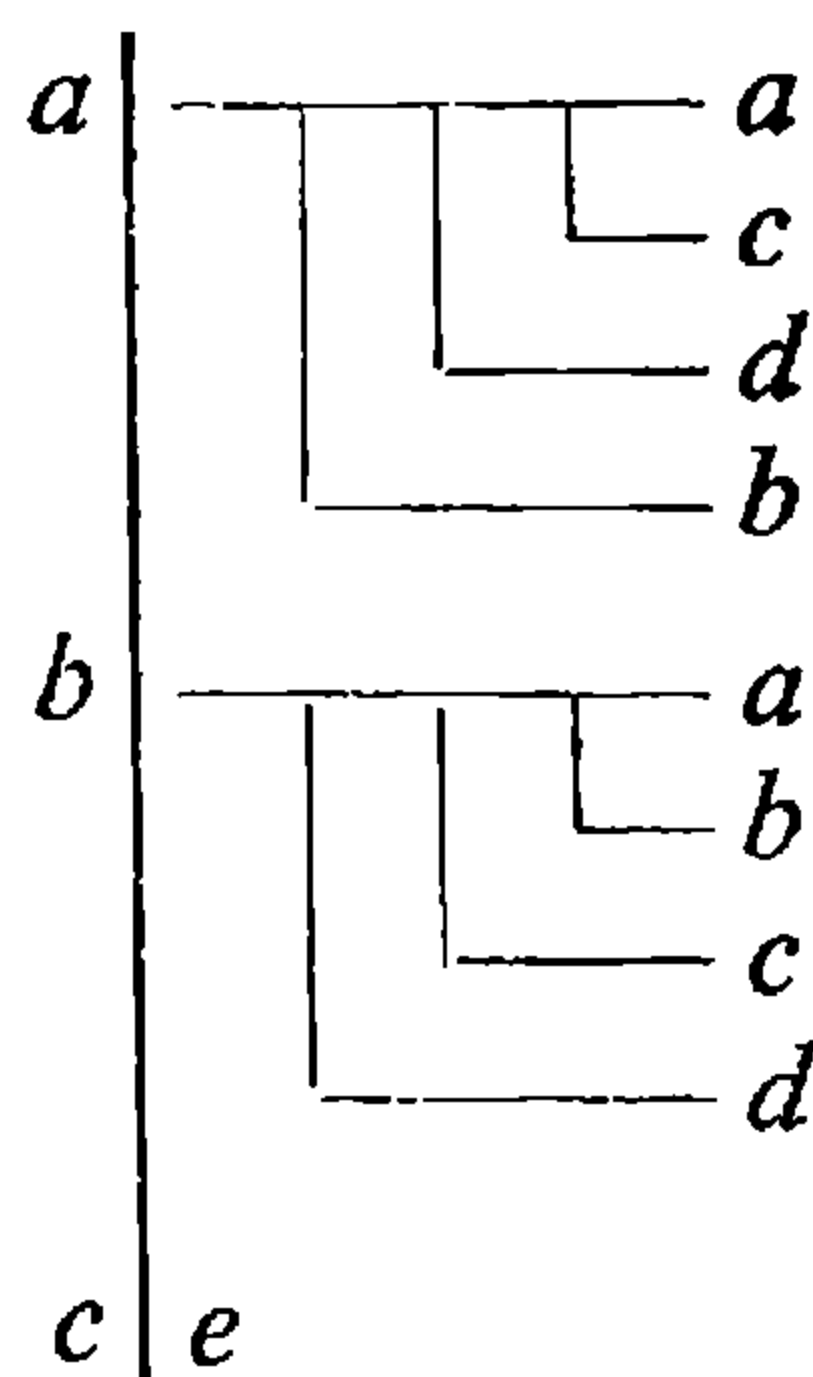
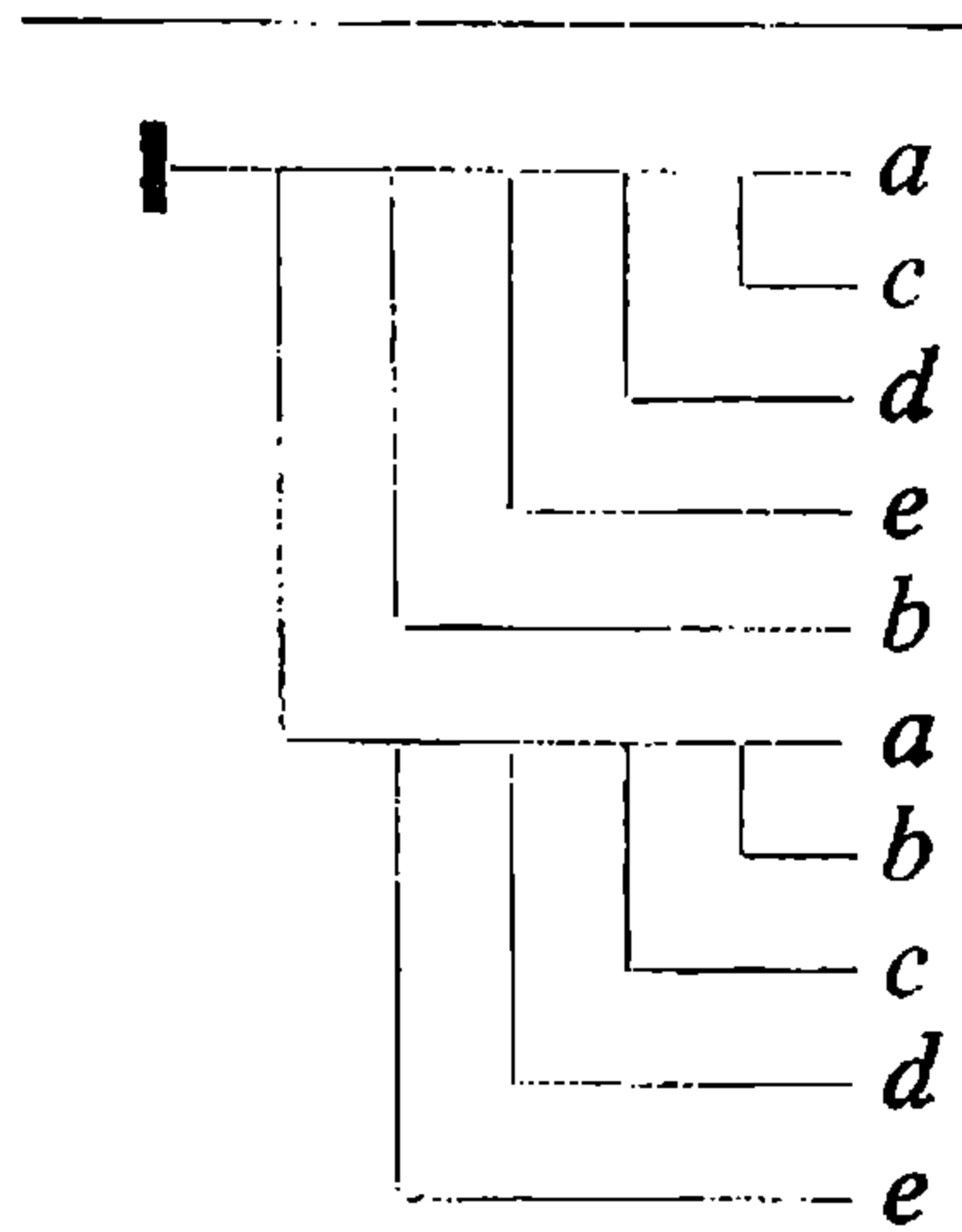
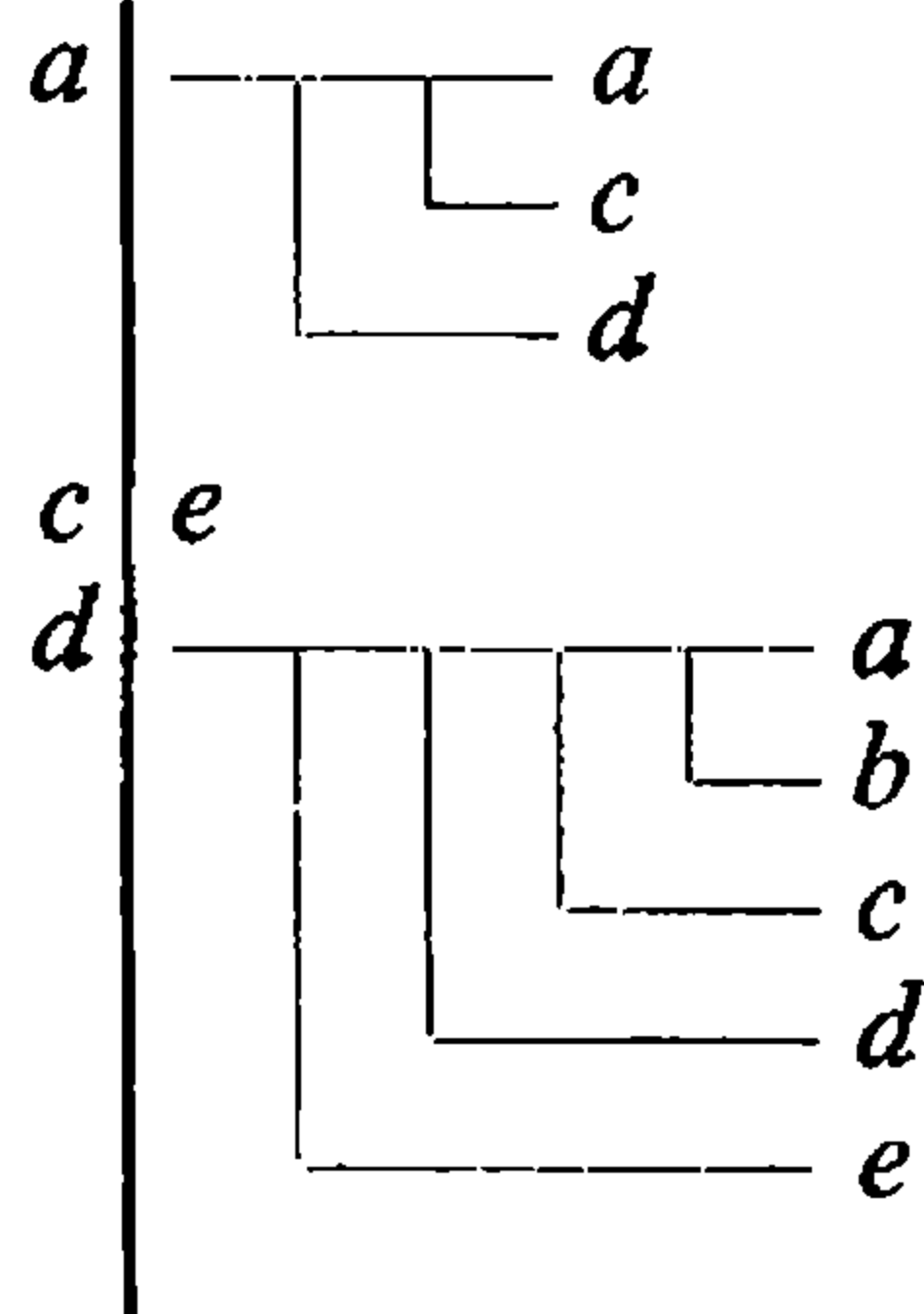
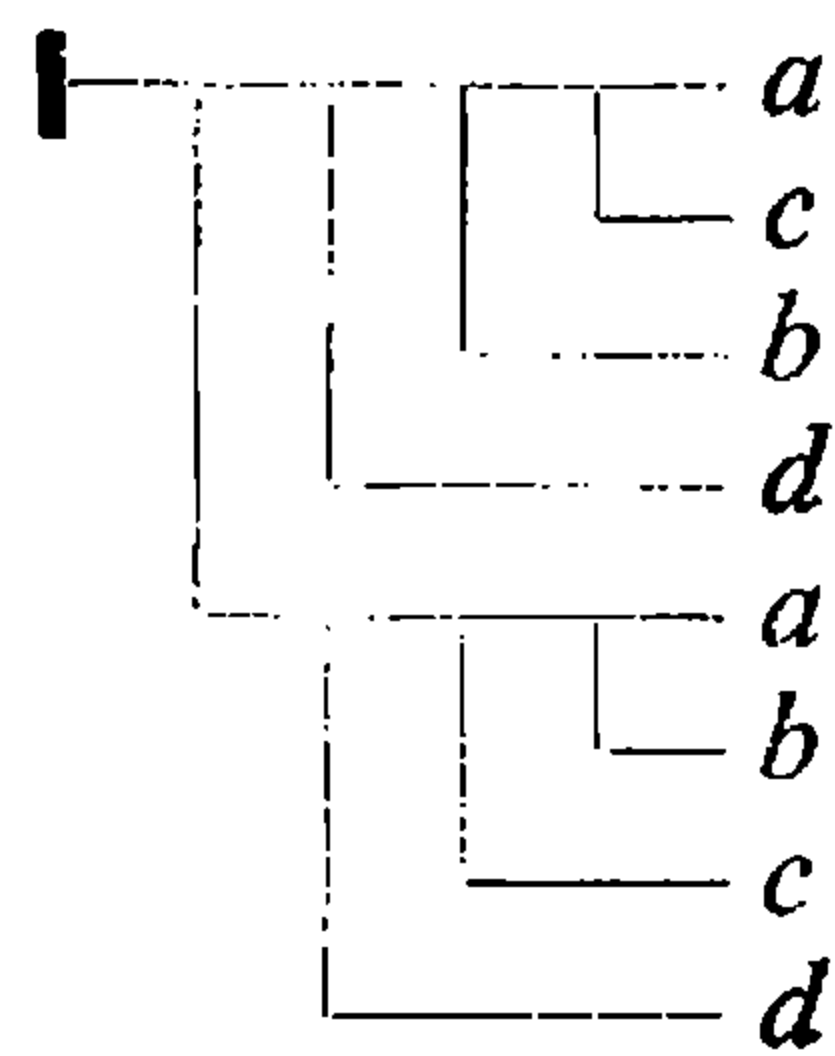
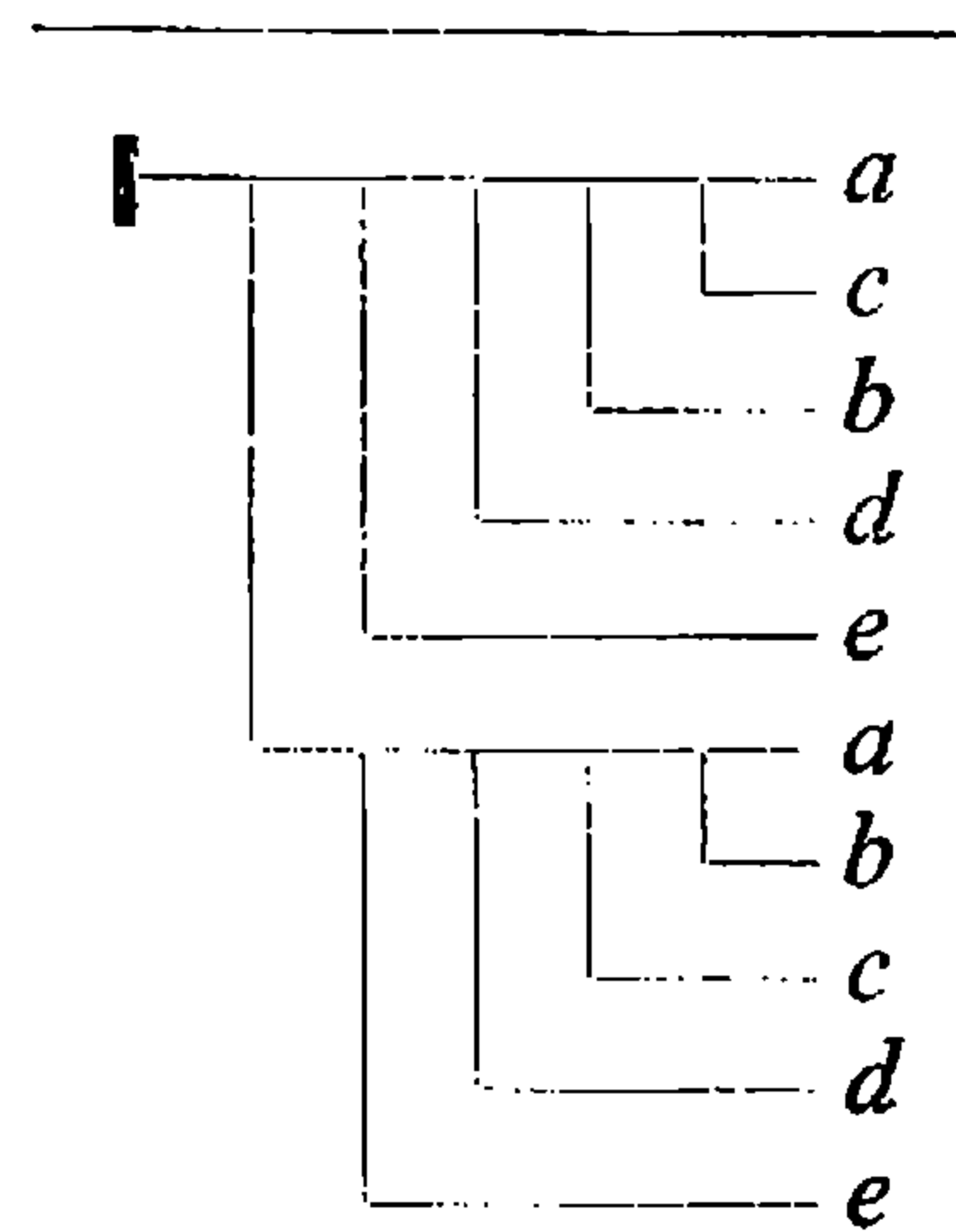
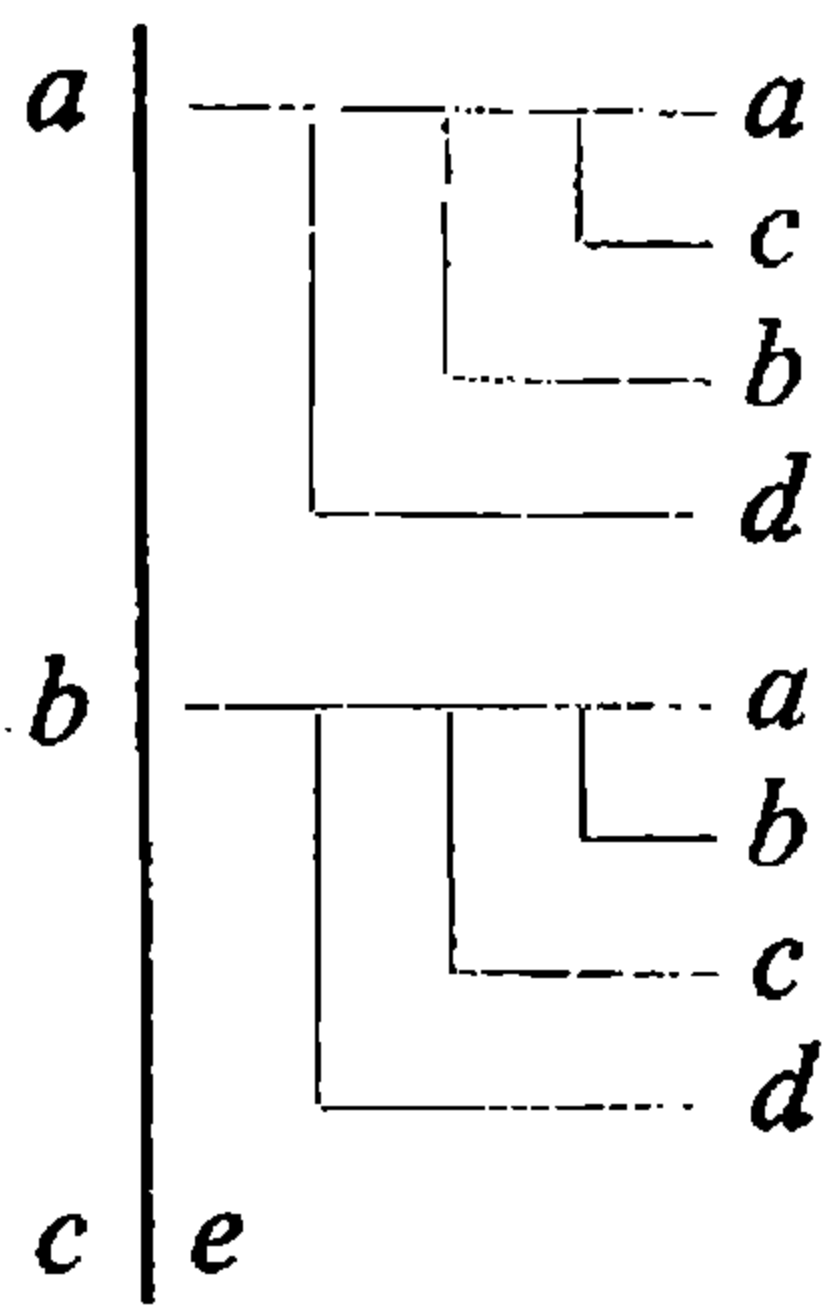
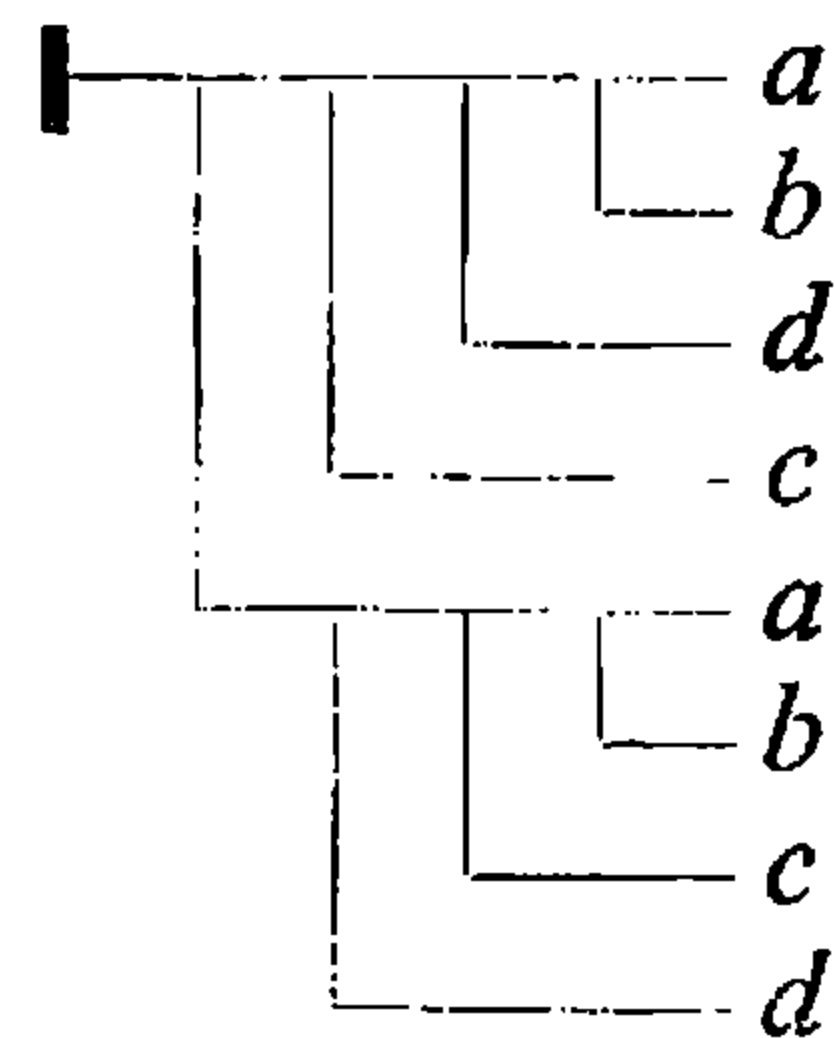
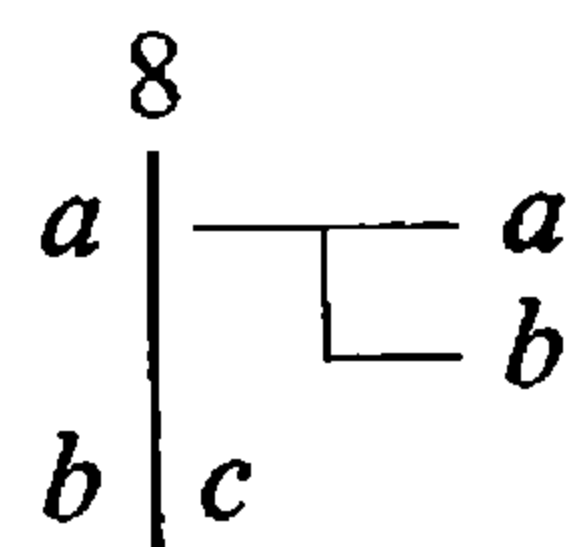
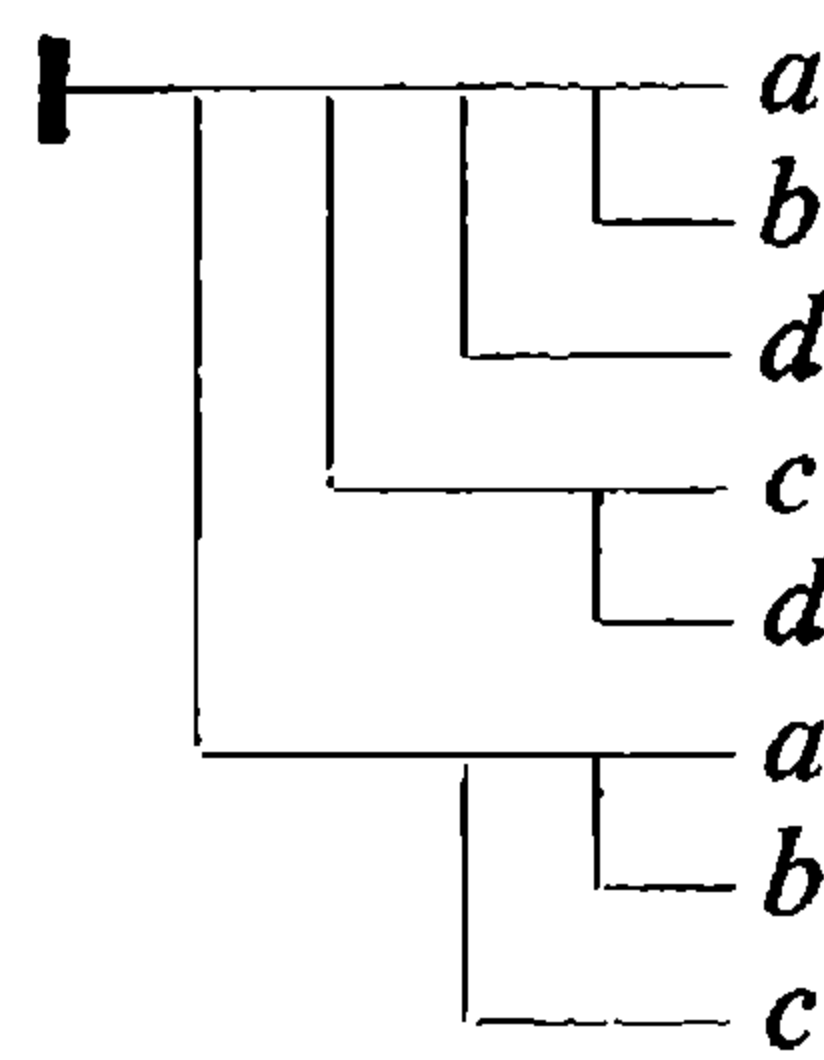
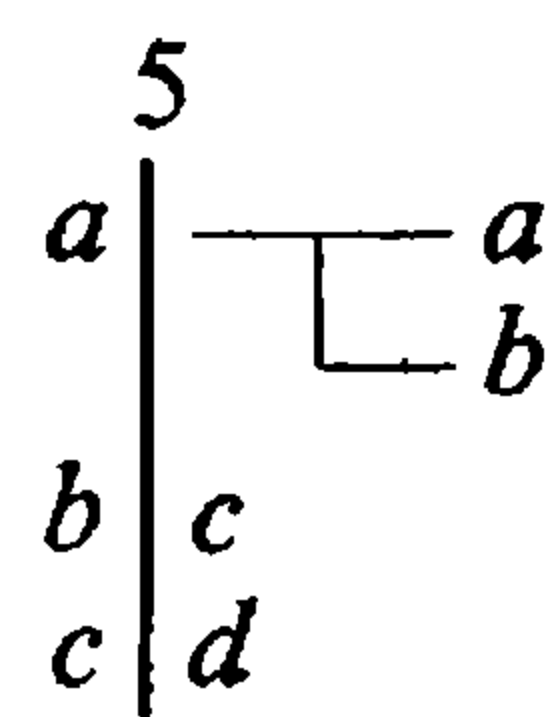
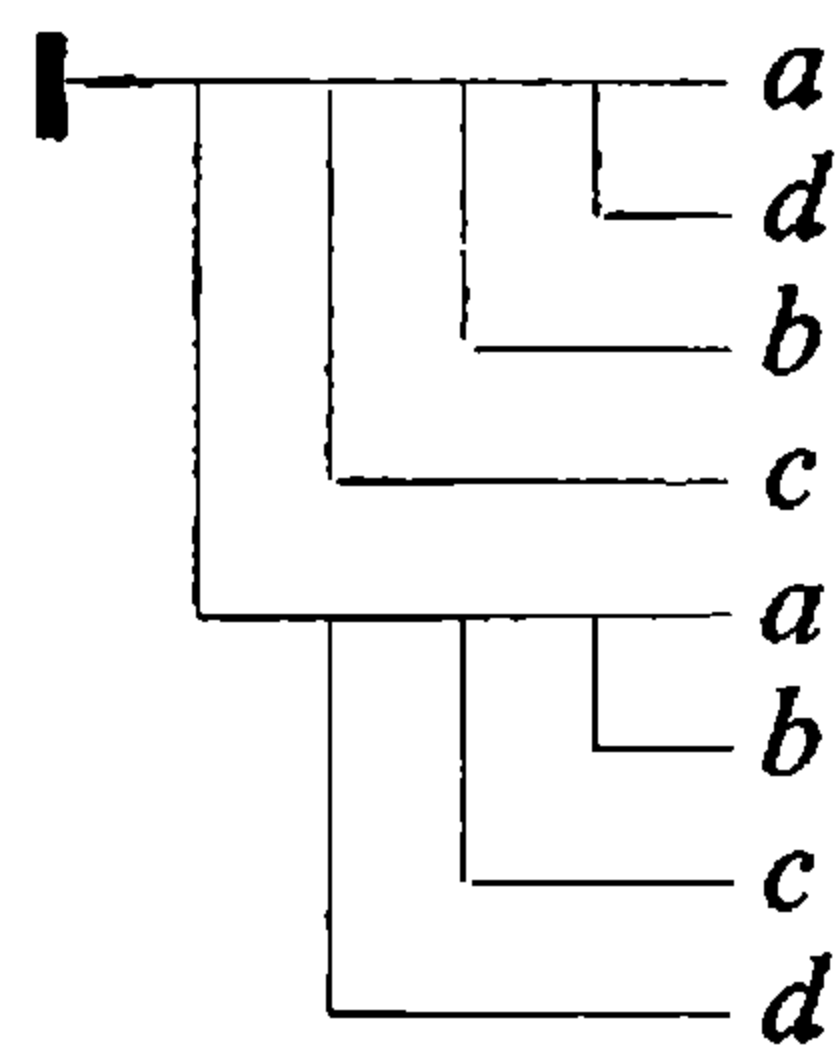
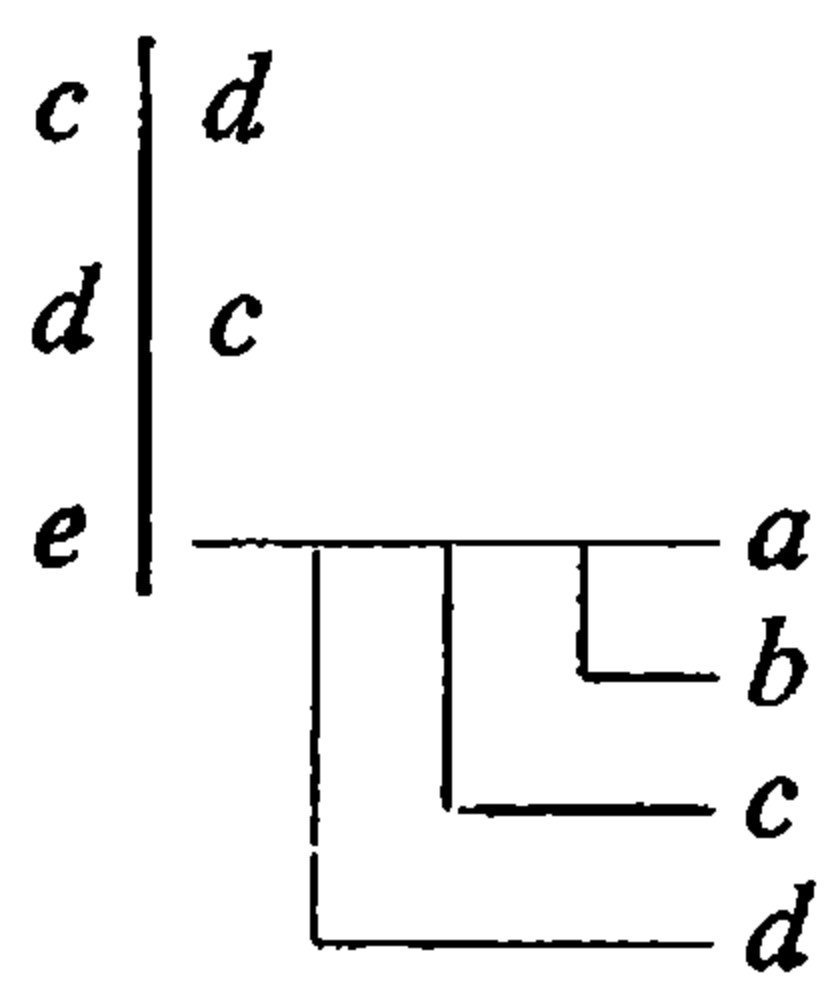
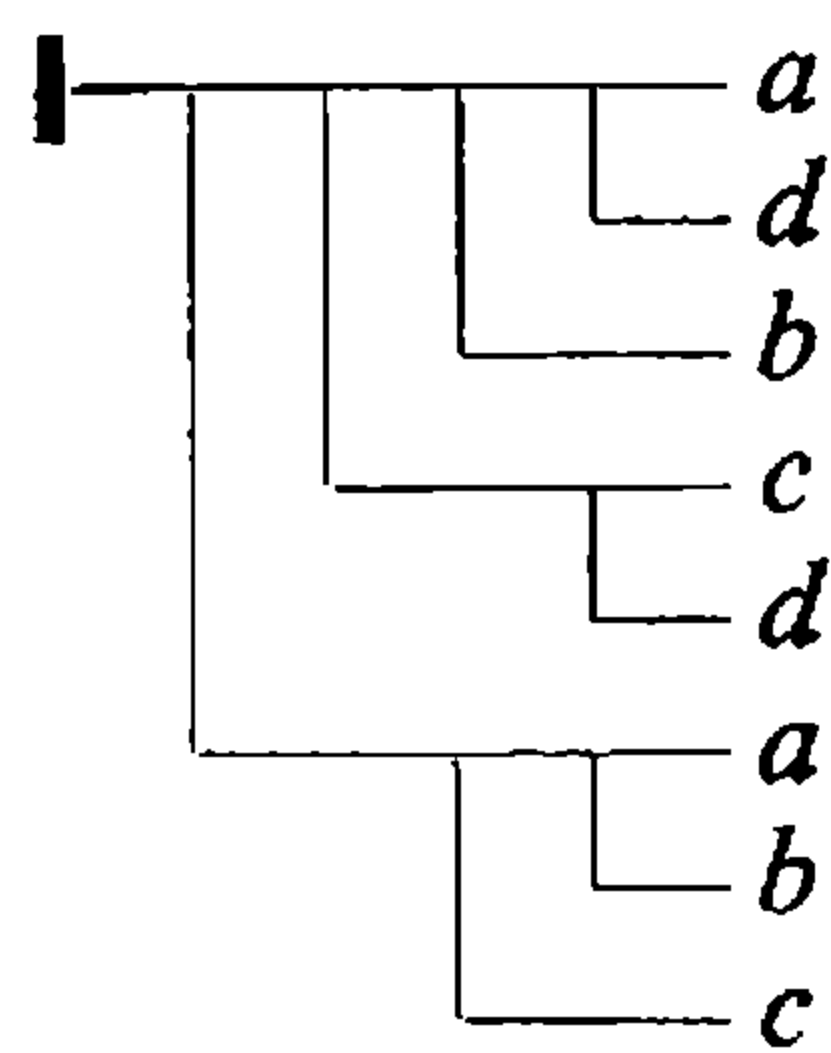
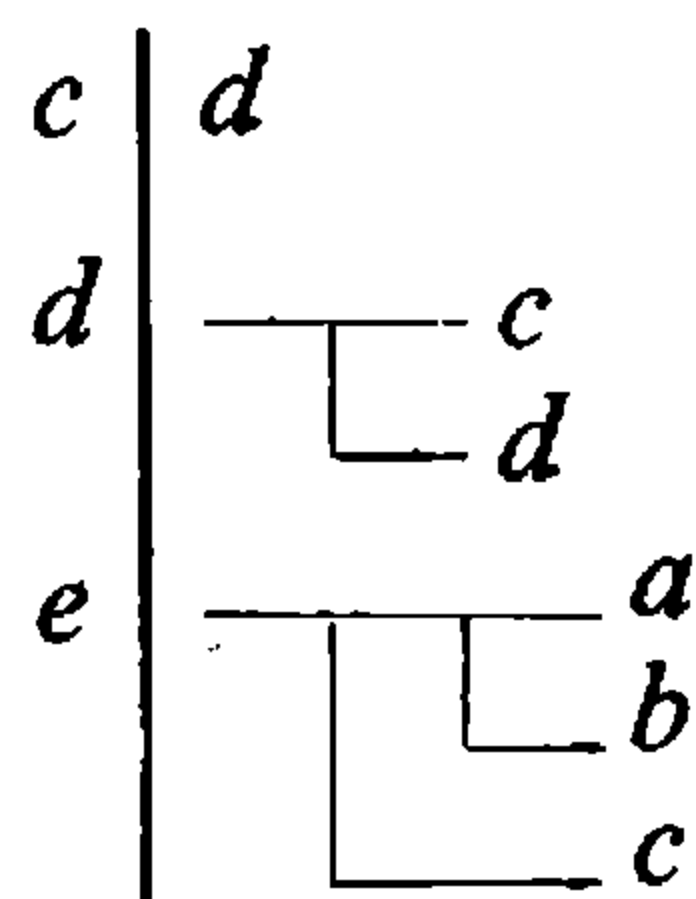
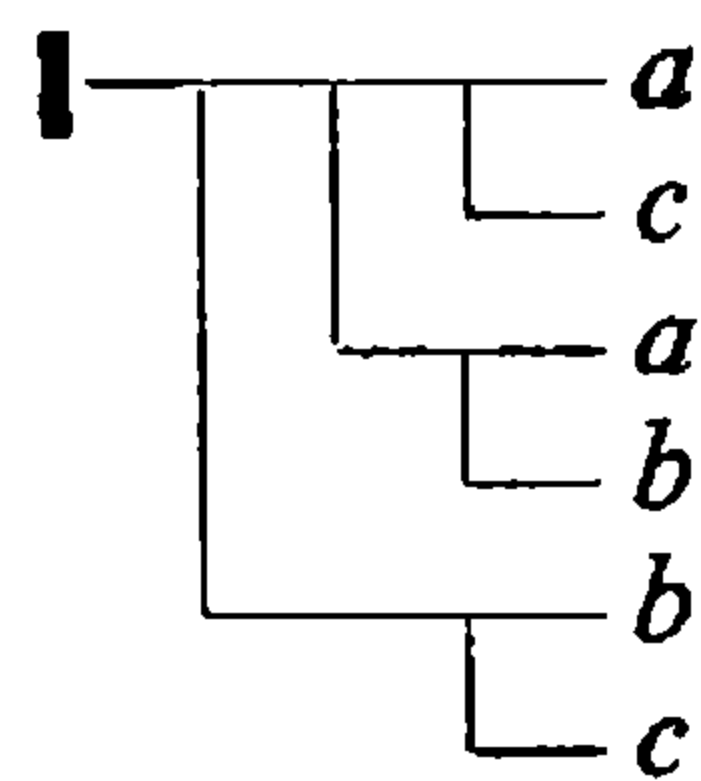
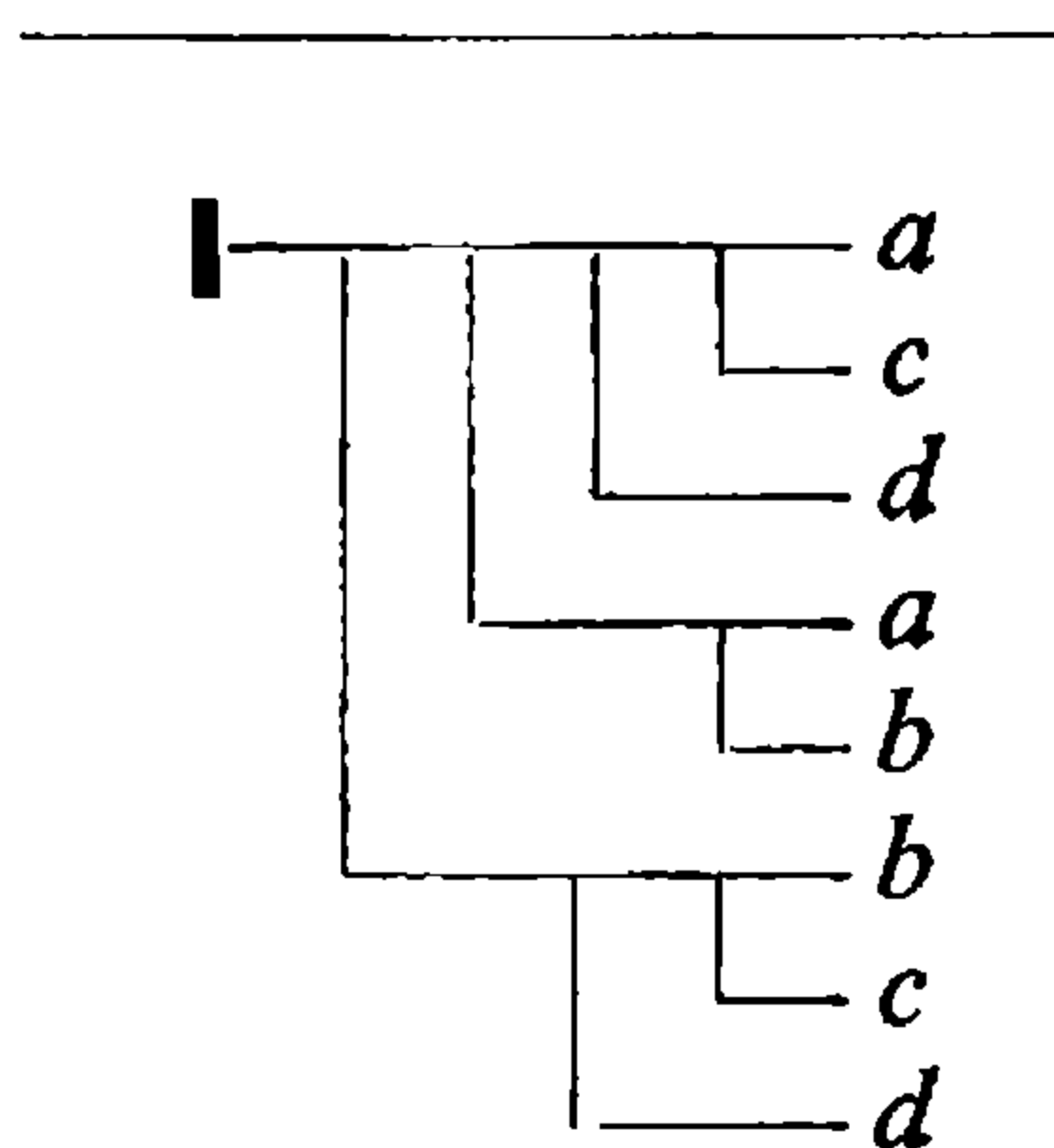
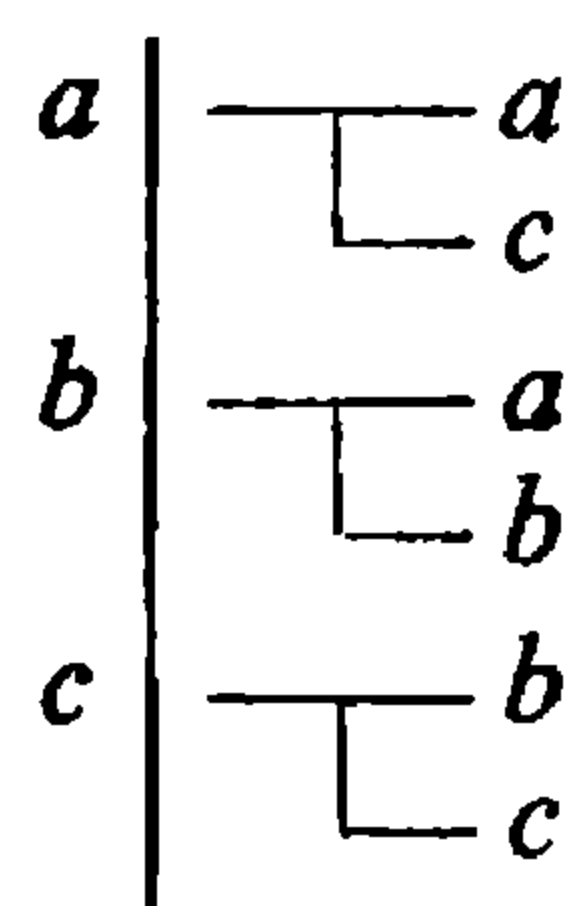
a | a b
b | c

a b d c a b c d

(16):

(18):

a | *a* *c*
b | *a* *b*
c | *b* *c*

a *c* *d* *a* *b* *b* *c* *d*

(19.

Questa proposizione differisce solo in modo inessenziale dalla (7).

19

a *c* *d* *a* *b* *b* *c* *d*

(18):

a | *a* *c* *d*
b | *a* *b*
c | *b* *c* *d*
d | *e*

a *c* *d* *e* *a* *b* *b* *c* *d* *e*

(20.

9

a | *b*
b | *c*
c | *d*

b *d* *b* *c* *c* *d*

(19):

18

a | a b
b | c
c | d
d | e

a b e c d e a b c d

(22):

c | e
d | c
e | d e
f | a b c d

a e b c d e a b c d

(23·

1

a | a c

a c b a c

(12):

b | c
c | b
d | a c

a b c a c

(24.

(5):

(5):

a | a b c
b | a c
c | d

a b c d a c d (25.

1

a b a

(8):

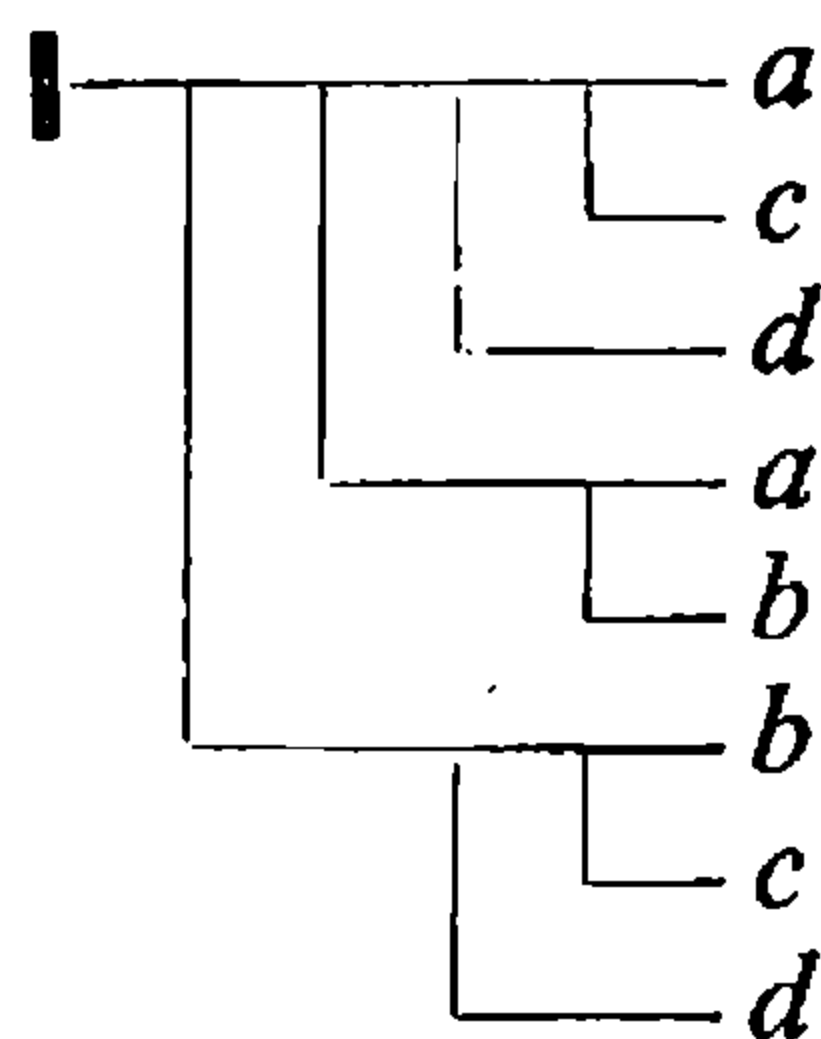
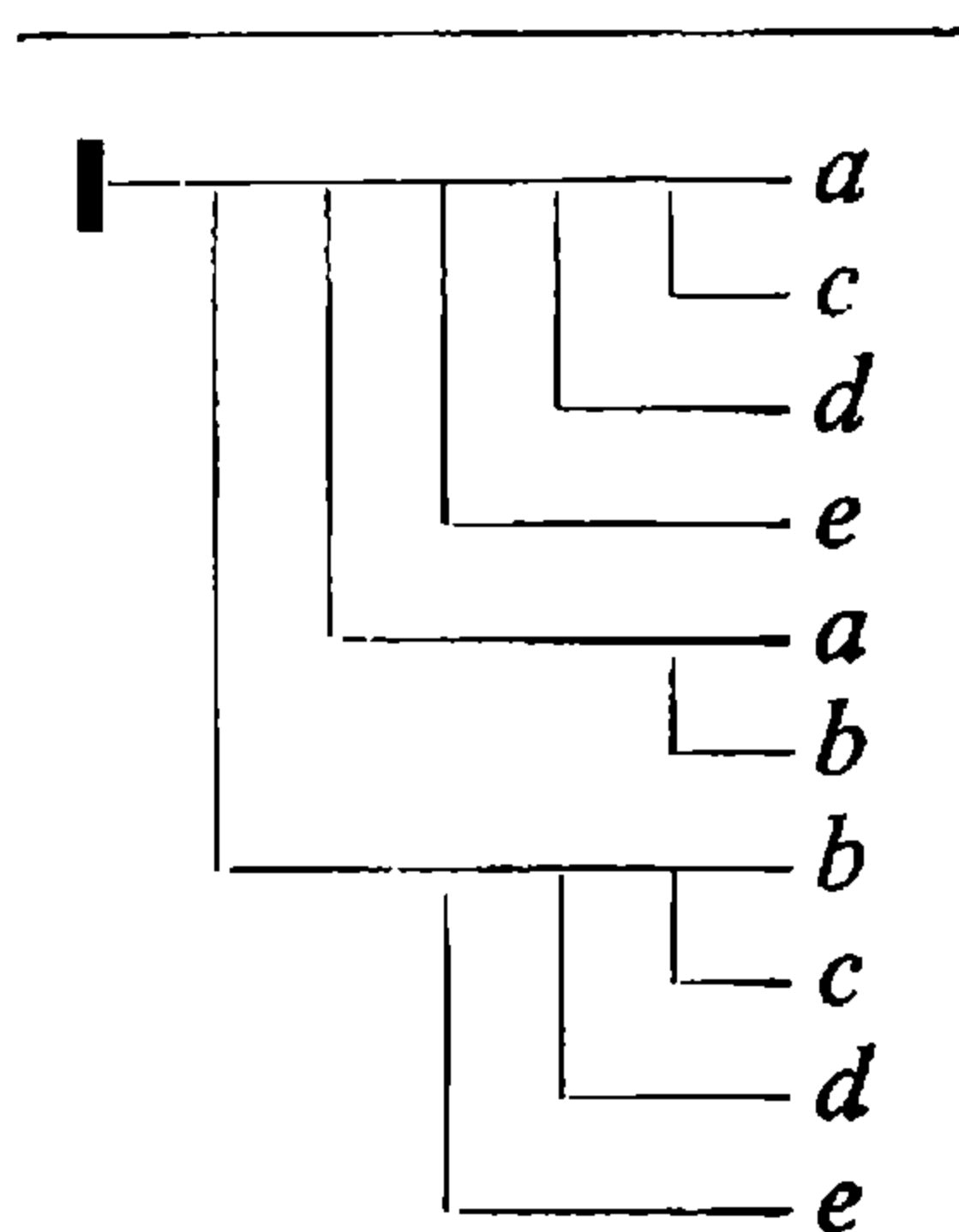
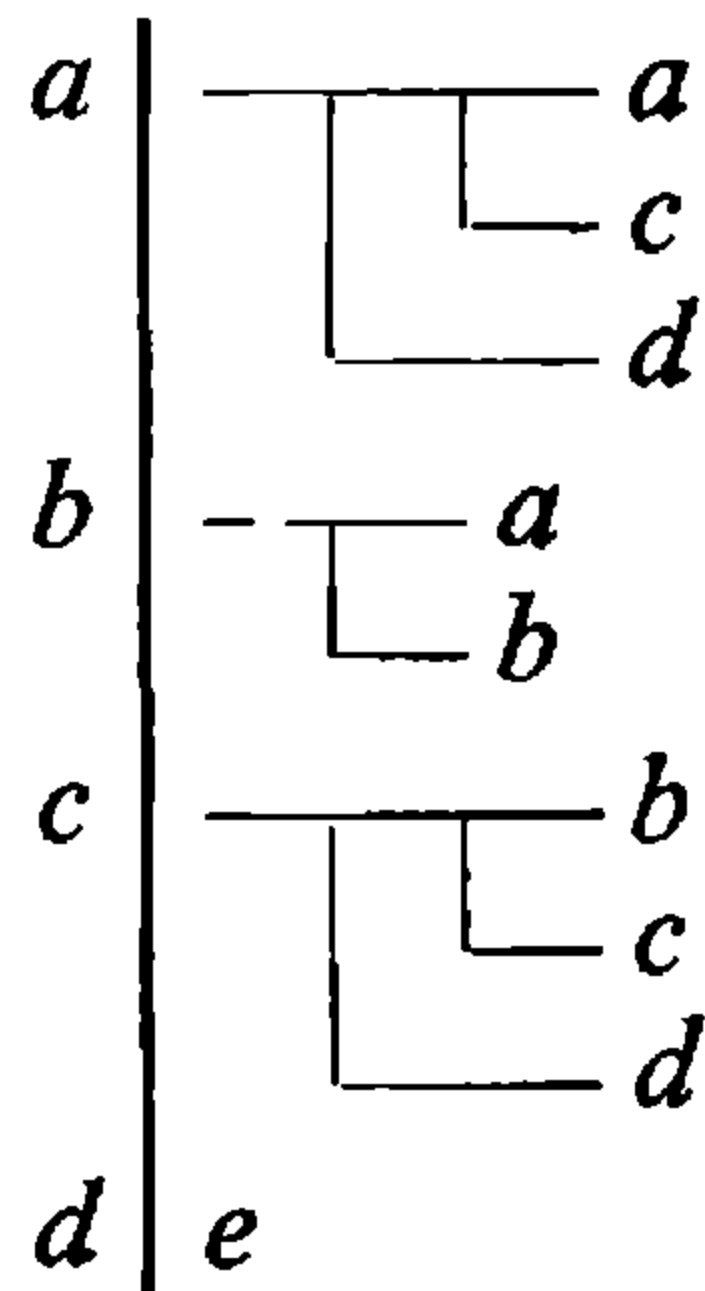
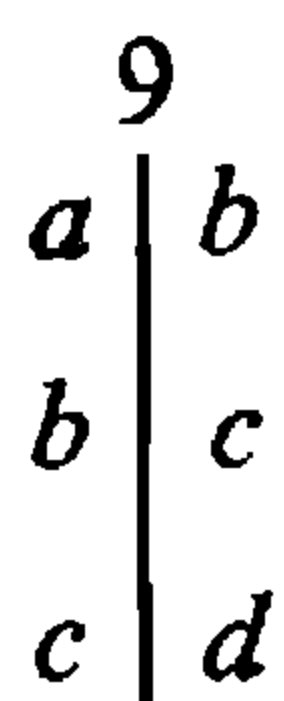
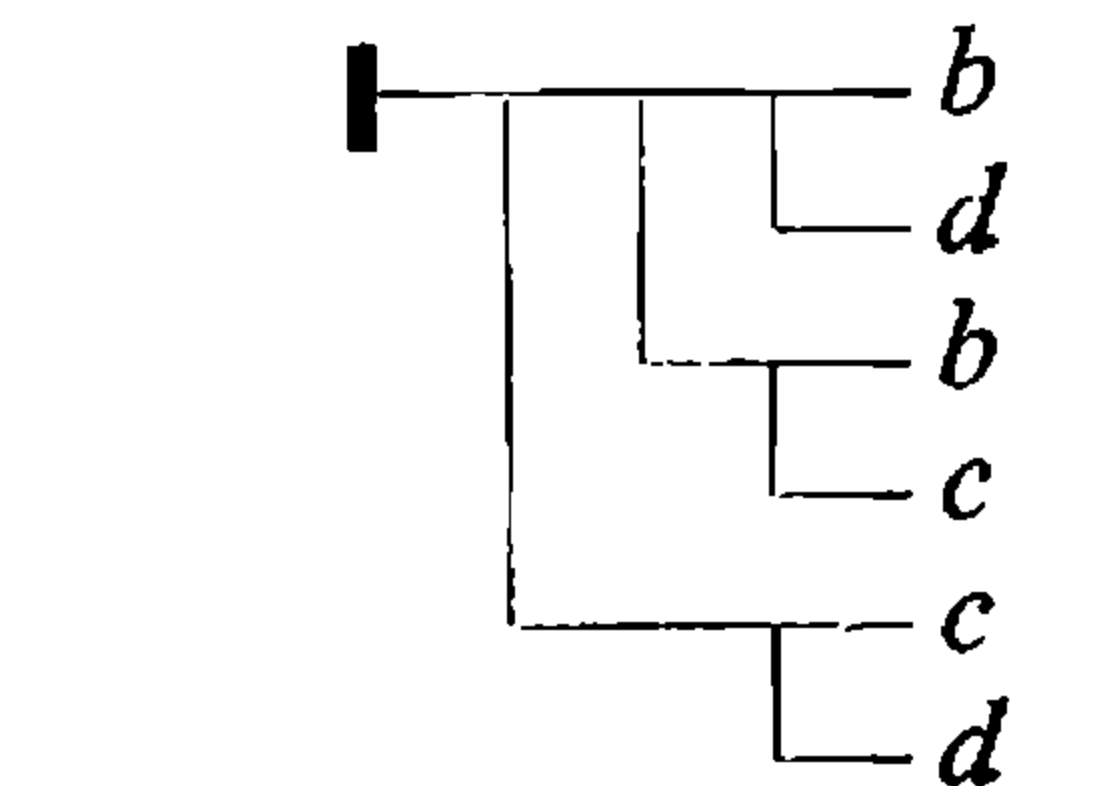
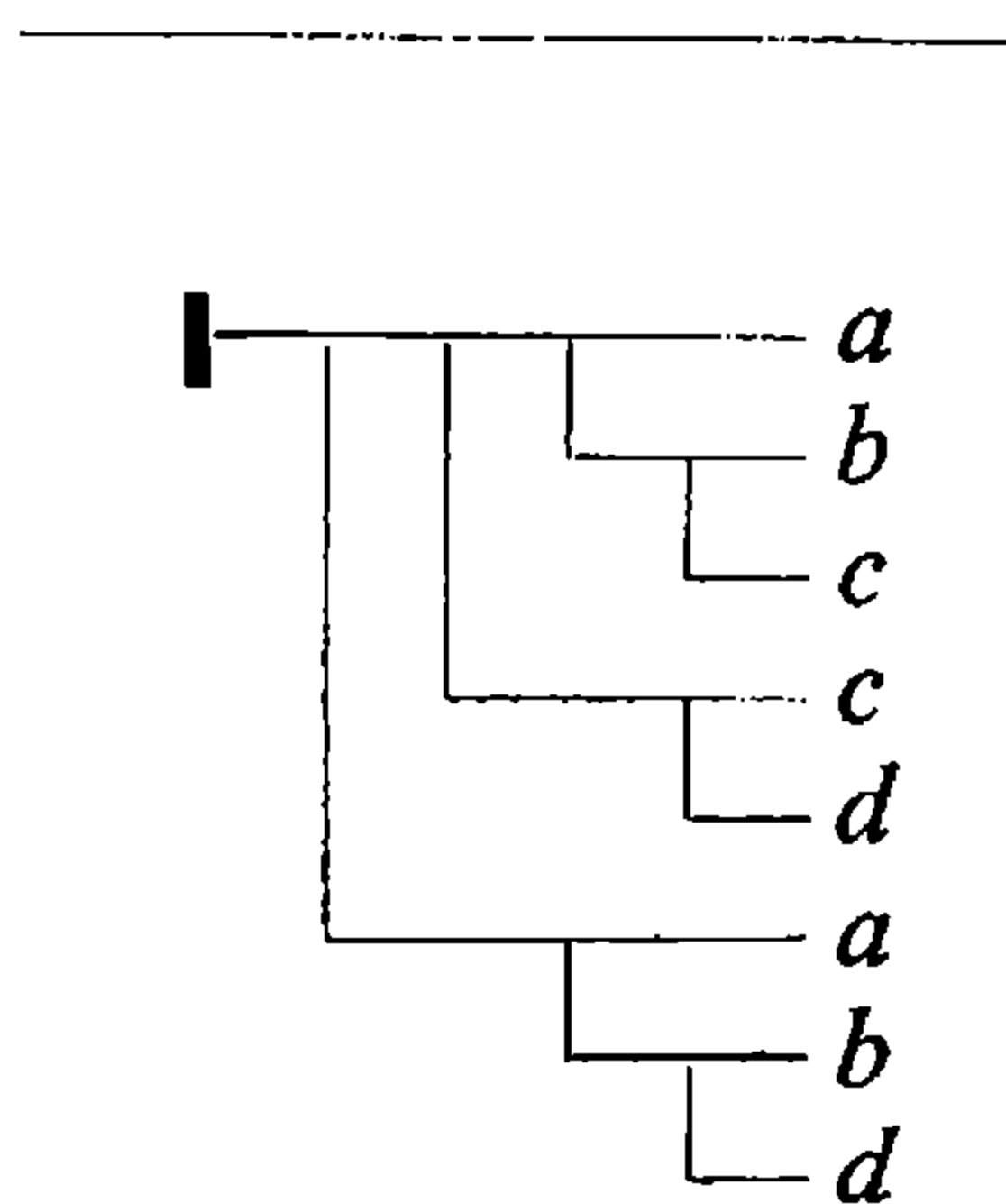
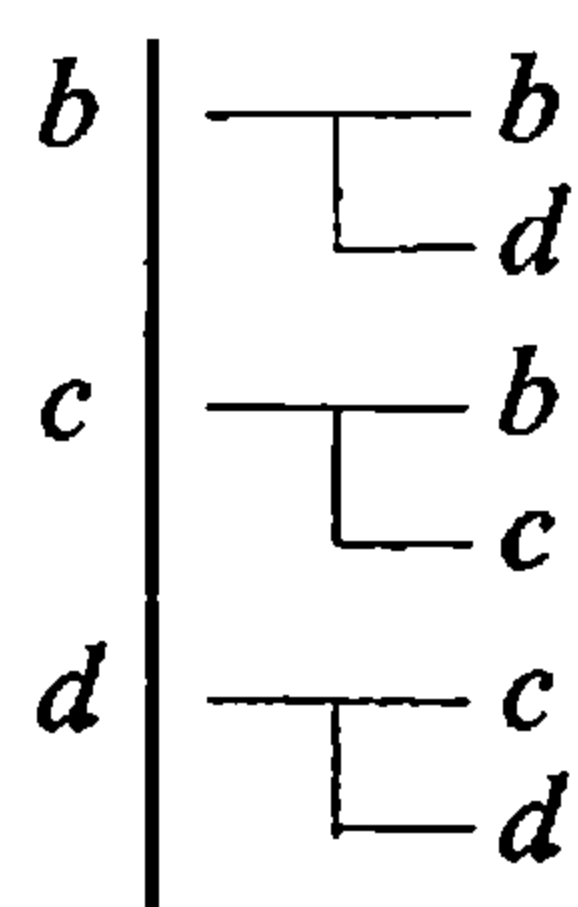
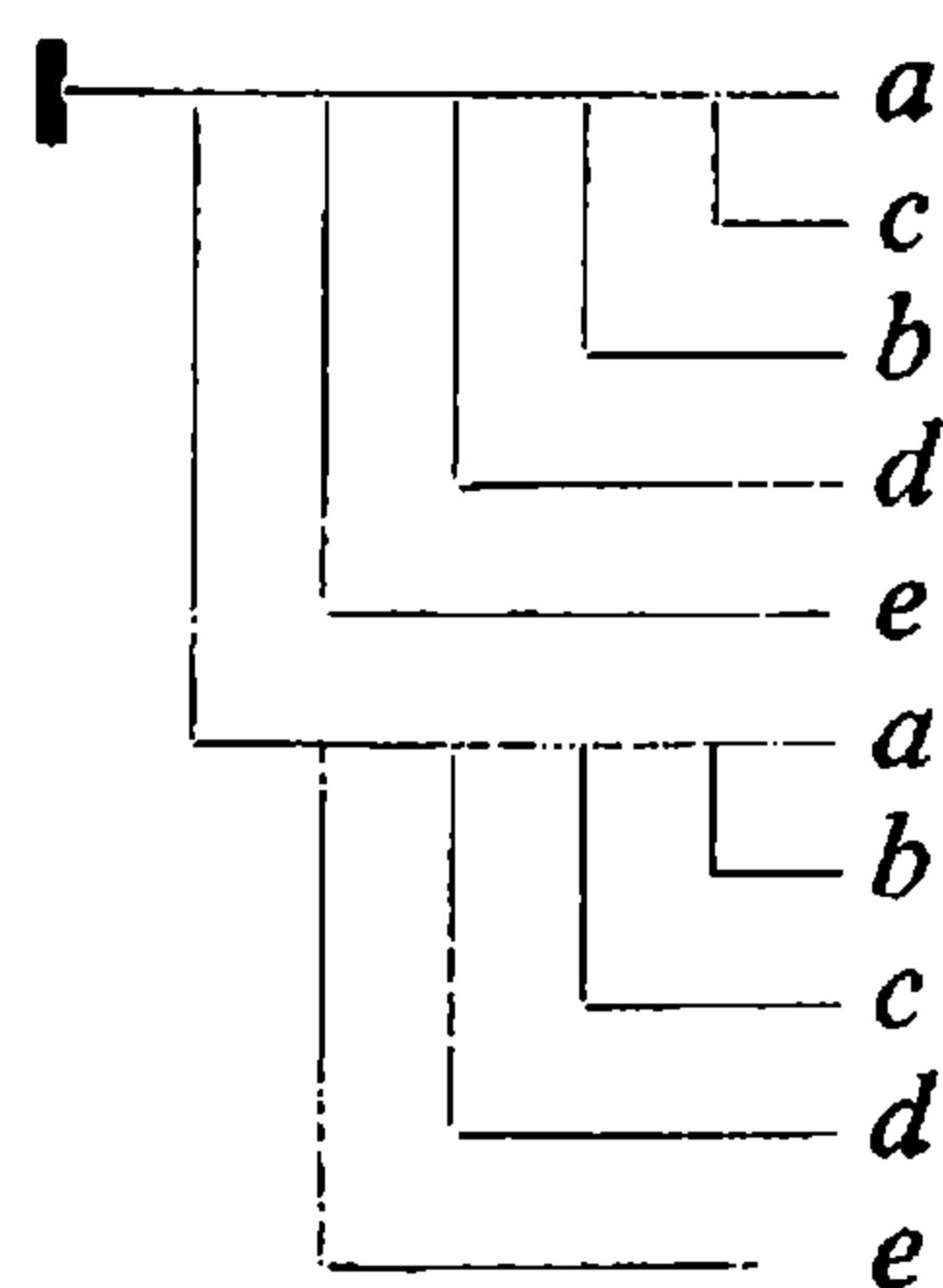
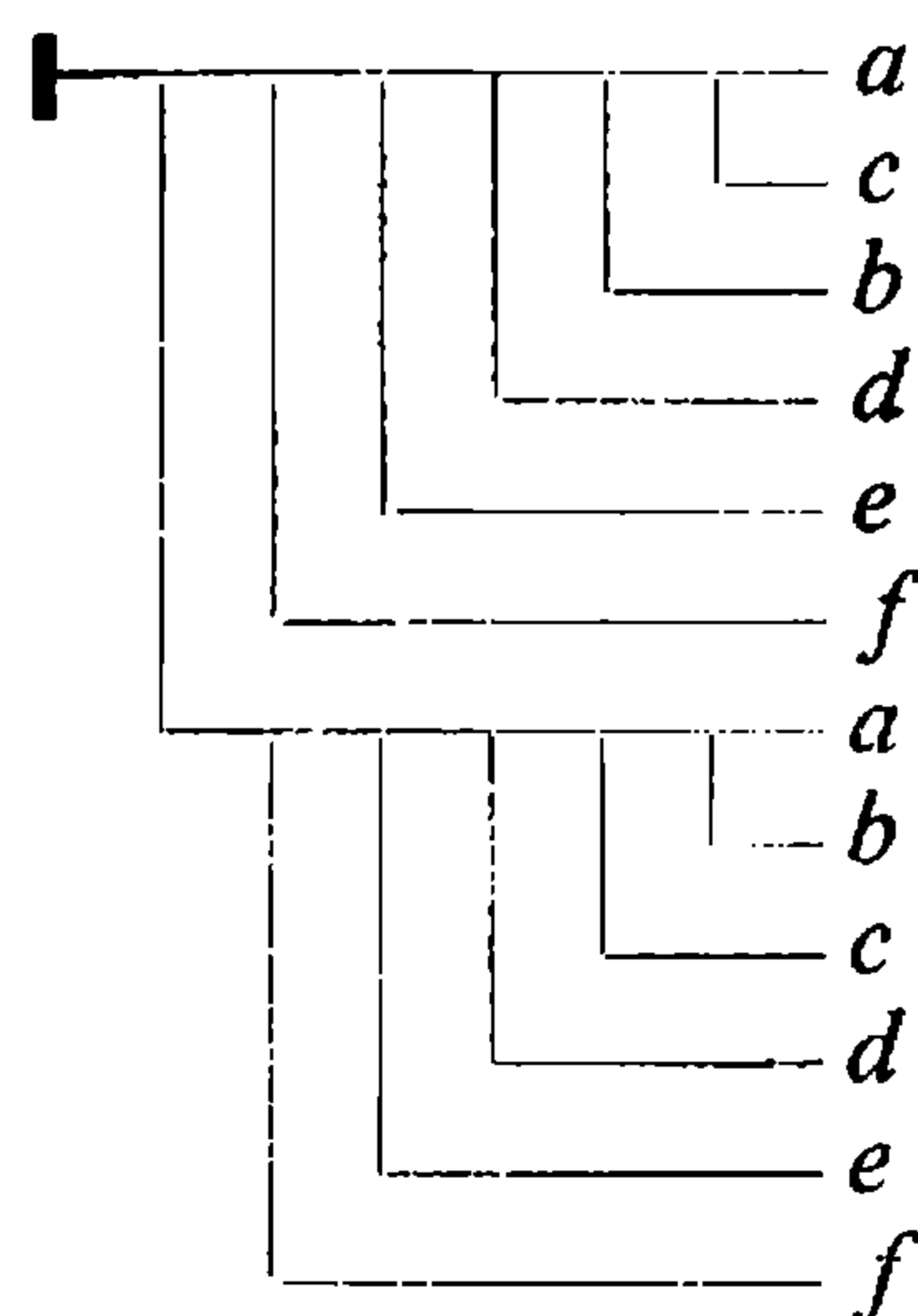
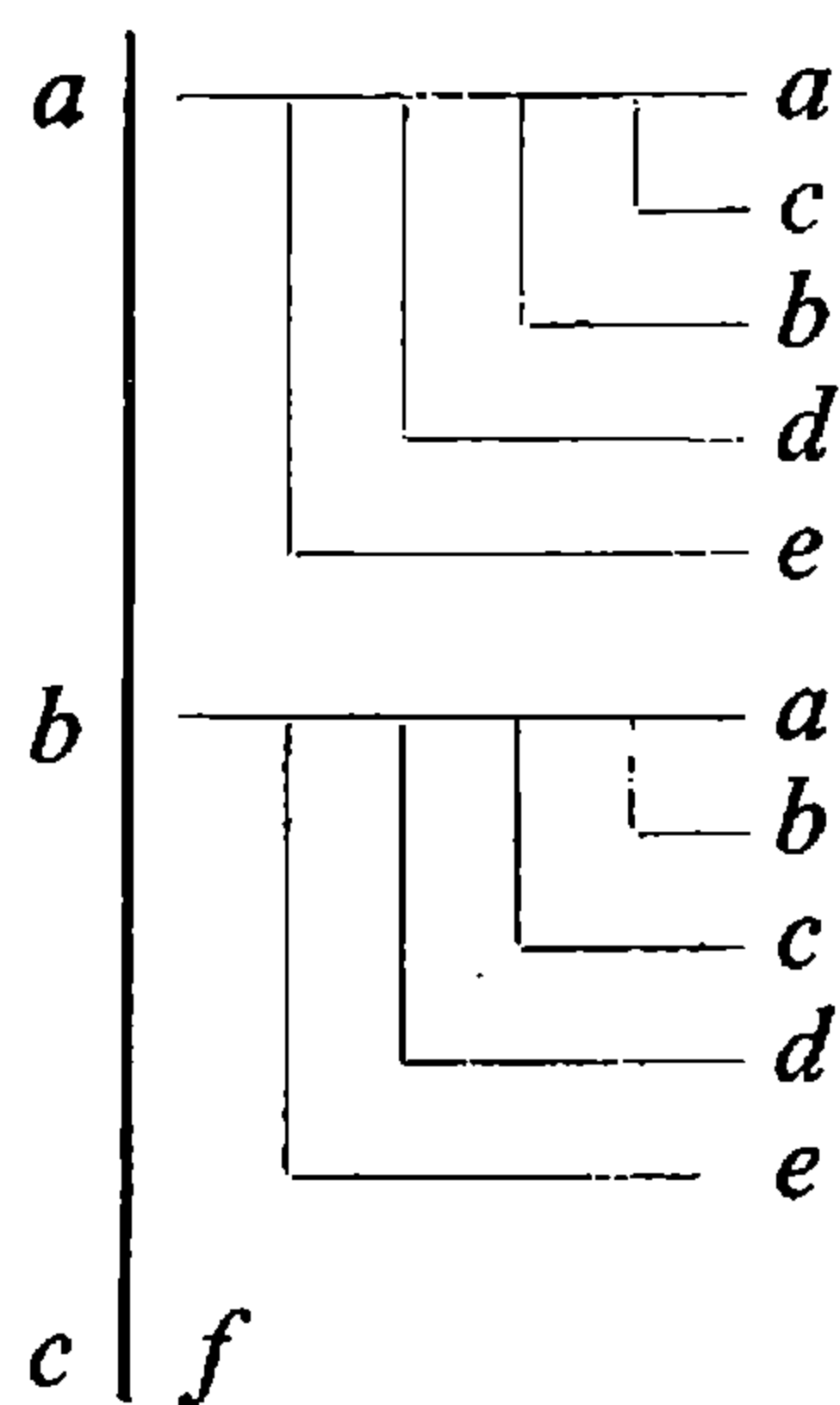
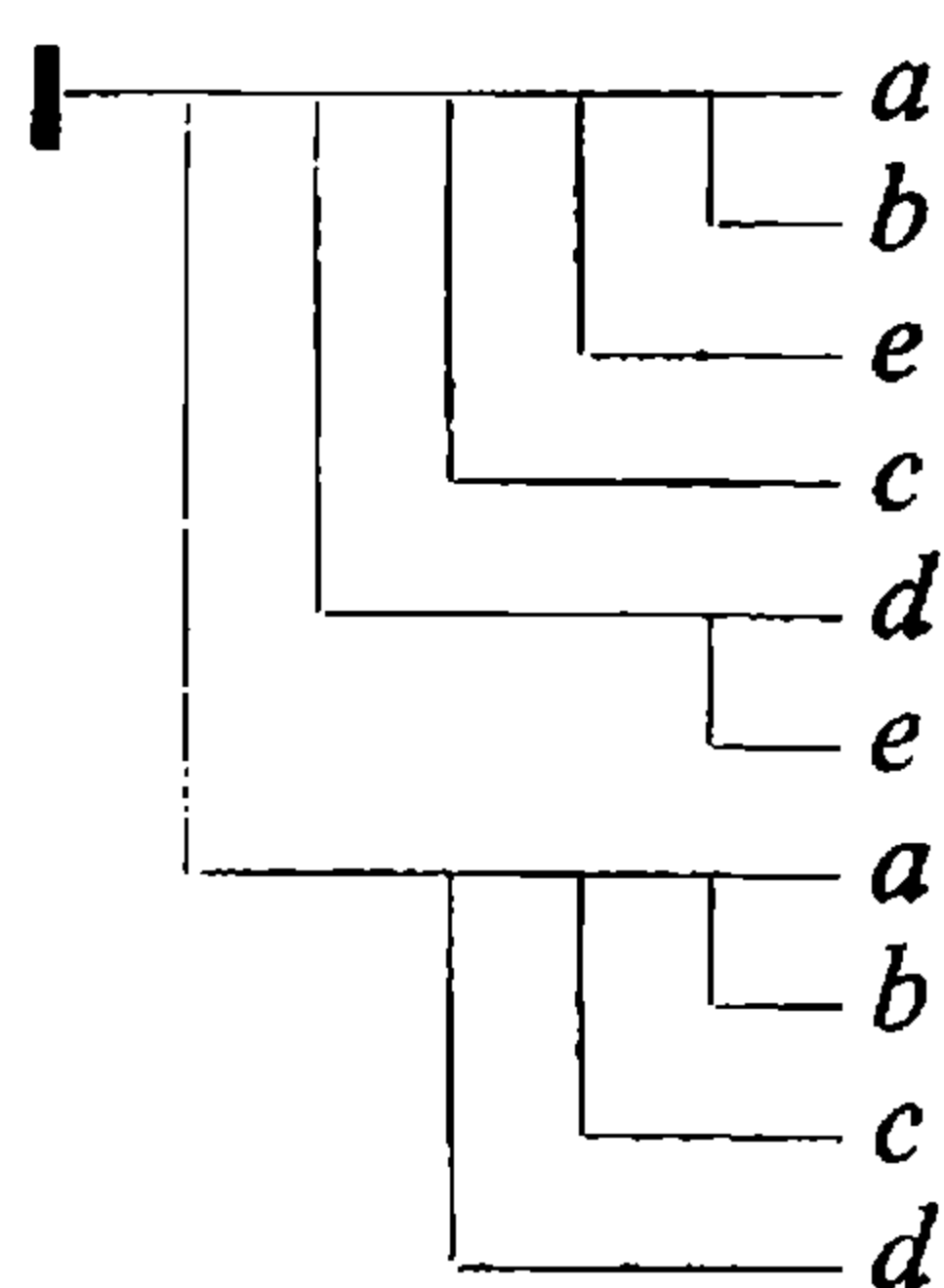
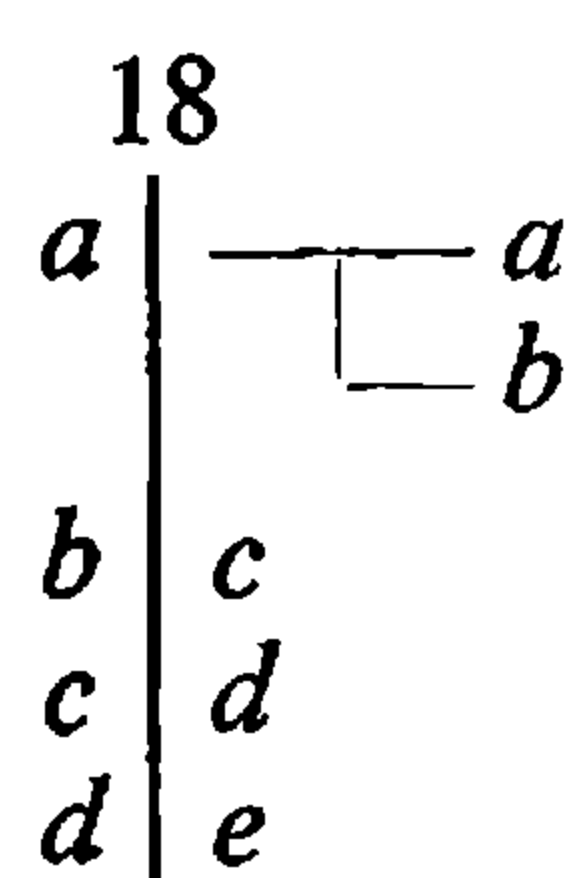
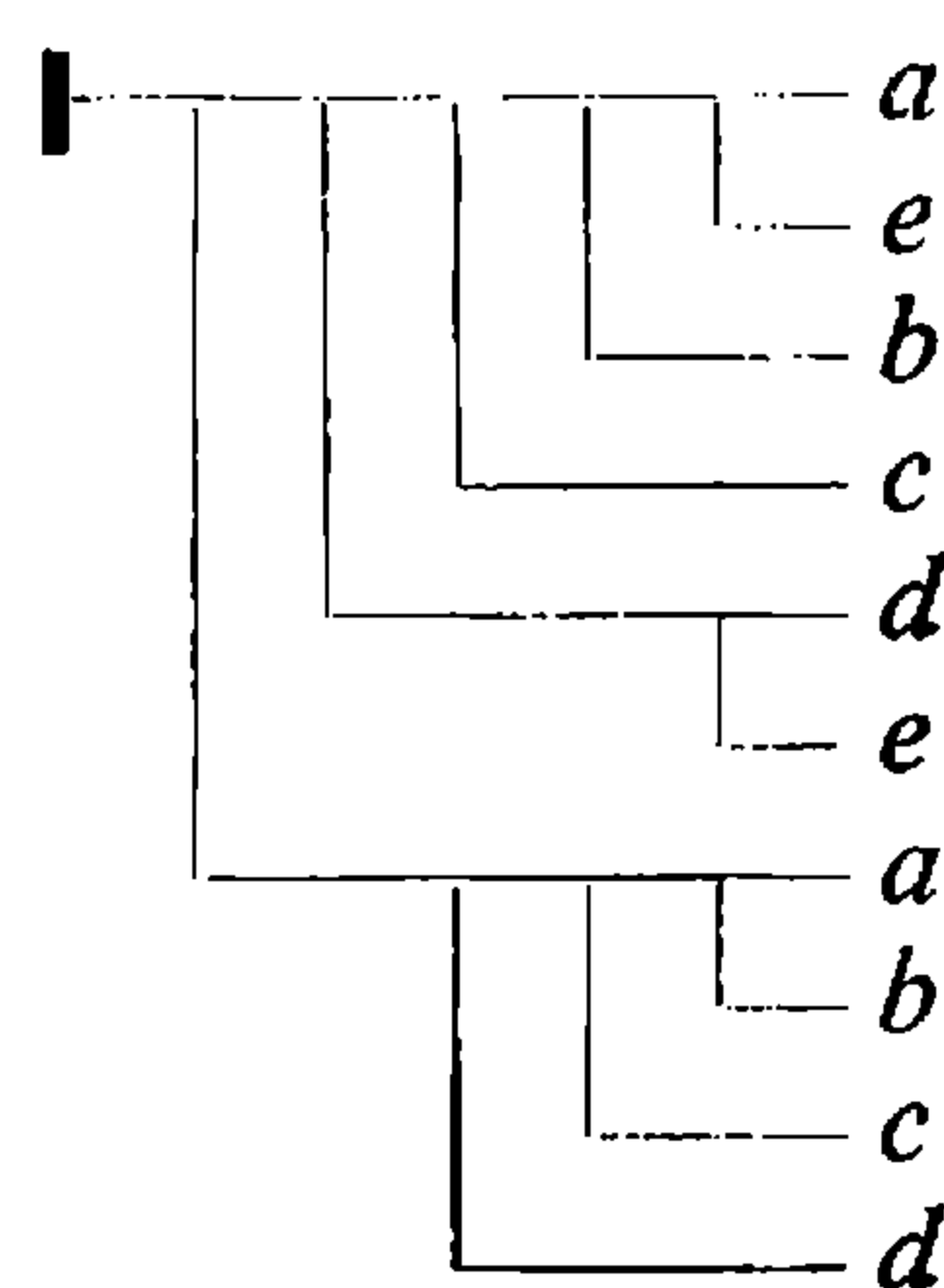
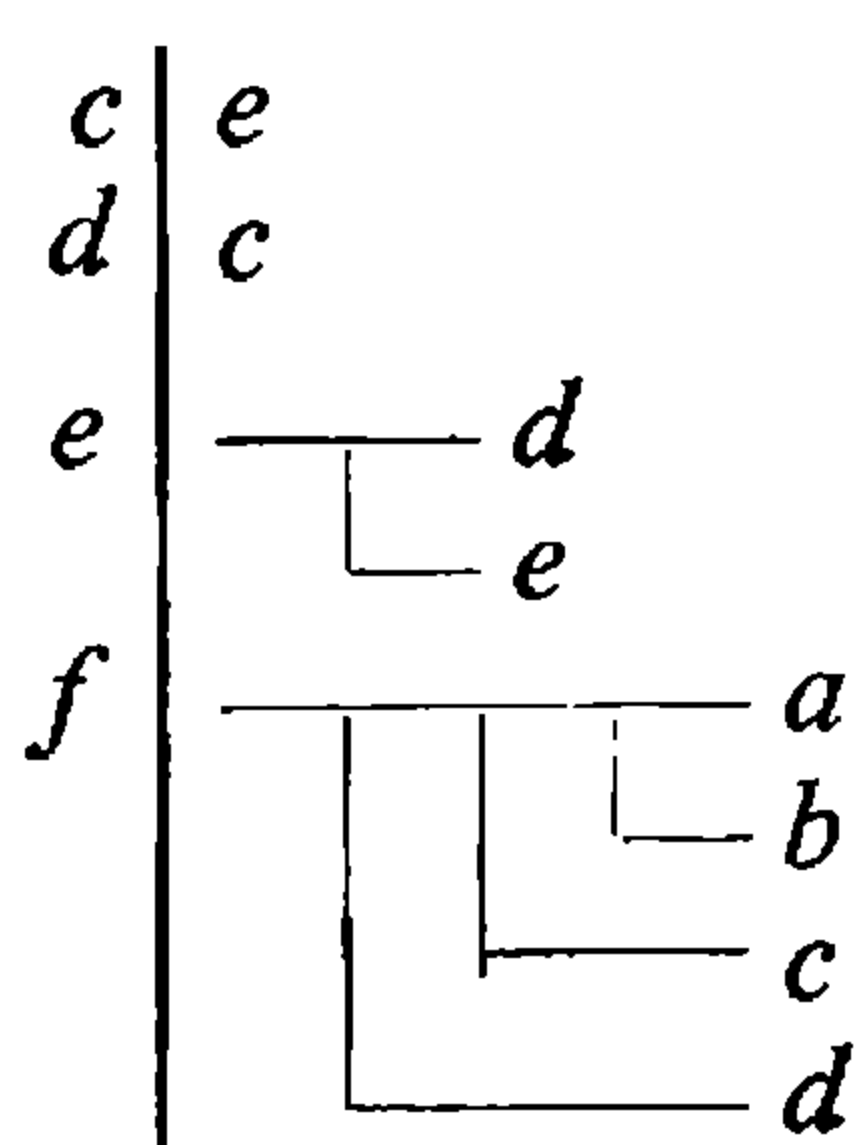
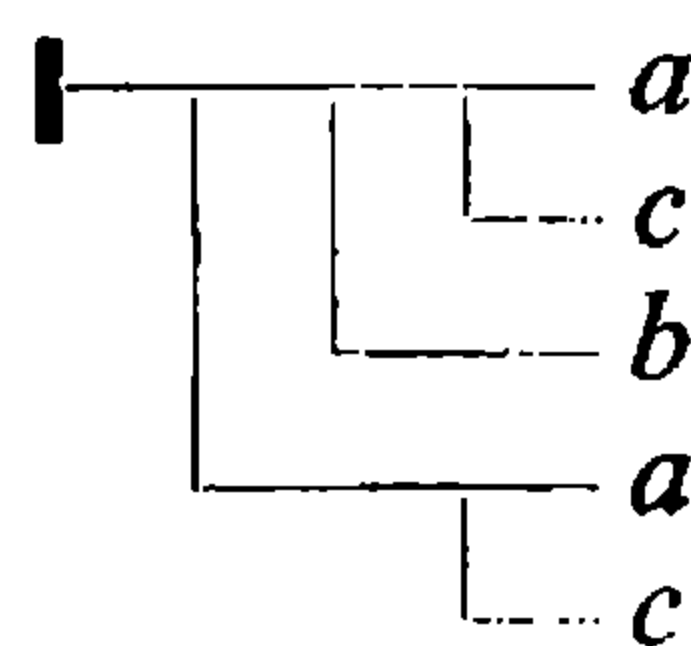
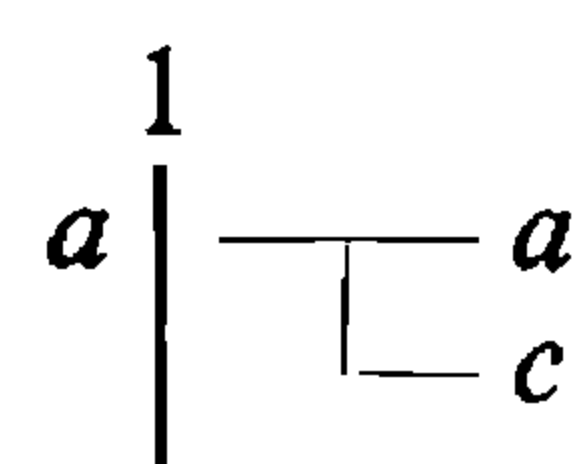
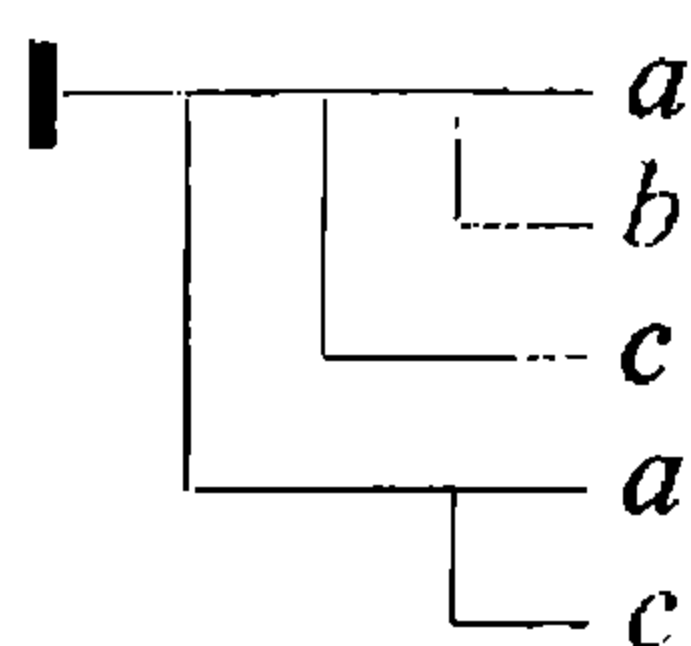
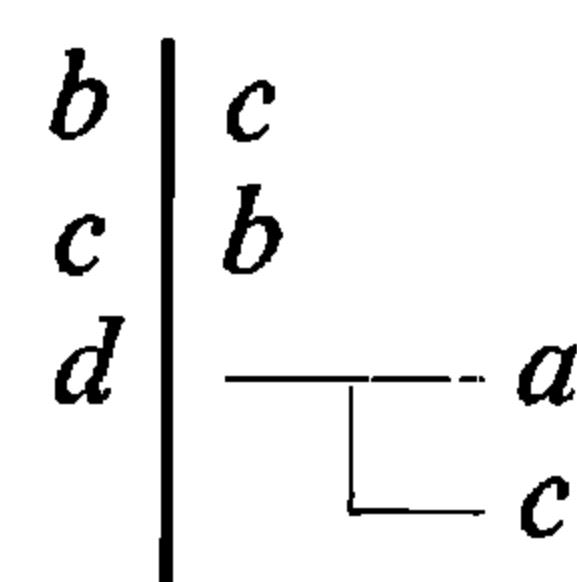
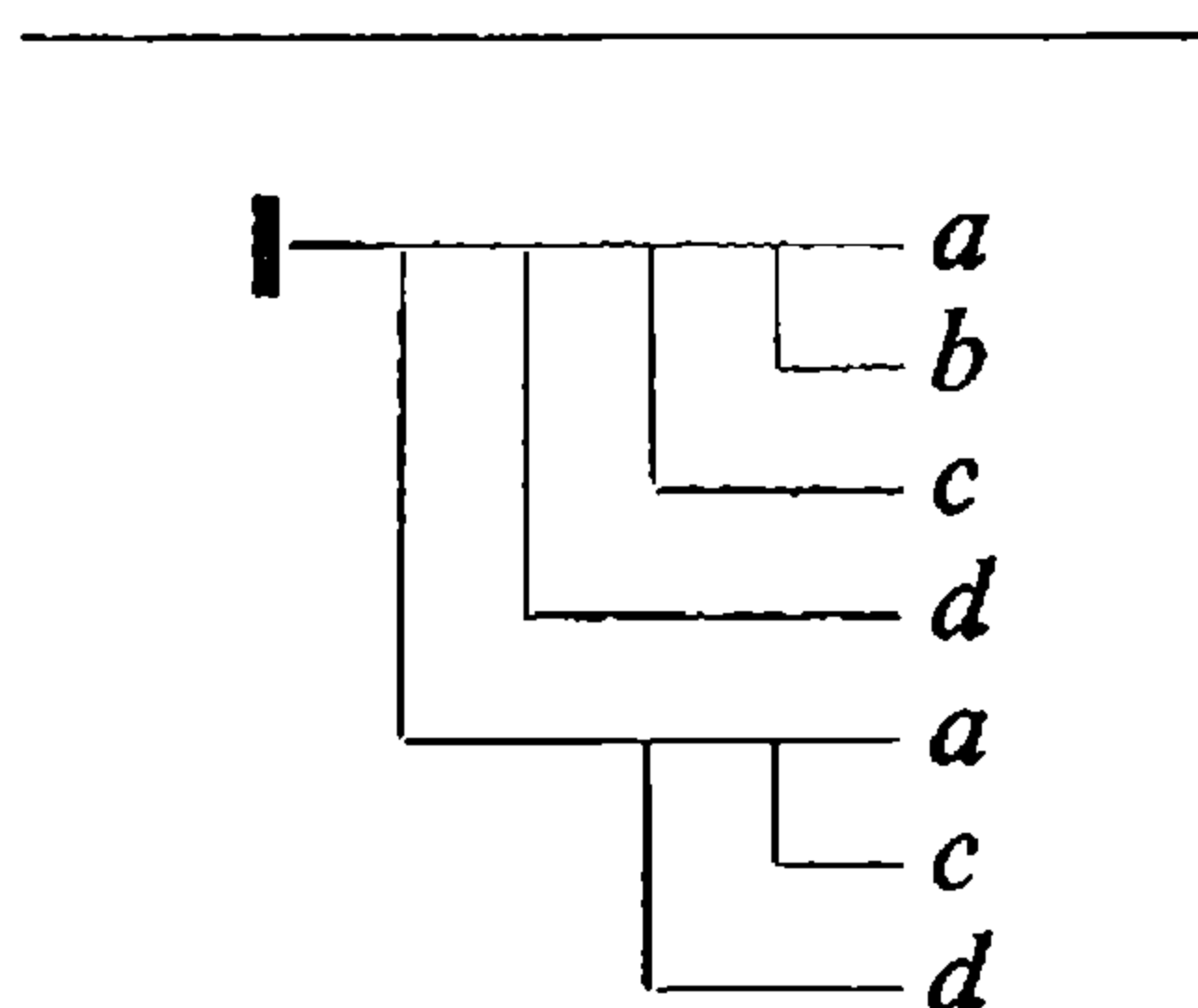
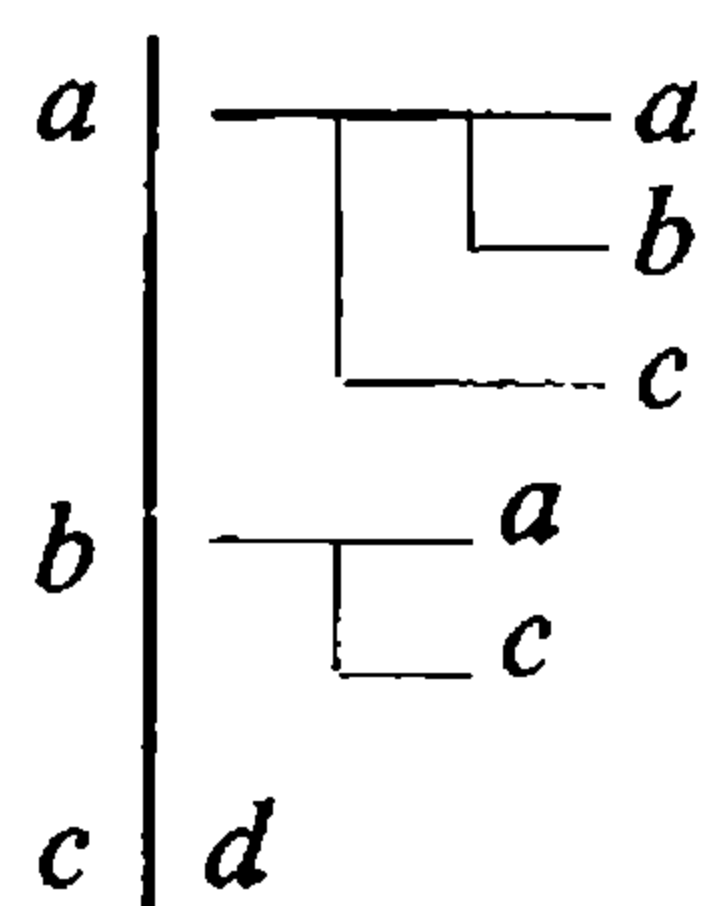
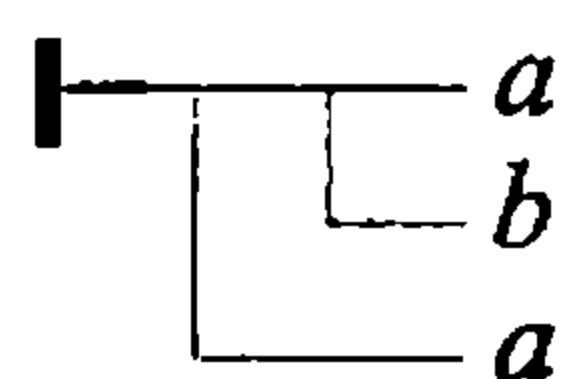
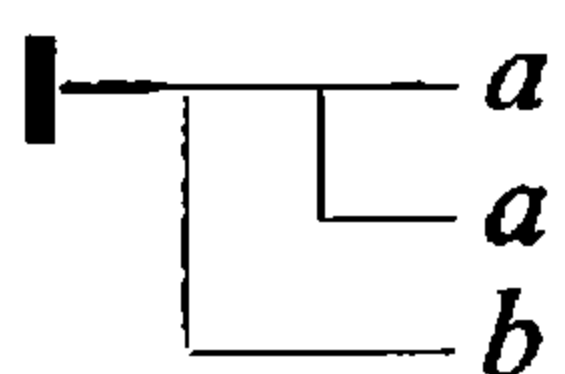
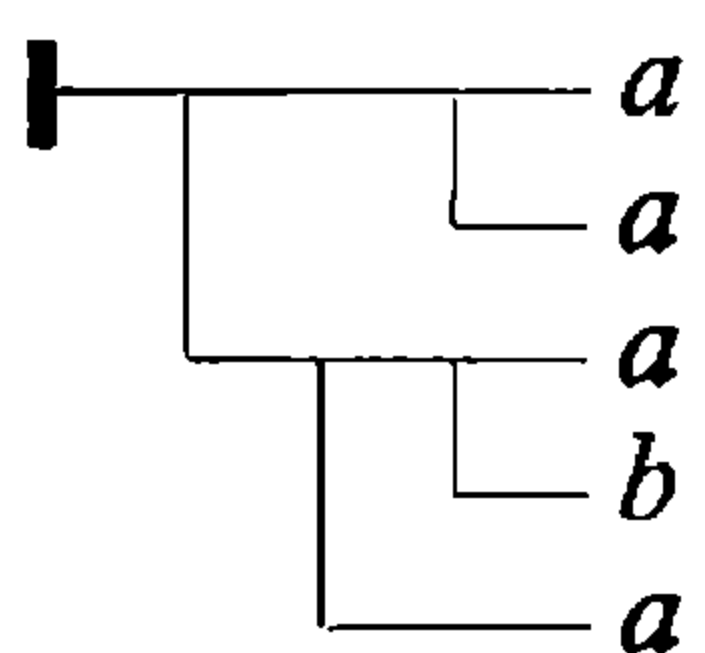
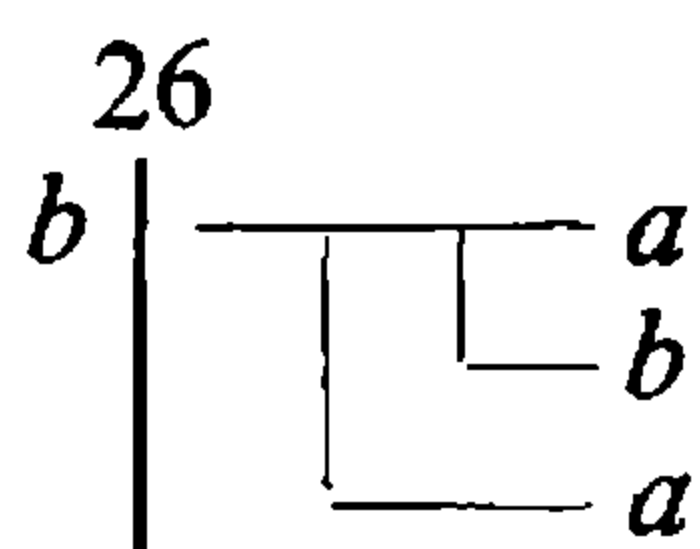
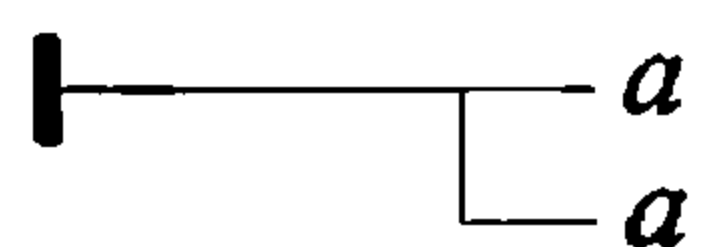
d | a

a a b (26.

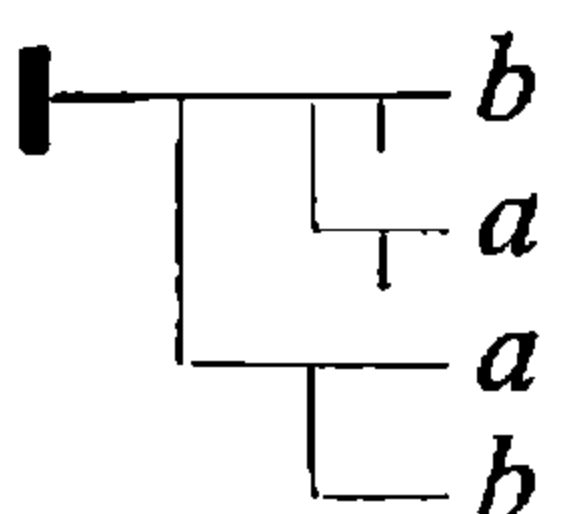
26

b | a b a

a a a b a

(1)::

a a (27.

Non si può (contemporaneamente) negare e affermare *a*.

17. Il primo principio della negazione e sue conseguenze

b a a b (28.

significa: "Non ha luogo il caso in cui *b* *a* viene negato e *a* *b*

affermato."[1] La negazione di

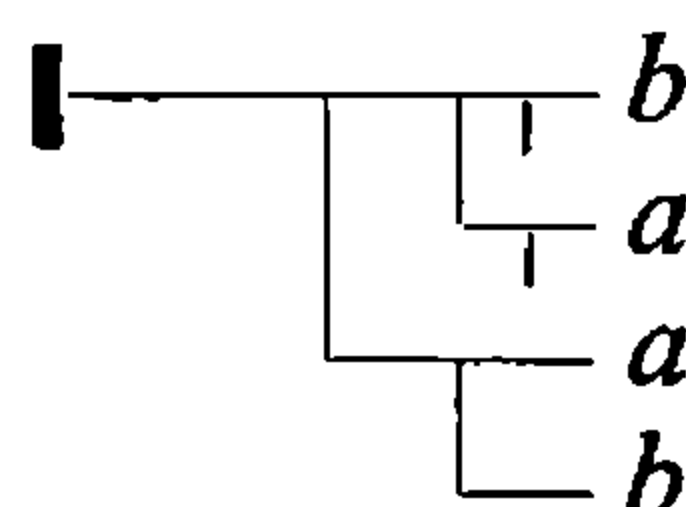
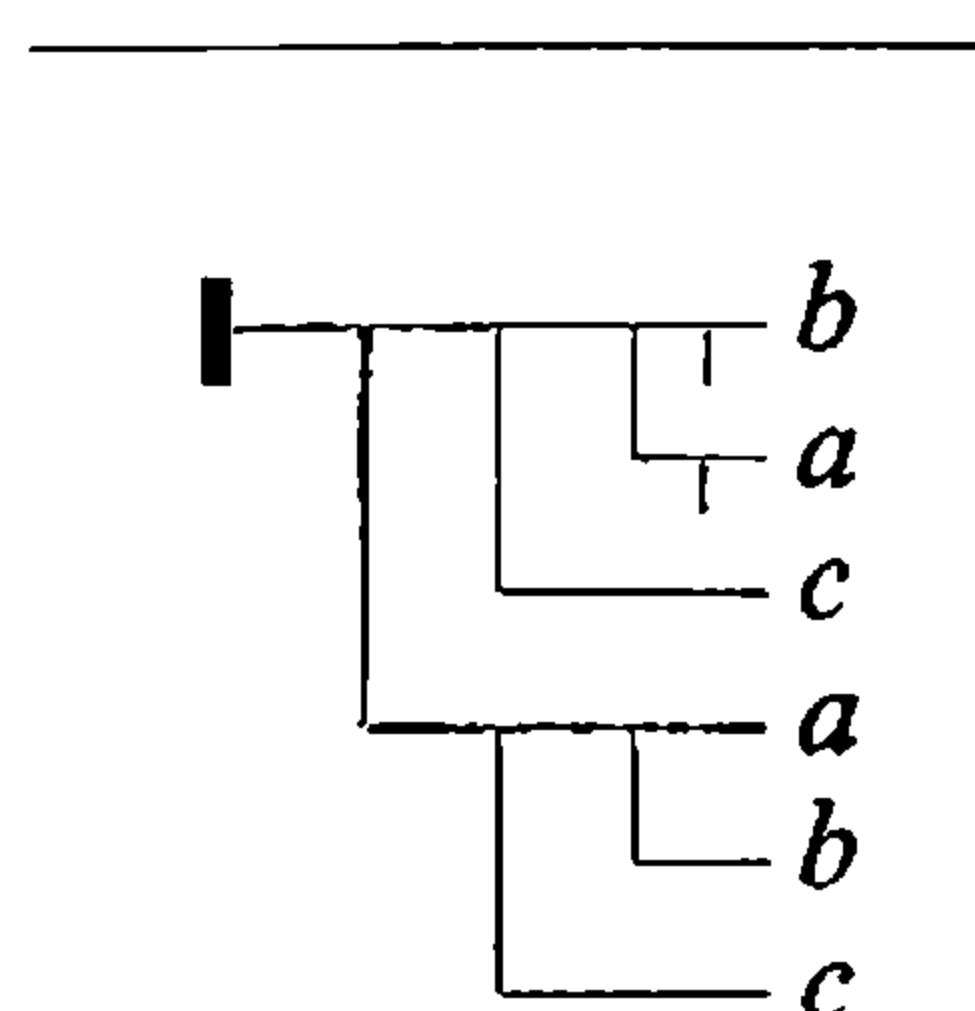
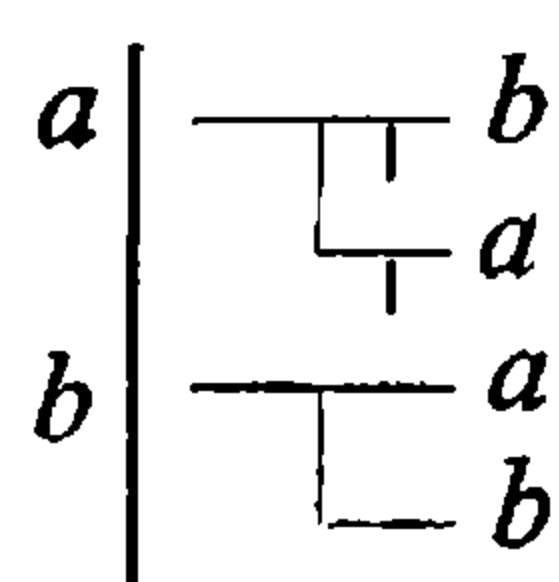
```
──┬┬── b
   └┬── a
```

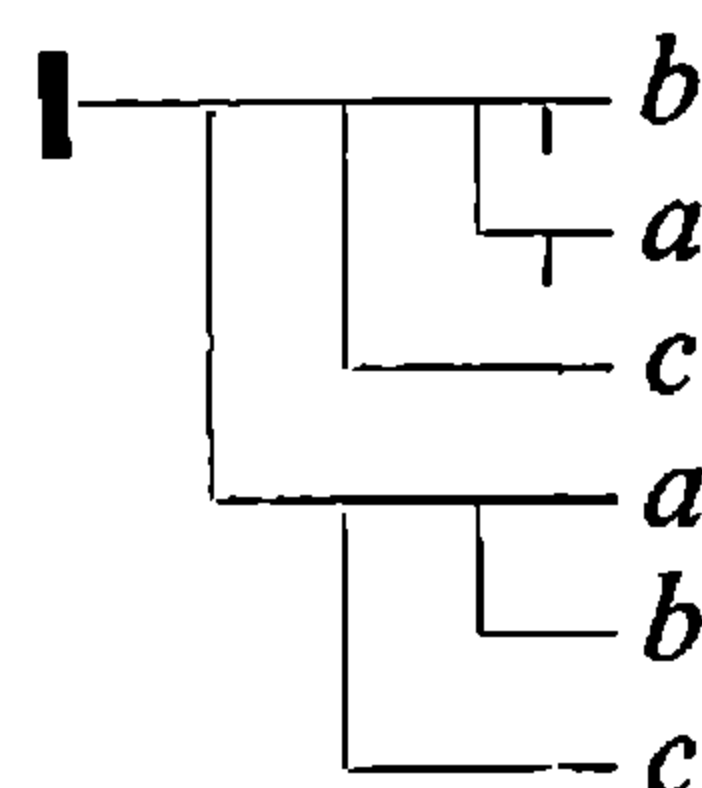
significa che ─┬─ a viene affermata e ─┬─ b negata; ossia che a viene negata e b affermata. Tale caso viene escluso da

```
───┬─── a
   └─── b
```

Questo giudizio offre la base al passaggio dal *modus ponens* al *modus tollens*. Ad esempio, significhino
b la proposizione che l'uomo *M* è in vita;
a la proposizione che *M* respira.
Allora abbiamo il giudizio:

"Se dalla circostanza che *M* vive può venir concluso che egli respira, allora dalla circostanza che egli non respira si può concludere che è morto."

```
28     ├────┬──┬┬── b
            │  └┬── a
            └───┬── a
                └── b
```

```
(5):     ──────────────

a │ ──┬┬── b          ├──┬──┬─┬┬── b
  │   └┬── a             │  │ └┬── a
b │ ──┬─── a             │  └───── c
  │   └─── b             └──┬──┬── a
                            │  └── b
                            └───── c      (29.
```

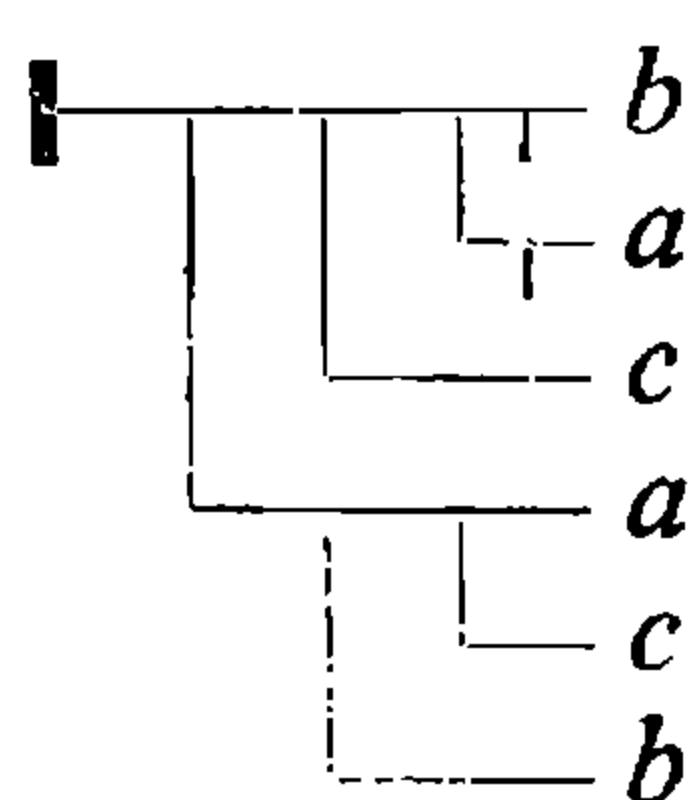
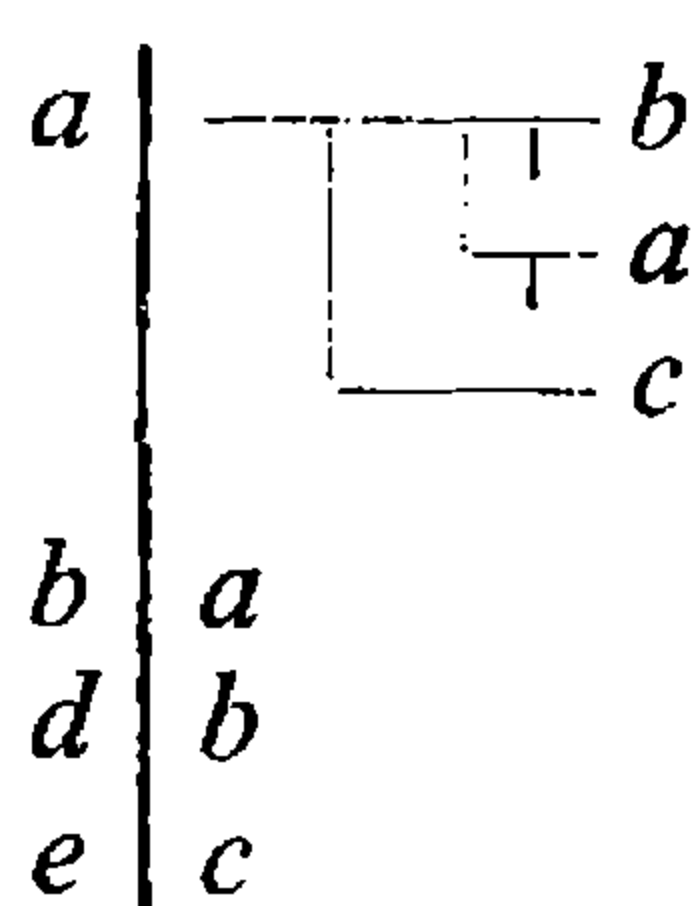
Se *b* e *c* sono condizioni sufficienti per *a*, allora dalla negazione di *a* e dall'affermazione di una delle due condizioni (*c*) può venir dedotta la negazione dell'altra.

```
29     ├──┬──┬─┬┬── b
          │  │ └┬── a
          │  └───── c
          └──┬──┬── a
             │  └── b
             └───── c

(10):    ──────────────
```

[1] [La (28) rappresenta il quarto assioma di Frege, ossia $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$, che esprime quindi la prima legge di contrapposizione.]

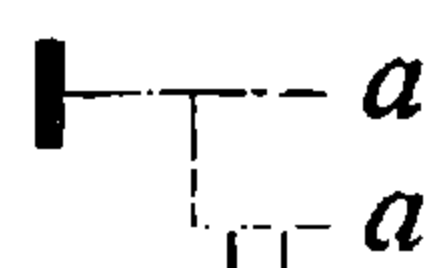
(10):

a | b a c

b | a
d | b
e | c

b a c a c b

(30.

18. Il secondo principio della negazione e sue conseguenze

a a

(31.

a significa la negazione della negazione, e quindi l'affermazione di *a*. Di conseguenza non può venir negata *a* e (contemporaneamente) affermata a.[1] *Duplex negatio affirmat.* La negazione della negazione è affermazione.

31
a | b

b b

(7):

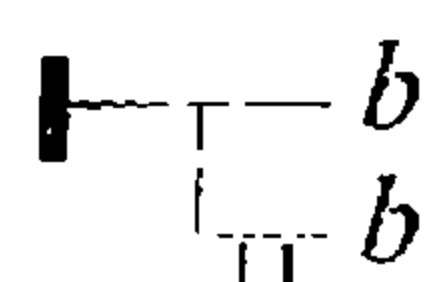
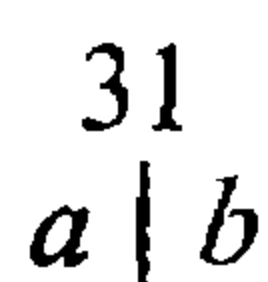
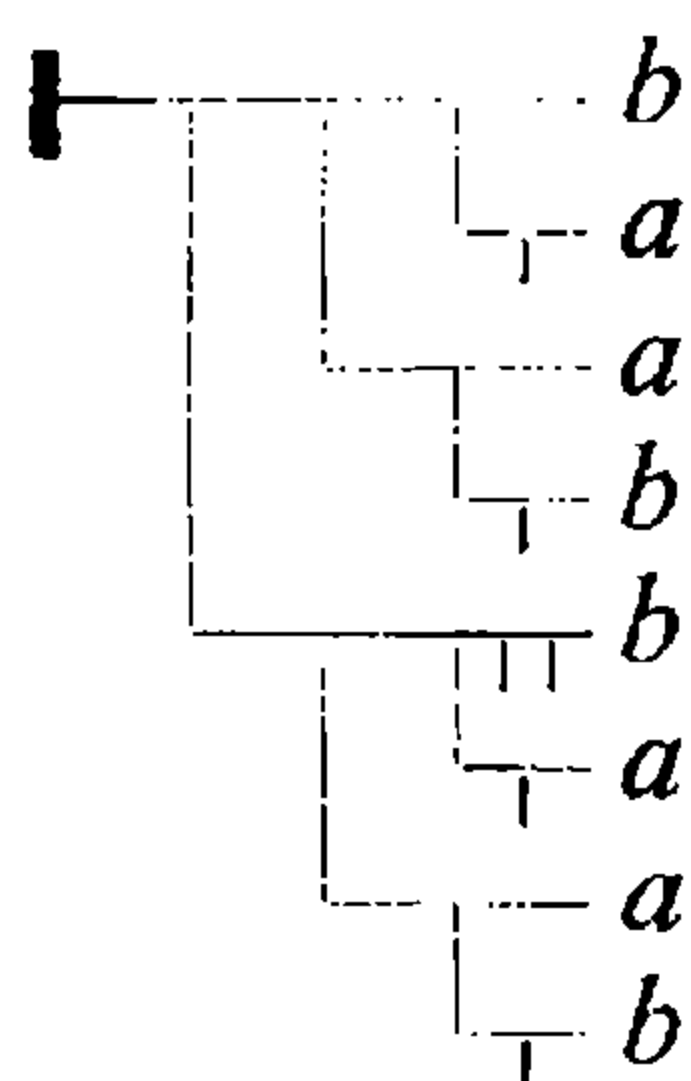
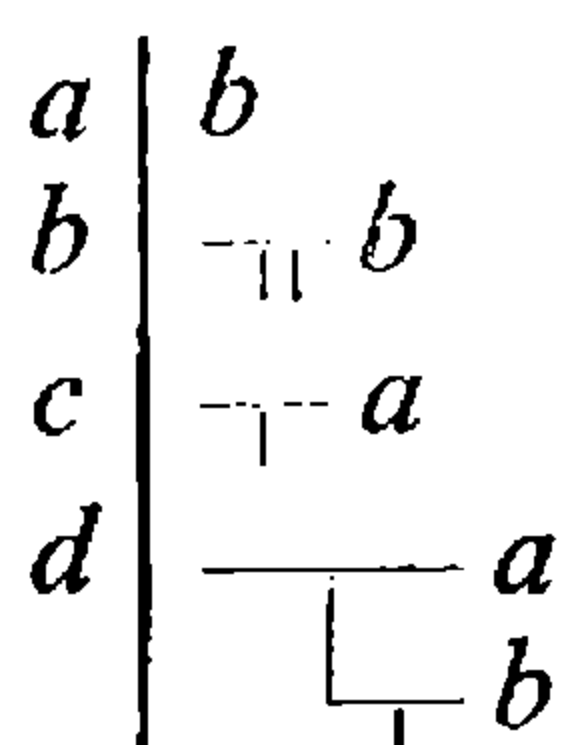
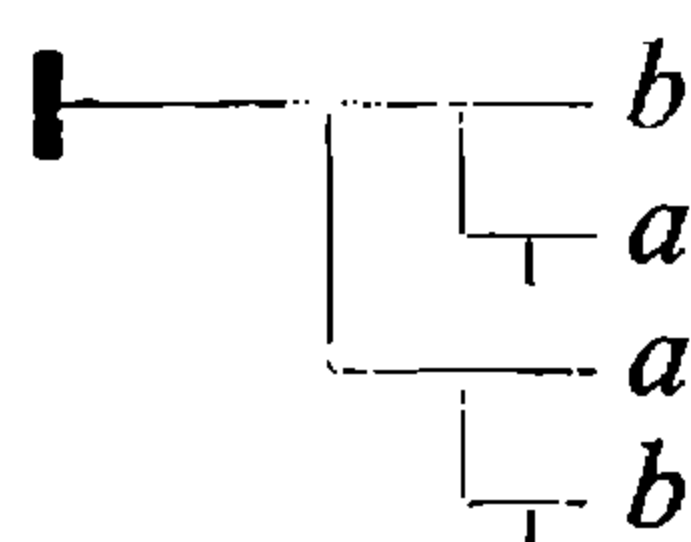
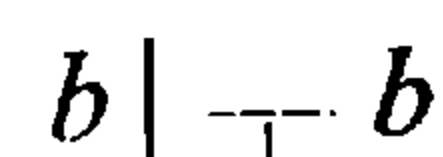
a | b
b | b
c | a
d | a b

b a a b b a a b

(32.

(28)::

b | b

b a a b

(33.

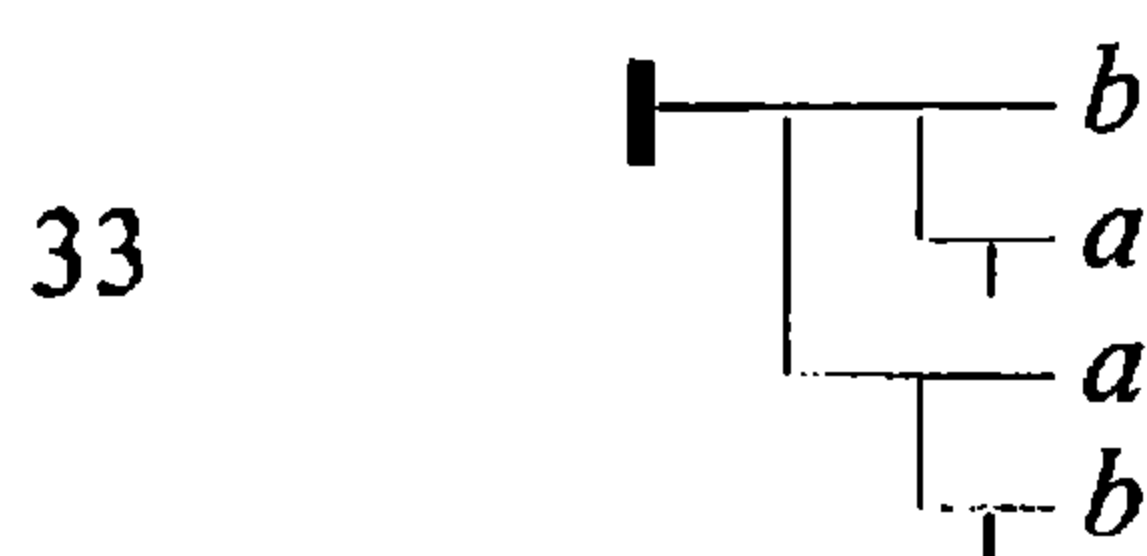
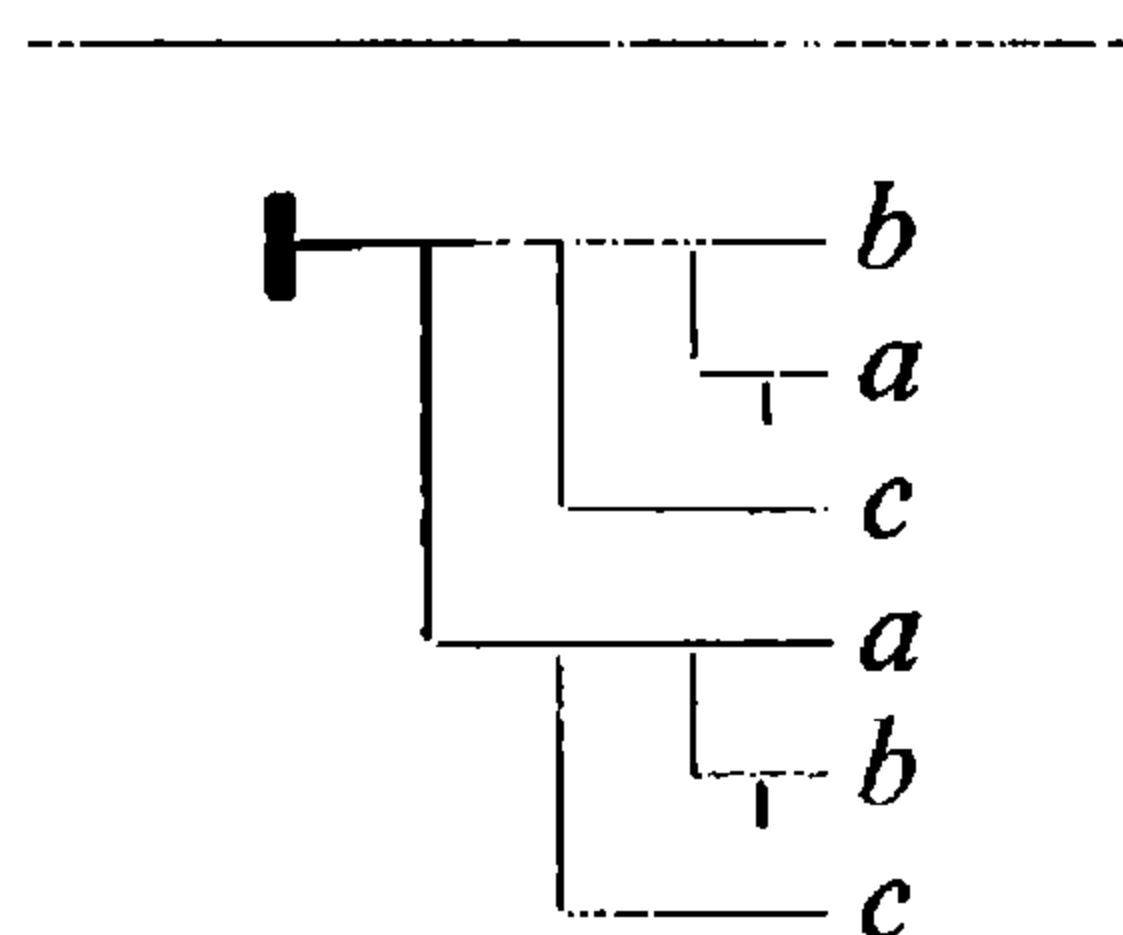
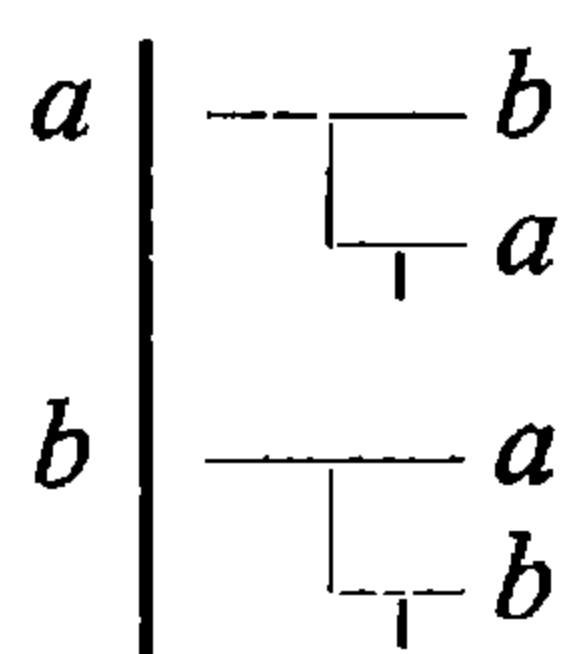
[1] [È questo il quinto assioma $\neg\neg p \rightarrow p$.]

Se ha luogo *a* o *b*, allora ha luogo *b* o *a*.

33

(5):

a | *b* *a*

b | *a* *b*

(34.

Se il subentrare della circostanza *c*, quando sia soppresso l'impedimento *b* ha per conseguenza il verificarsi di *a*, allora, se *a* non ha luogo allorché subentra *c*, si può concludere che è subentrato l'impedimento *b*.

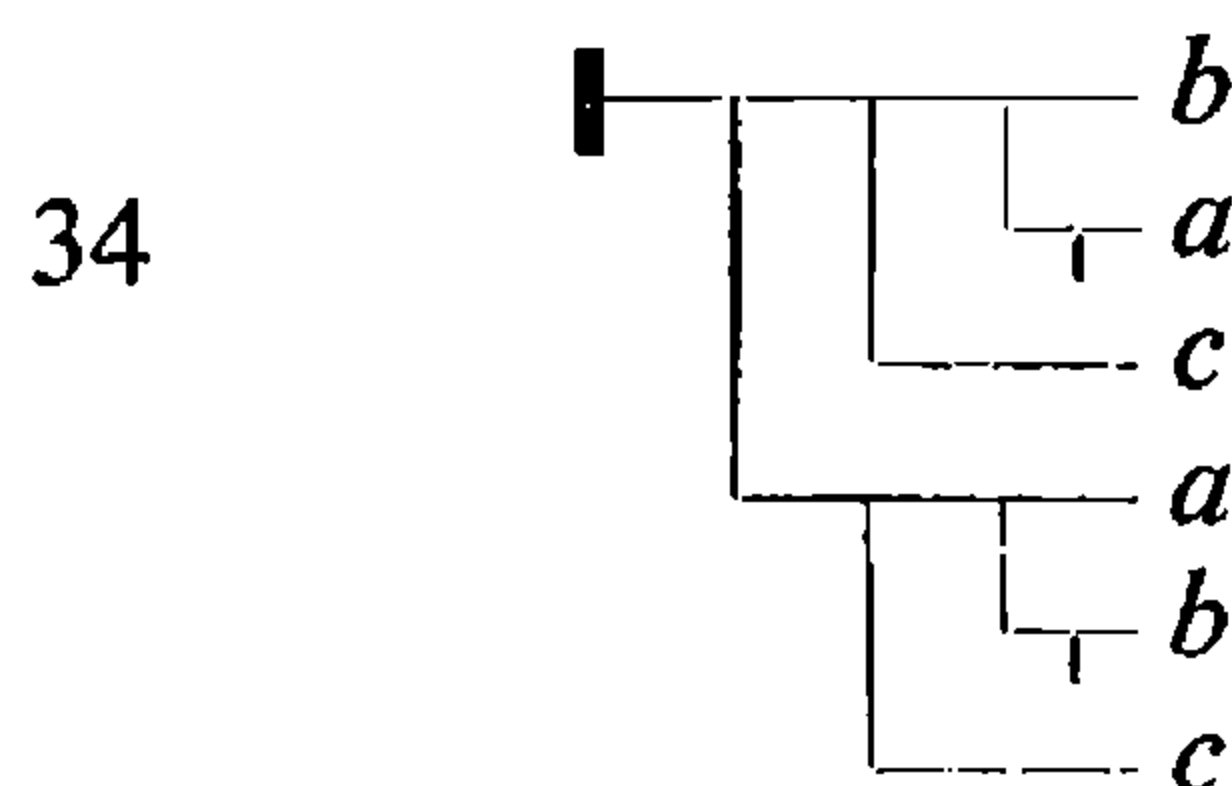
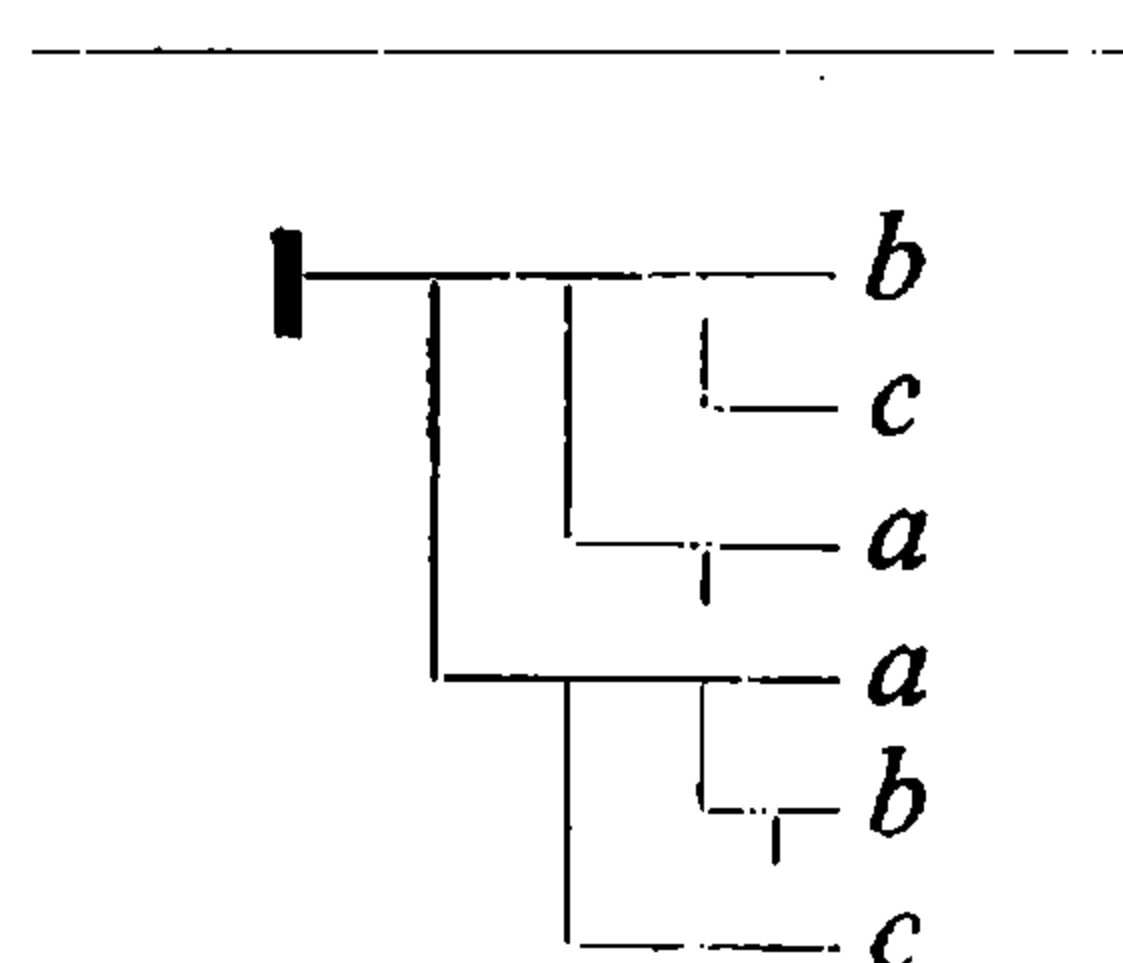
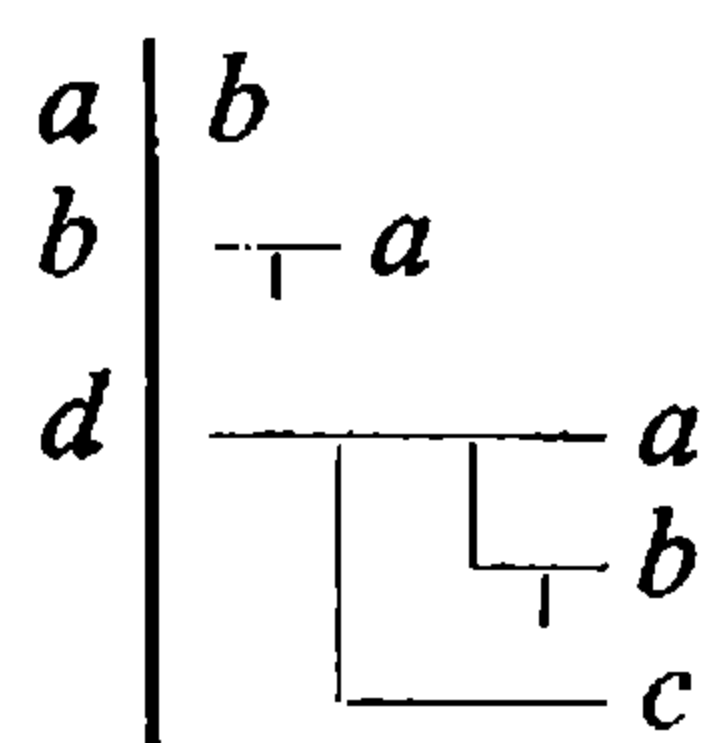
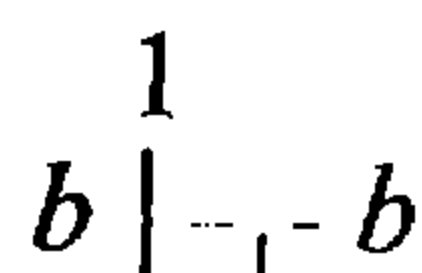
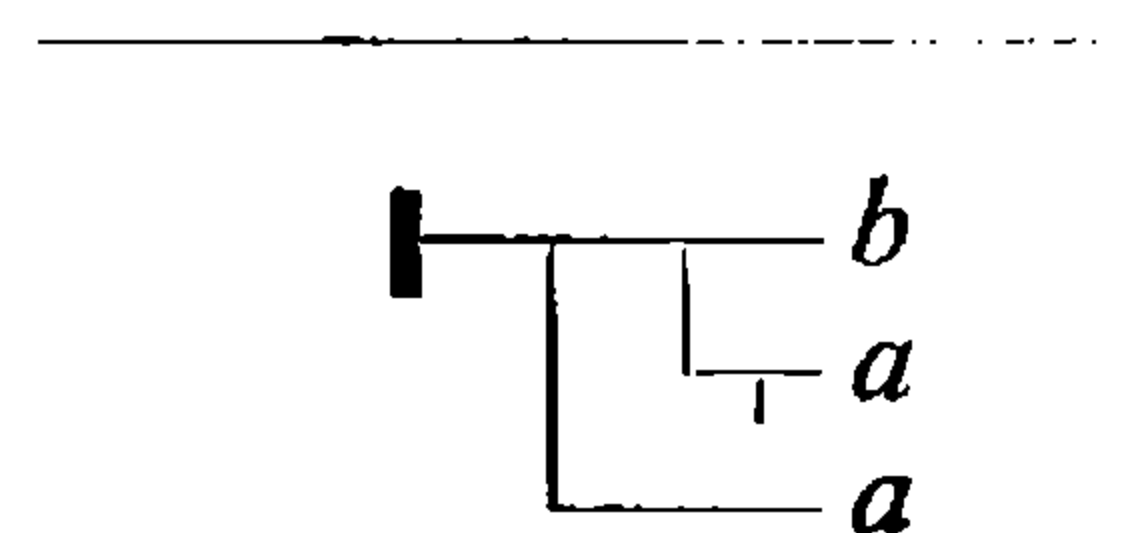
34

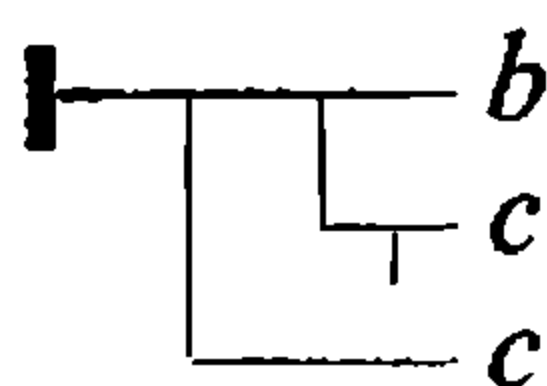
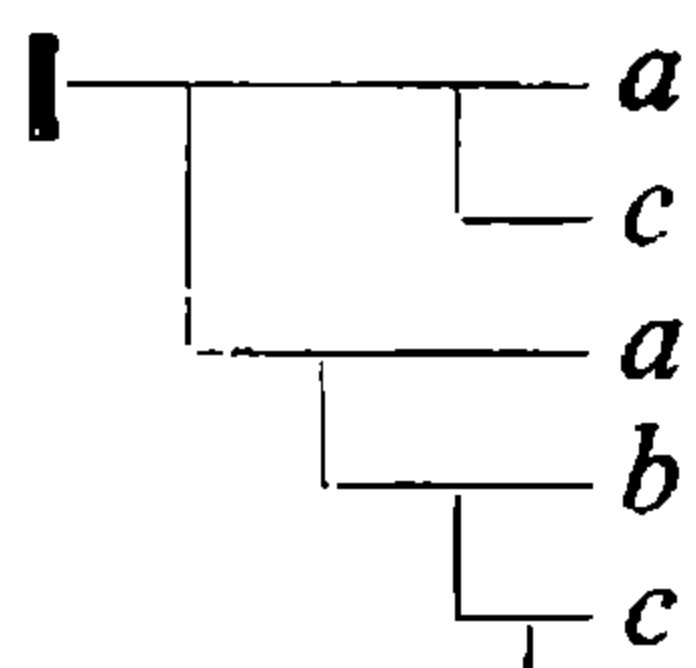
(12):

a | *b*
b | *a*
d | *a* *b* *c*

(35.

1
b | *b*

(34):
c | *a*

(36.

Non si presenta il caso che *b* viene negata, ┬ *a* affermata e *a* affermata. Si può esprimere questo dicendo: "Se si presenta *a*, allora ha luogo una delle due, *a* oppure *b*."

```
36
a | c            |-┬──┬── b
                   │  └┬─ c
                   └──── c
(9):         ──────────────────
b | ──┬── b      |-┬──┬── a
    │ └┬─ c        │  └── c
                   └─┬─── a
                     └┬── b
                      └┬─ c            (37.
```

Se *a* è la conseguenza necessaria del fatto che si presenta *b* o *c*, allora *a* è la conseguenza necessaria della sola *c*. Supponiamo per esempio che significhino:

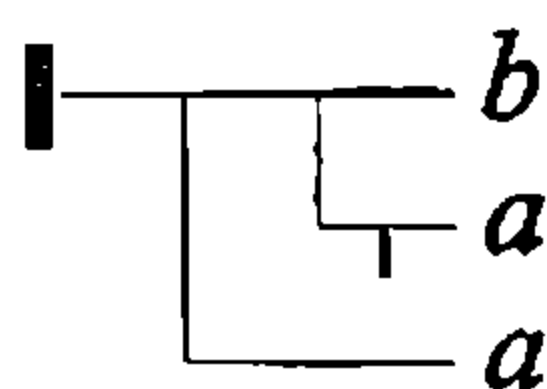
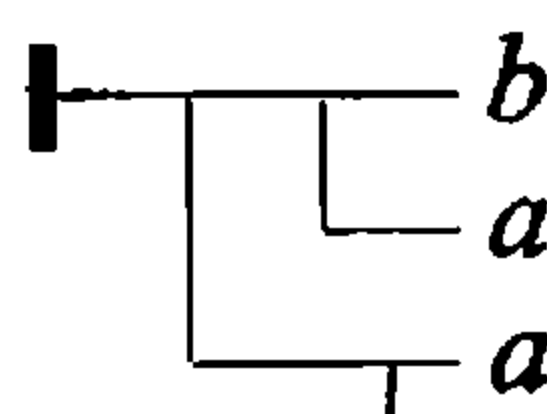
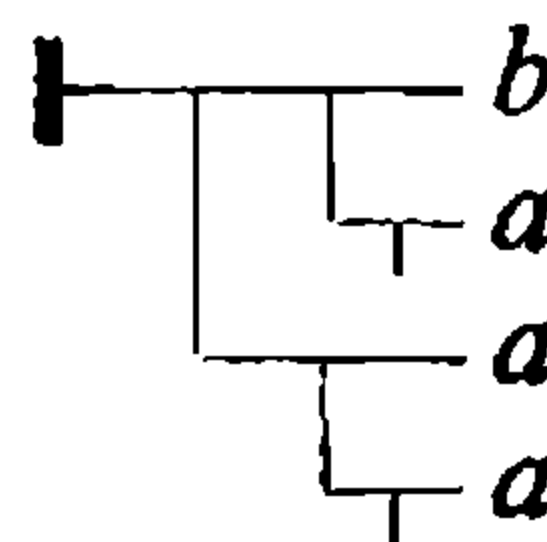
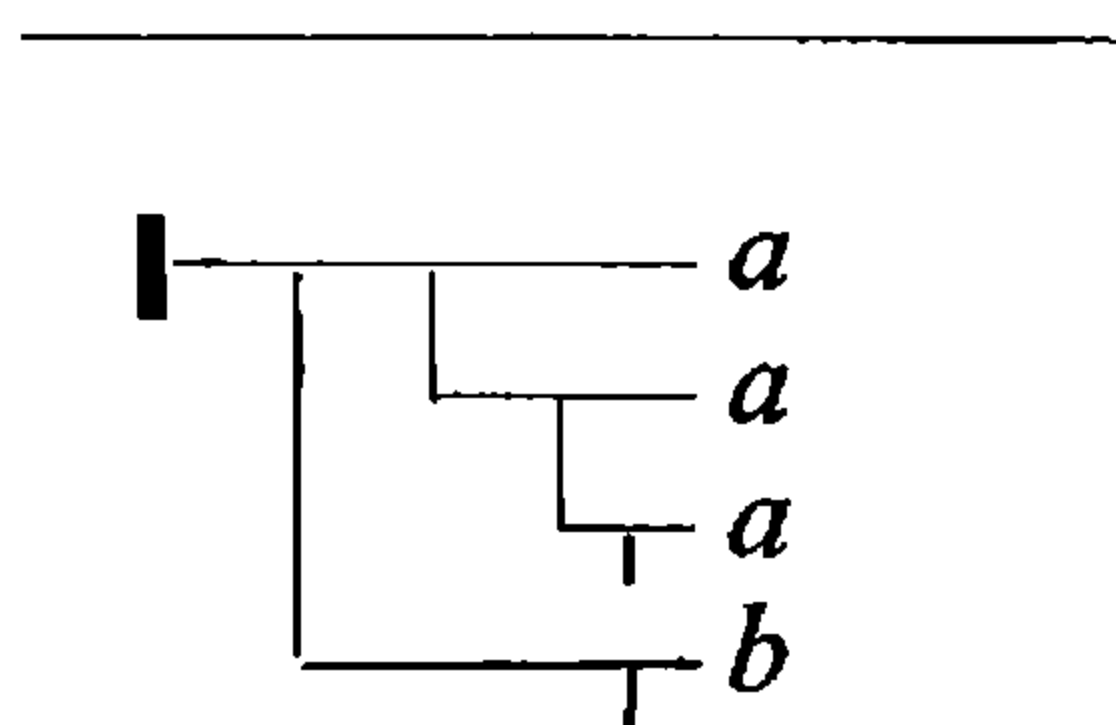
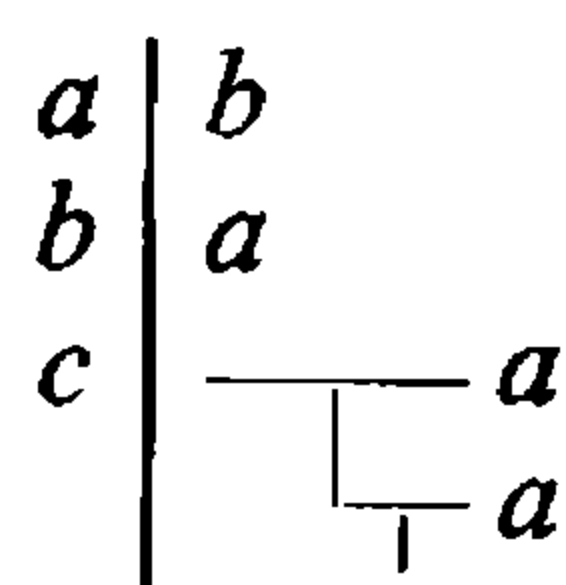
b la circostanza che il primo fattore di un prodotto *P* si annulla;
c la circostanza che il secondo fattore di *P* si annulla;
a la circostanza che il prodotto *P* si annulla.

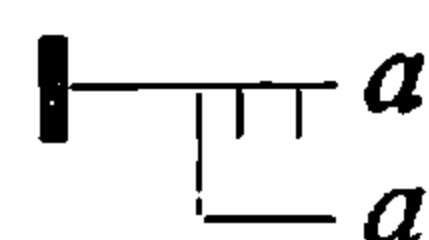
Allora abbiamo il giudizio:

"Se il prodotto *P* si annulla quando il primo o il secondo dei suoi fattori si annulla, allora dall'annullarsi del secondo fattore, si può concludere che il prodotto si annulla".

```
          36     |-┬──┬── b
                   │  └┬─ a
                   └──── a
(8):         ──────────────────
a | b            |-┬──┬── b
b | ┬ a            │  └── a
d | a              └───┬─ a            (38.
(2):         ──────────────────
a | b            |-┬──┬── b
b | a              │  └┬─ a
c | ┬ a            └──┬── a
                      └┬─ a            (39.
(35):        ──────────────────
```

(35):

a | b
b | a
c | $\neg a \to a$ (formula in notazione concettuale)

(40.

19. Il terzo principio della negazione e sue conseguenze

(41.

L'affermazione di a nega la negazione di a.[1]

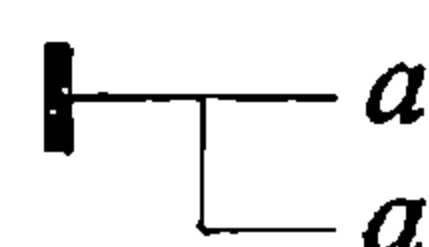
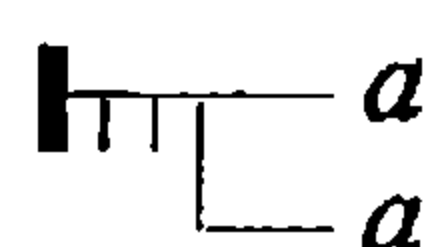
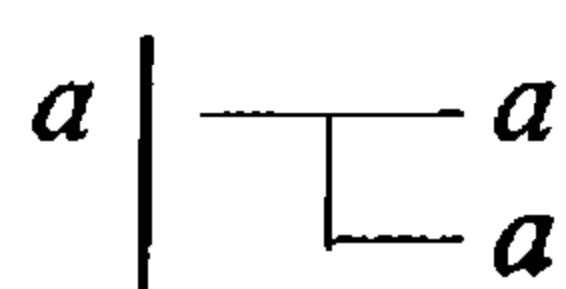
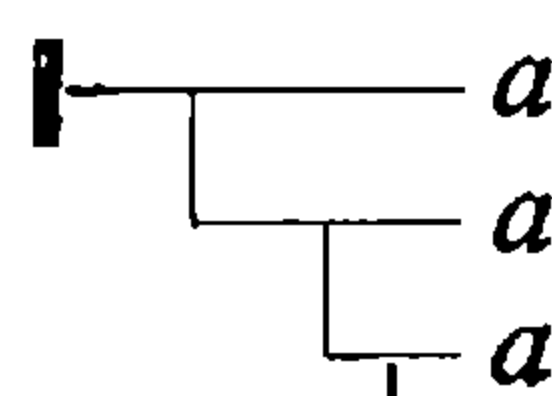
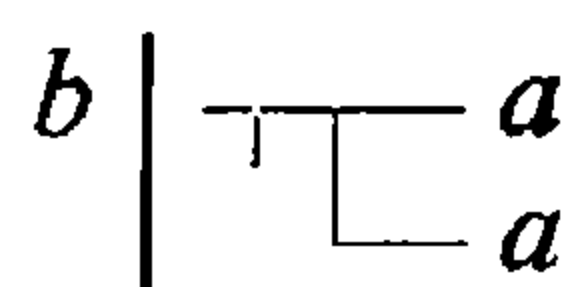
27

(41):

a | (formula in notazione concettuale)

(42.

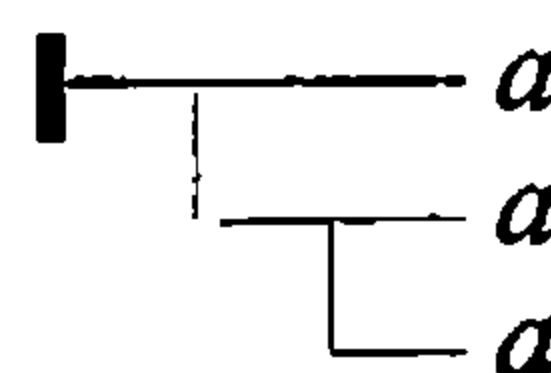
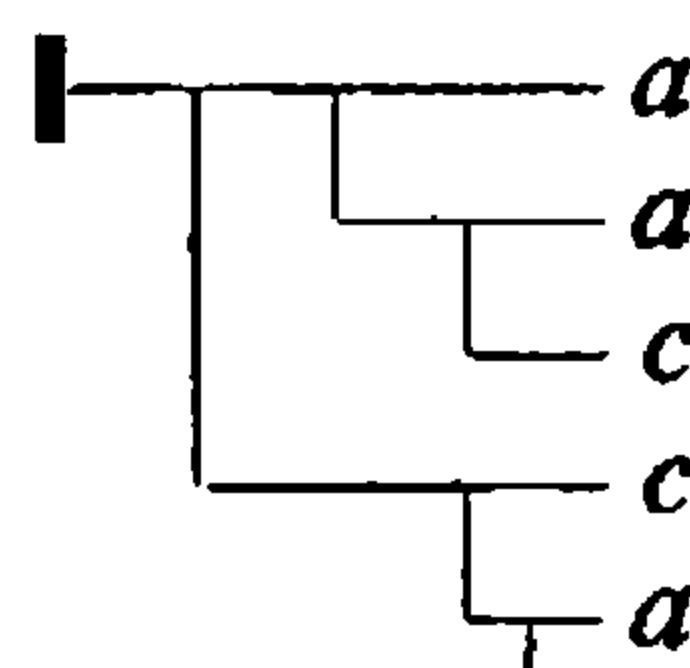
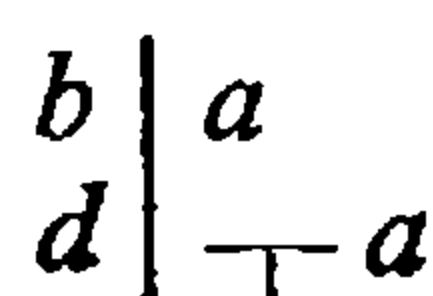
(40):

b | (formula in notazione concettuale)

(43.

Se l'alternativa è solo fra a e a, allora a ha luogo. Ad esempio, si debba distinguere fra due casi che esauriscono l'intera possibilità. Perseguendo il primo si giunge al risultato che a ha luogo; perseguendo il secondo si giunge allo stesso risultato. Allora vale la proposizione a.

43

(21):

b | a
d | $\neg a$

(44.

(5)

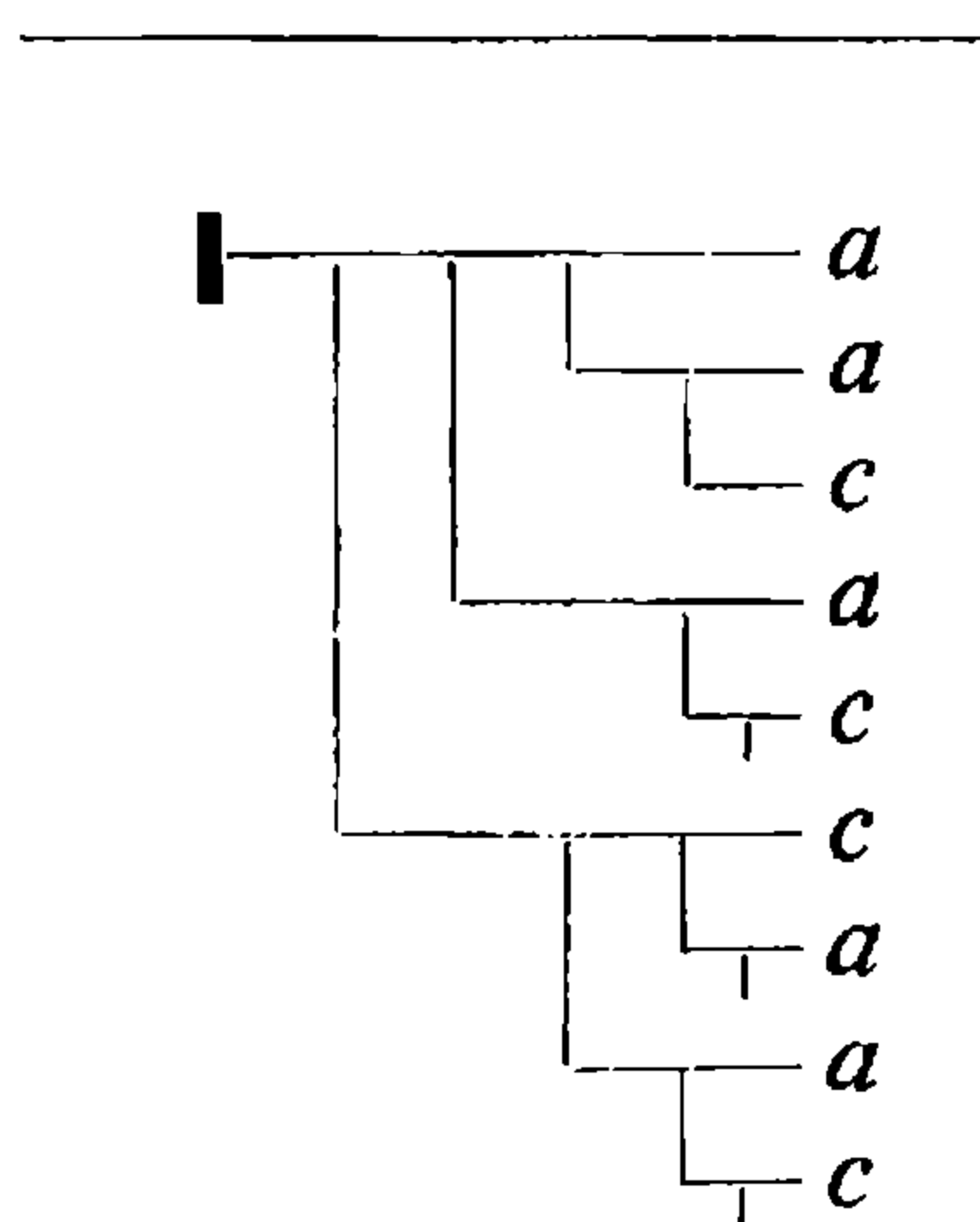
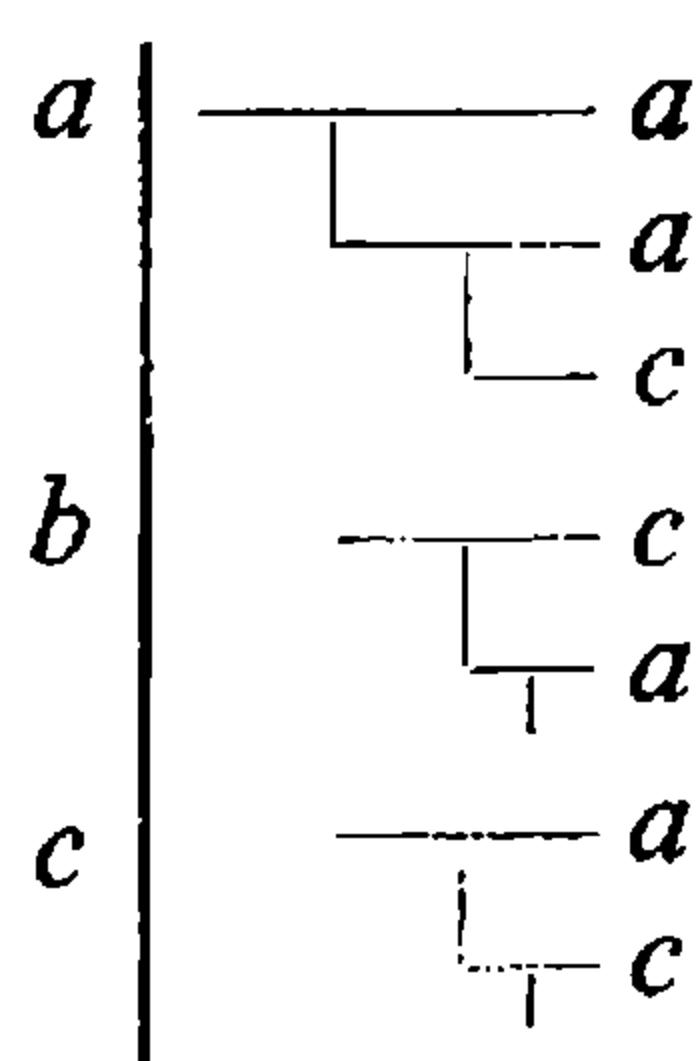
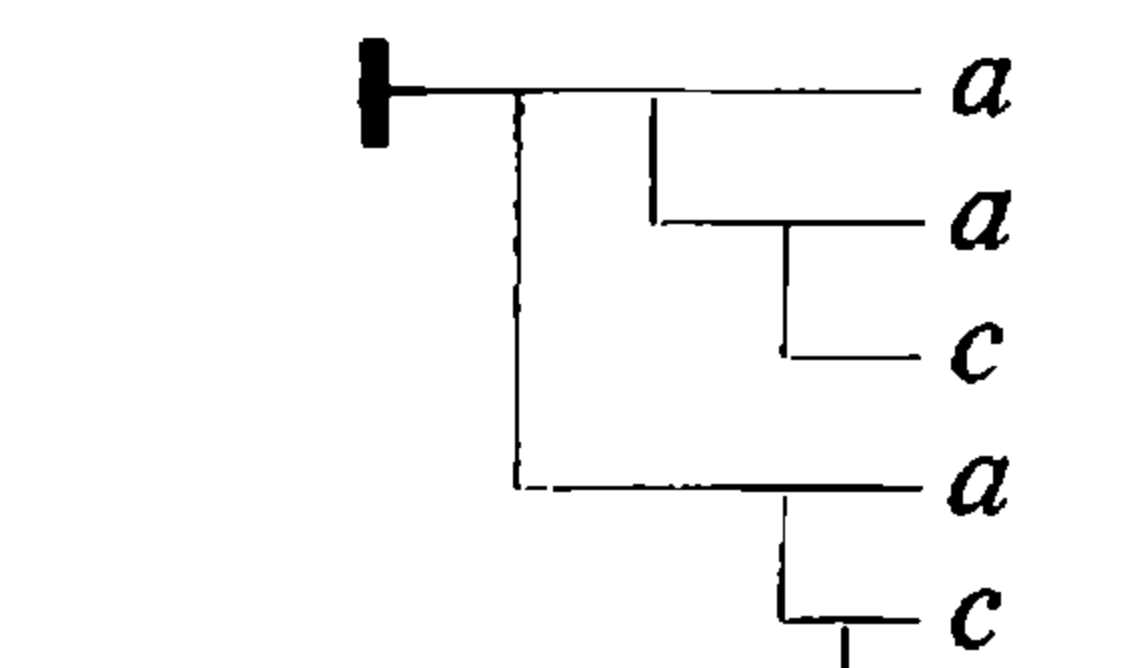
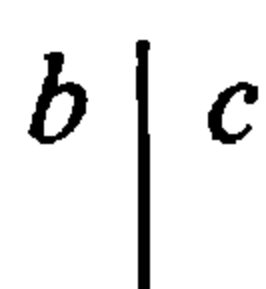
[1] [Sesto assioma introdotto da Frege: $p \rightarrow \neg\neg p$.]

(5):

a | a a c
b | c a
c | a c

a a c a c c a a c (45.

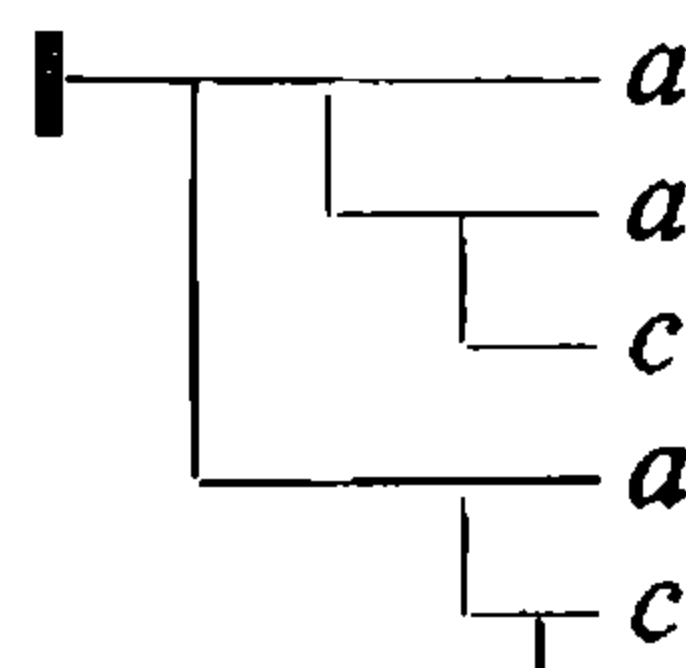
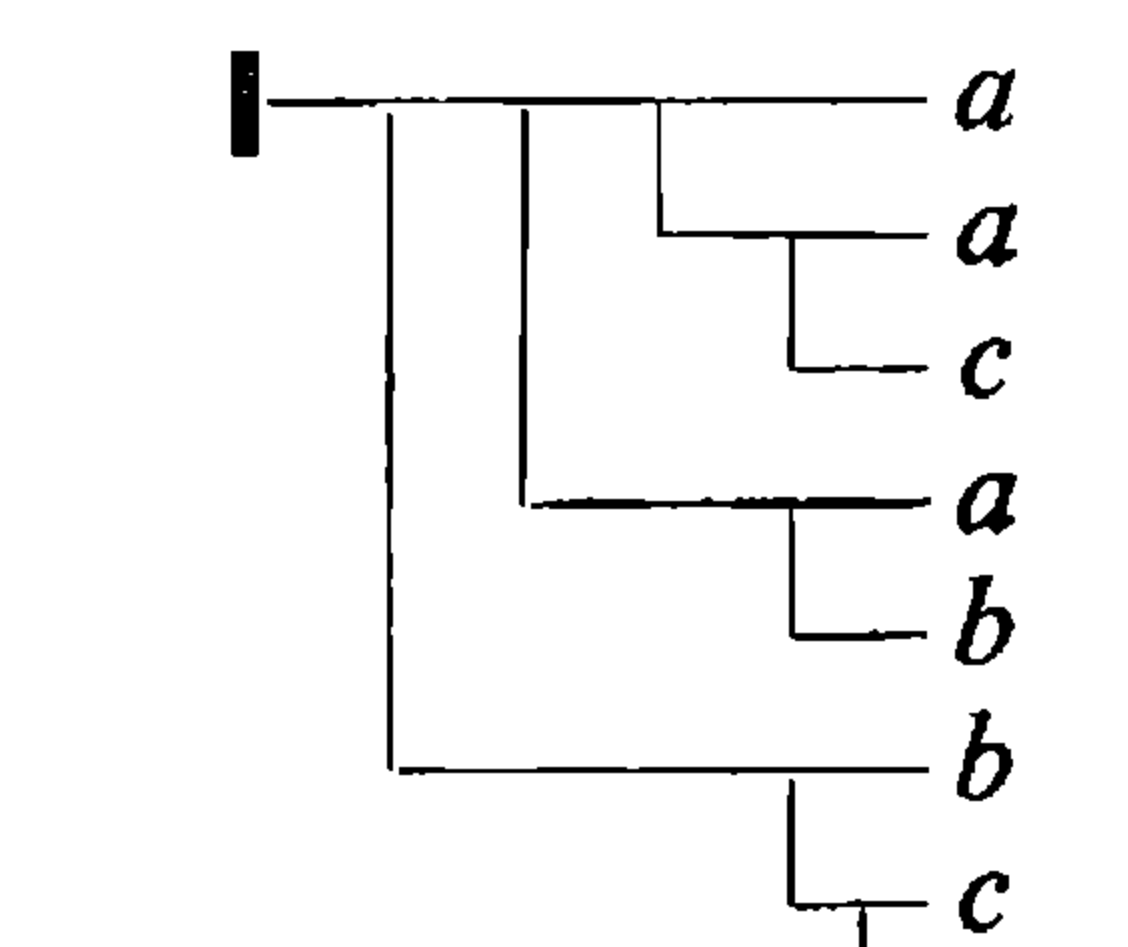
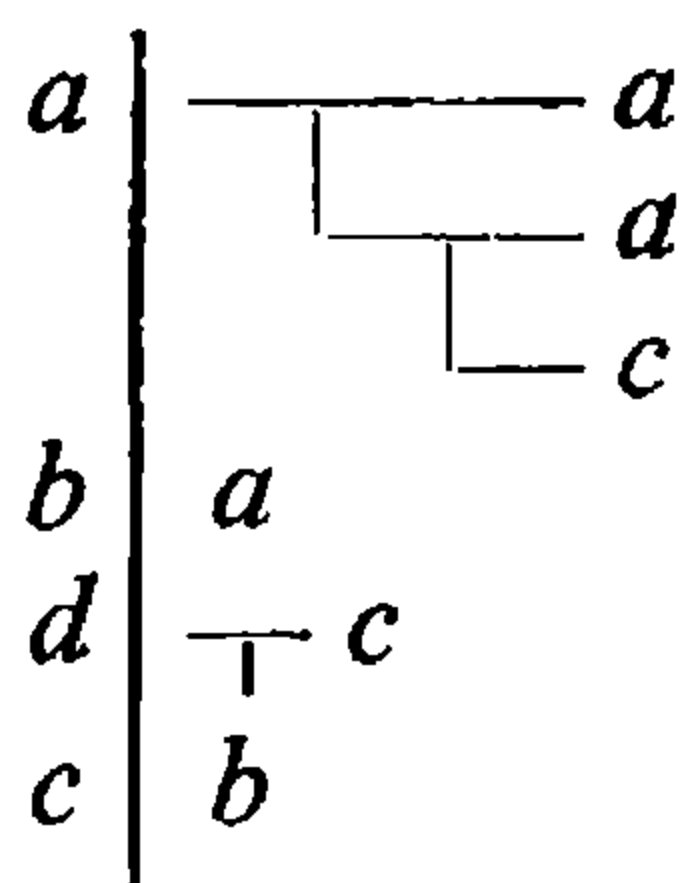
(33)::

b | c

a a c a c (46.

Se *a* vale, tanto nel caso che *c* si presenti, quanto in quello che *c* non si presenti, allora *a* vale. Un'altra espressione di questo principio è la seguente: "Se si presenta *a* o *c*, e se il presentarsi di *c* ha come conseguenza necessaria il presentarsi di *a*, allora *a* ha luogo."

46 a a c a c

(21):

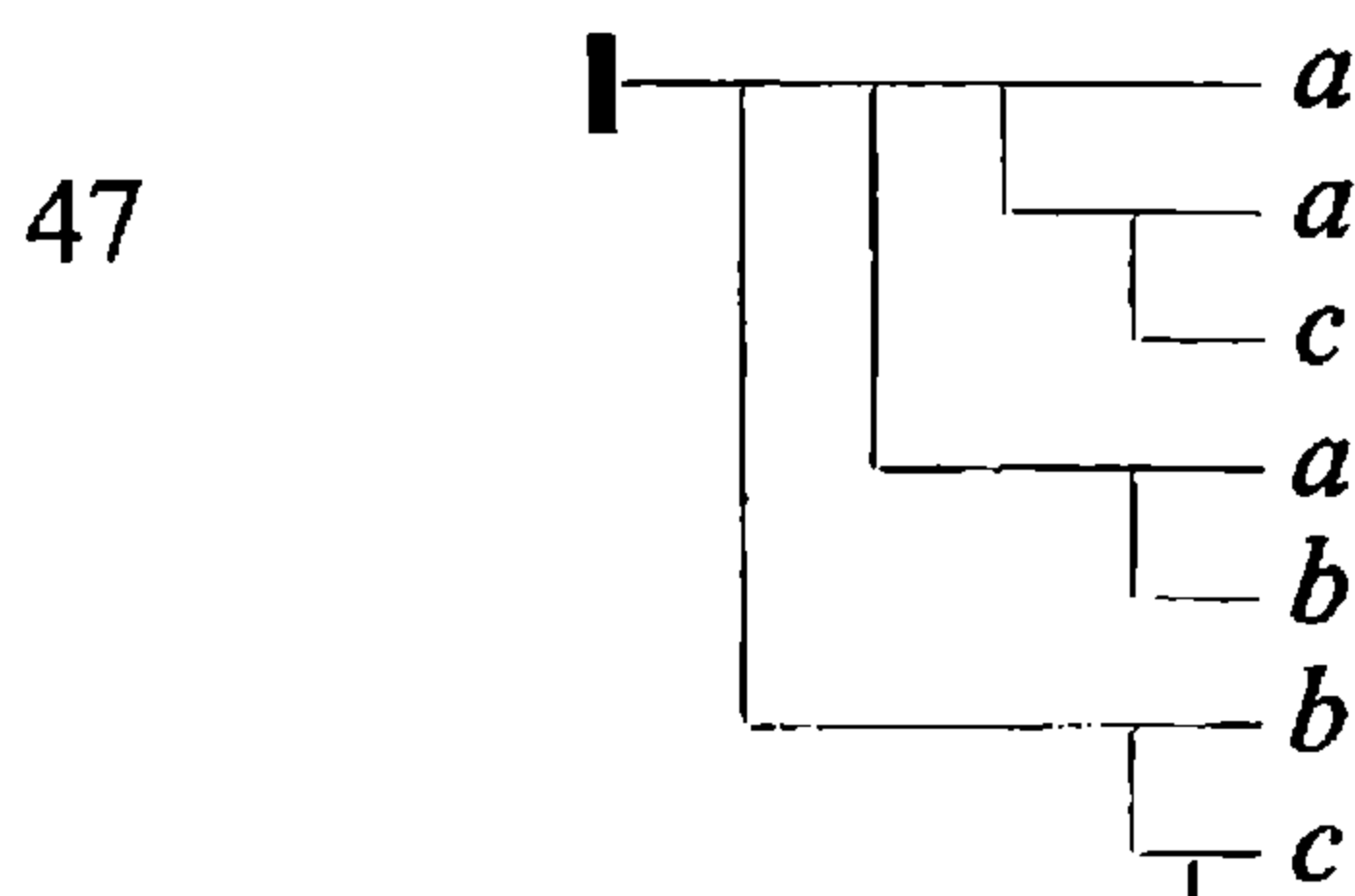
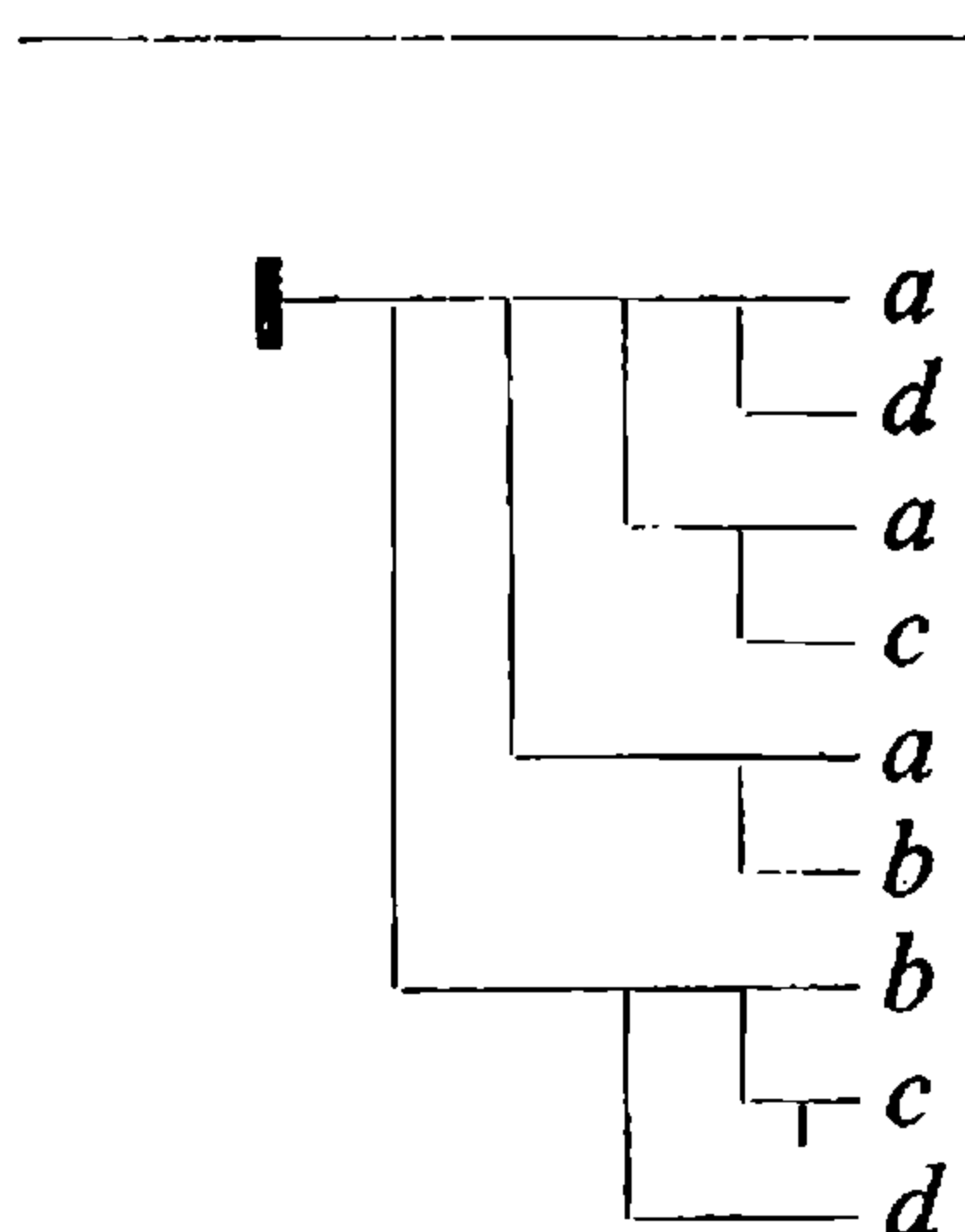
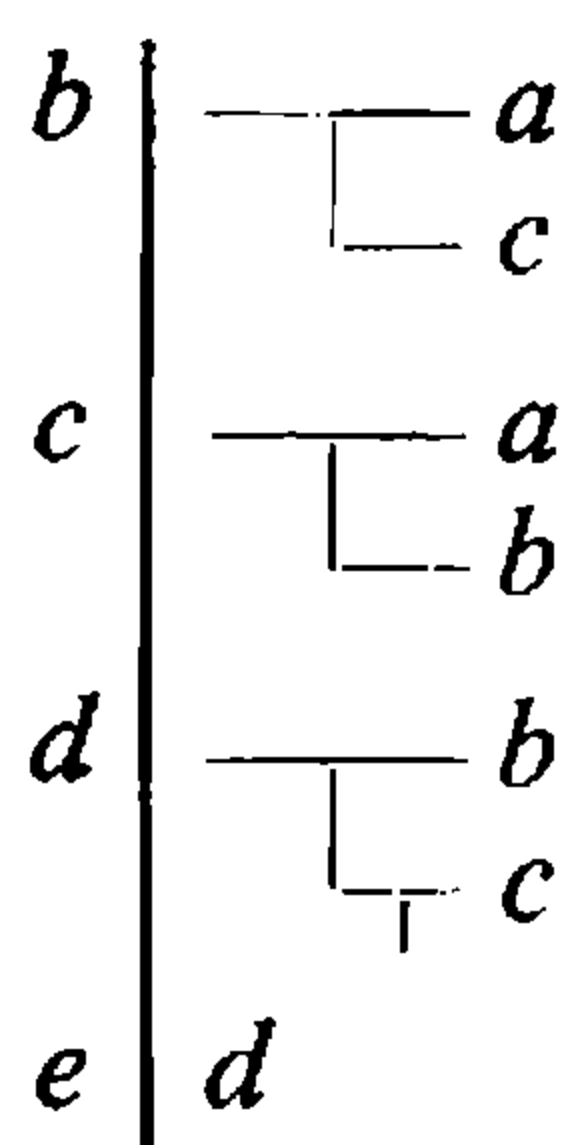
a | a a c
b | a
d | c
c | b

a a c a b b c (47.

Si può esprimere questa proposizione cosí: "Se tanto *c* quanto *b* sono condizioni sufficienti per *a*, e se ha luogo *b* o *c*, allora la proposizione *a*

vale." Questo giudizio viene impiegato quando, in una dimostrazione, debbano distinguersi due casi. Ove ricorrano piú casi, ci si può sempre ricondurre a due, riguardando uno dei casi come primo, e la totalità degli altri come secondo. Questa totalità a sua volta può scindersi in due casi, e si può proseguire in questo modo finché tali scissioni risultano possibili.

```
47      |-+--+--+------- a
          |  |  |
          |  |  +---+--- a
          |  |      |
          |  |      +--- c
          |  |
          |  +------+--- a
          |         |
          |         +--- b
          |
          +---------+--- b
                    |
                    +-T- c
```

(23): ―――――――――――――

```
b | -+--- a          |-+--+--+--+--- a
  |  +--- c            |  |  |  |
  |                    |  |  |  +--- d
c | -+--- a            |  |  |
  |  +--- b            |  |  +--+--- a
  |                    |  |     +--- c
d | -+--- b            |  |
  |  +-T- c            |  +-----+--- a
  |                    |        +--- b
e | d                  |
                       +--+--+------ b
                          |  +---T-- c
                          |
                          +--------- d
```

(48.

Se *d* è una condizione sufficiente a che *b* o *c* abbiano luogo, e se tanto *b* quanto *c* sono condizioni sufficienti per *a*, allora *d* è una condizione sufficiente per *a*. La derivazione della formula (101) offre un esempio di applicazione della (48).

```
47      |-+--+--+------- a
          |  |  |
          |  |  +---+--- a
          |  |      +--- c
          |  |
          |  +------+--- a
          |         +--- b
          |
          +---------+--- b
                    +-T- c
```

(12): ―――――――――――――

(12):

b	a, c
c	a, b
d	b, c

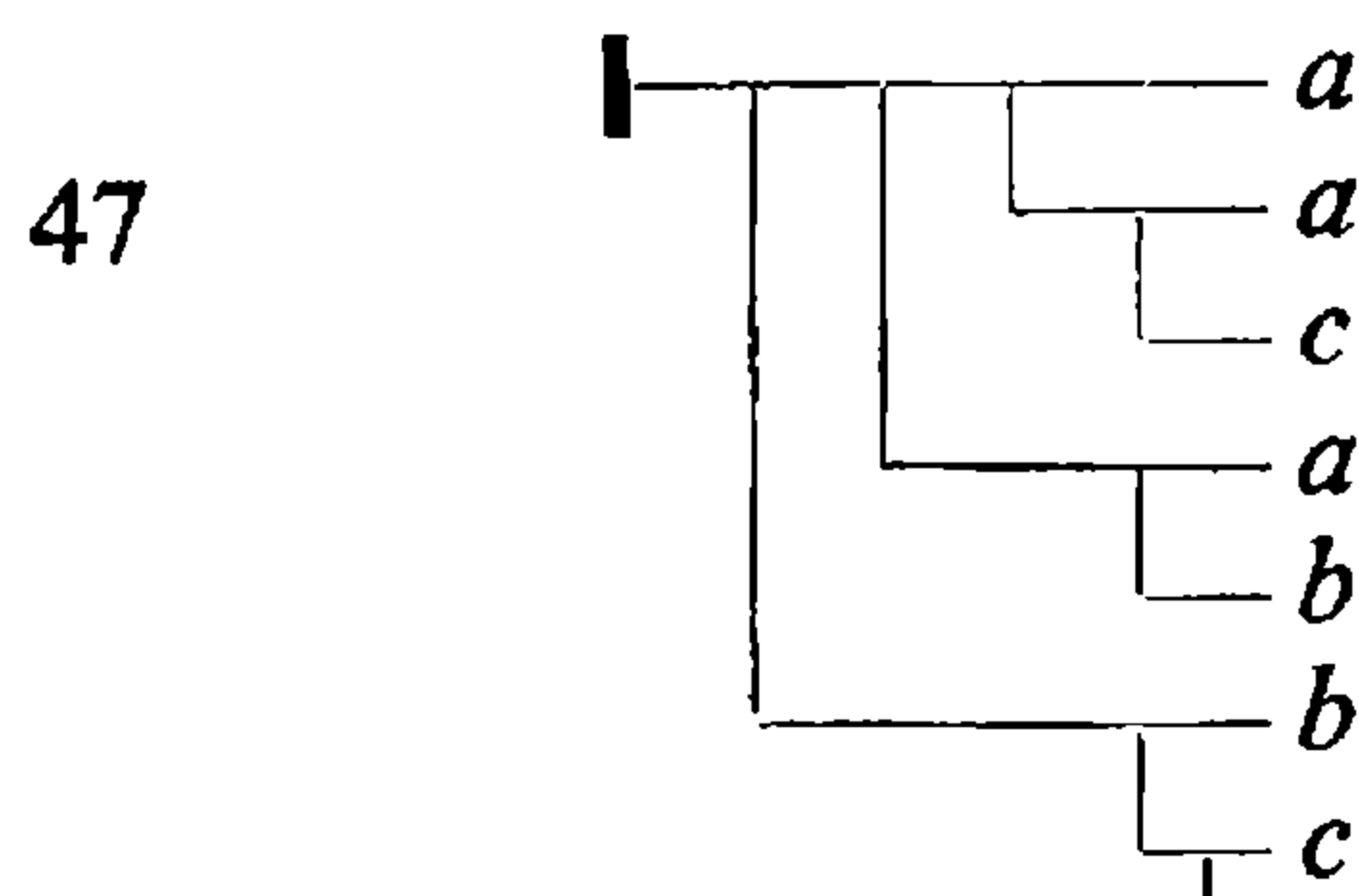
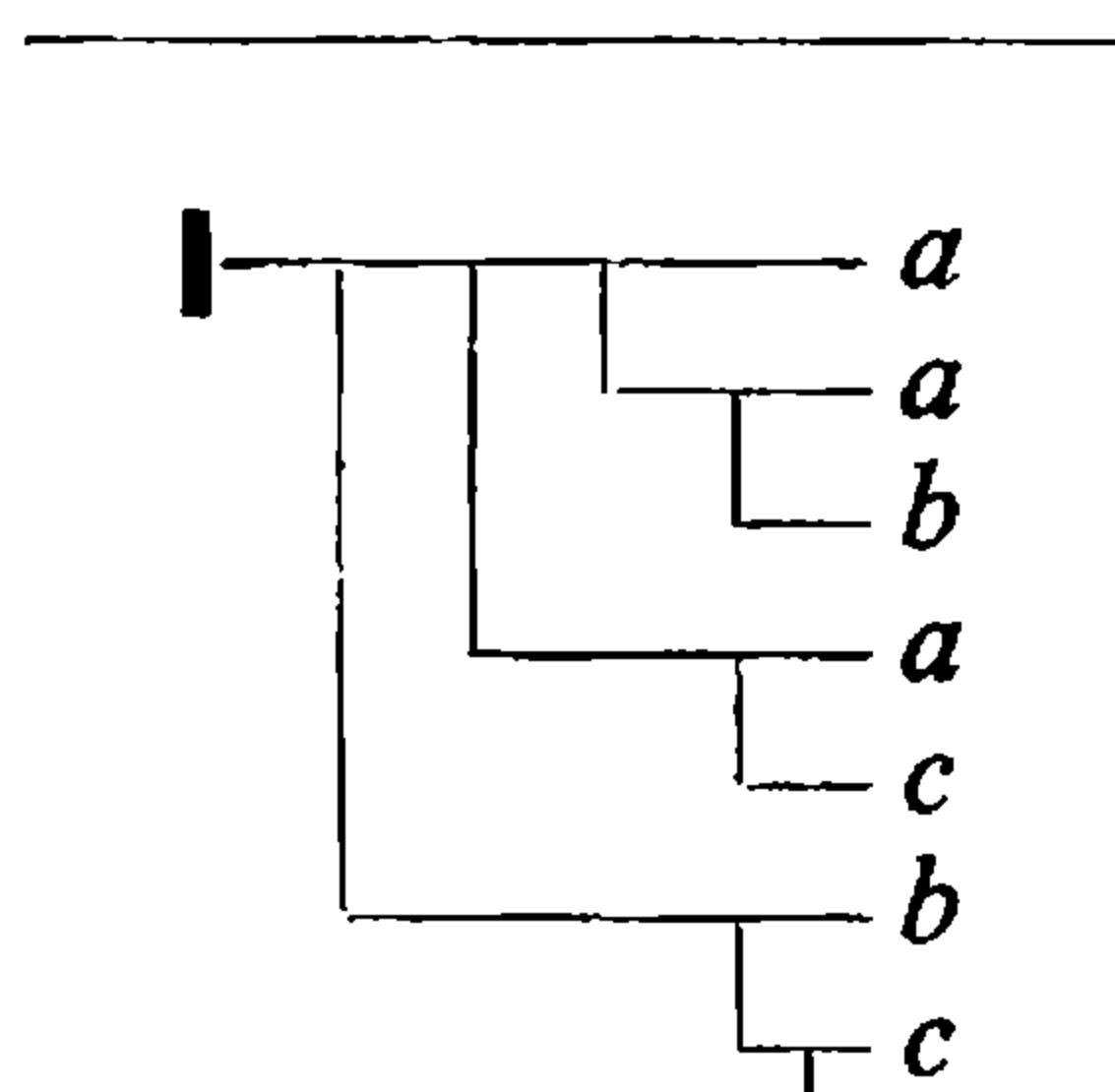
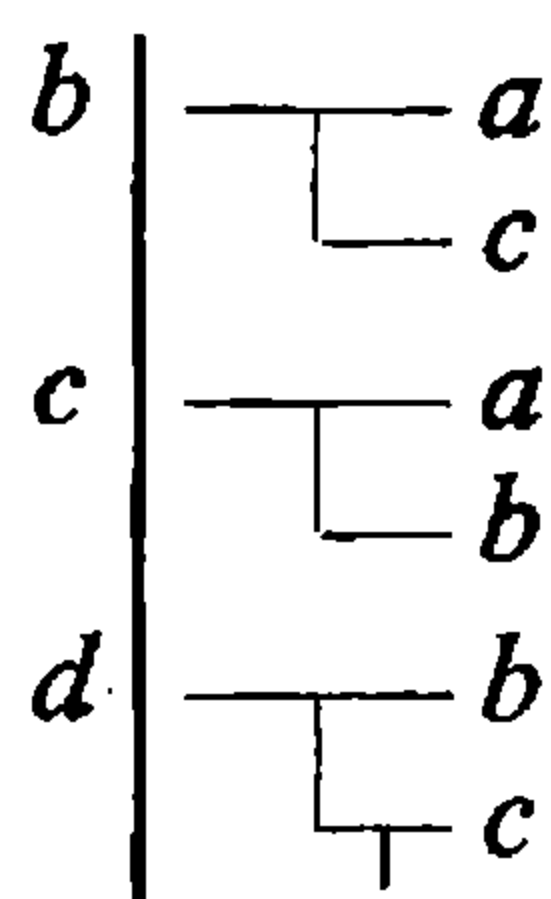
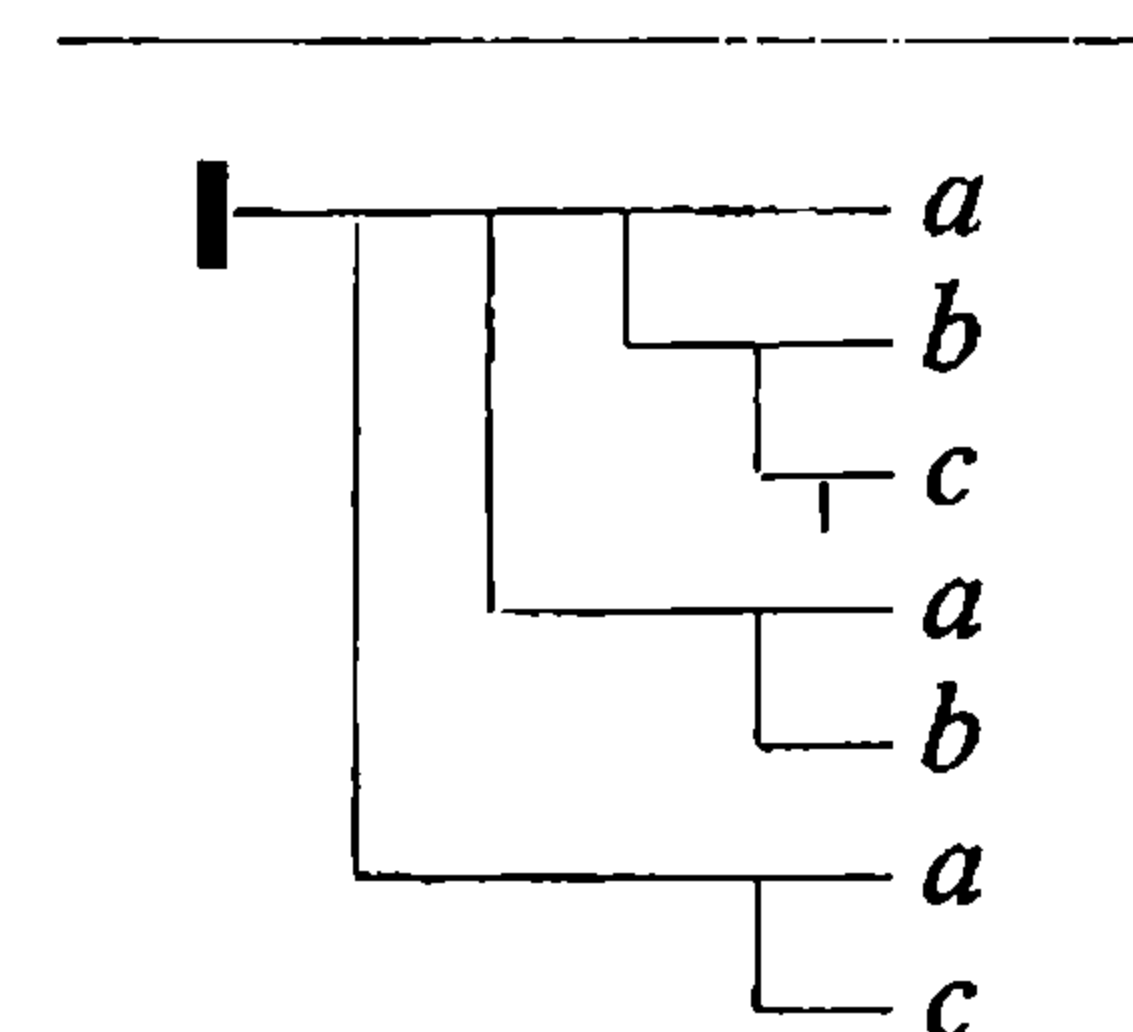
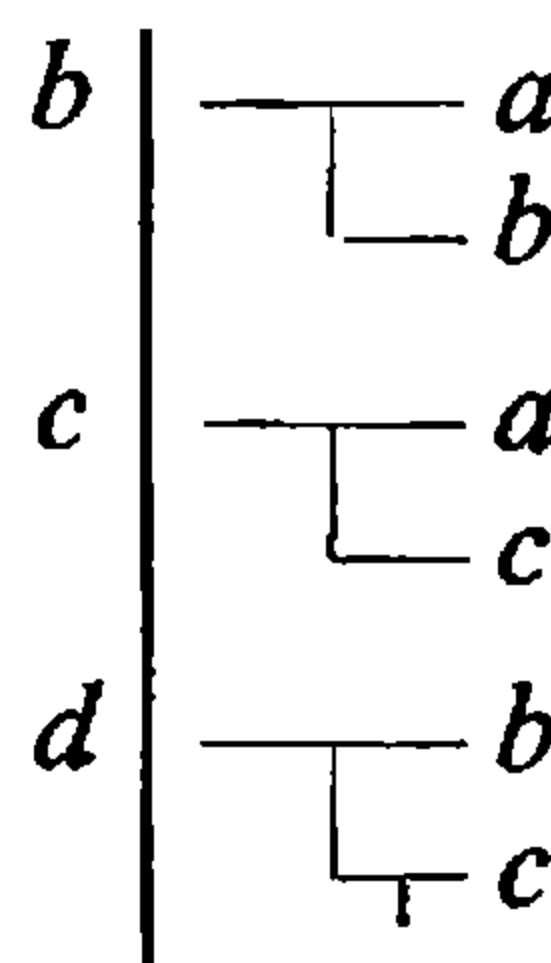
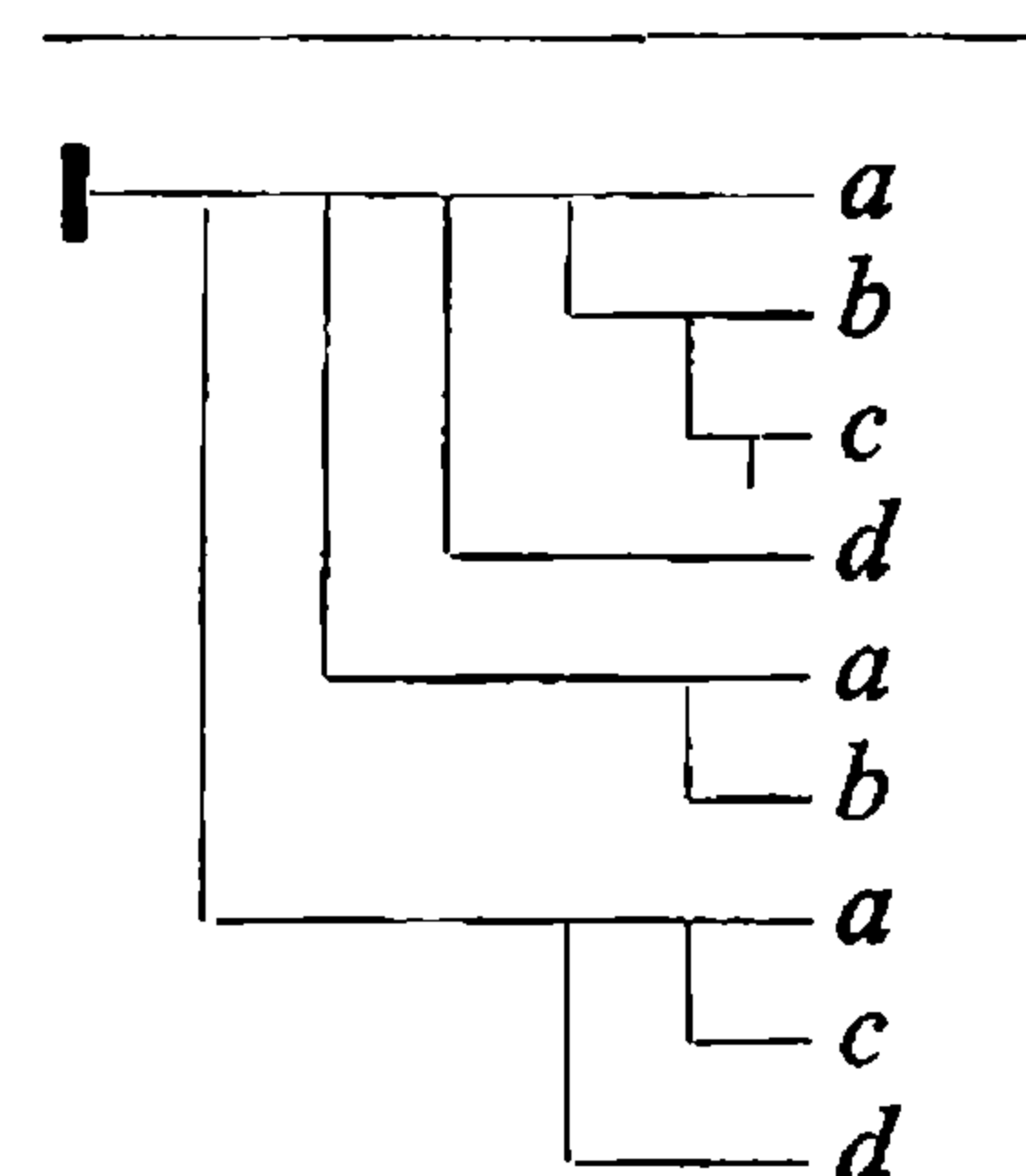
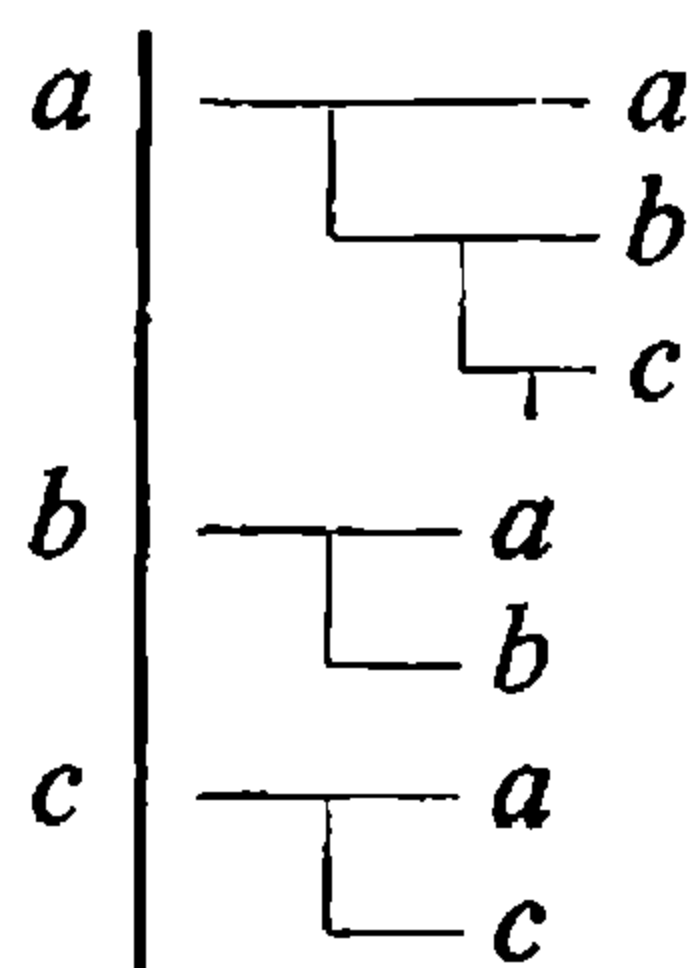
a
a
b
a
c
b
c (49.

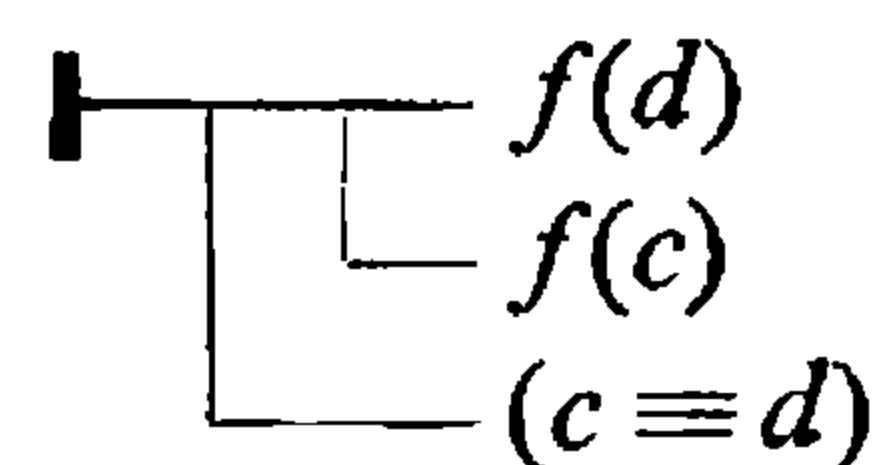
(17):

b	a, b
c	a, c
d	b, c

a
b
c
a
b
a
c (50.

(18):

a	a, b, c
b	a, b
c	a, c

a
b
c
d
a
b
a
c
d (51.

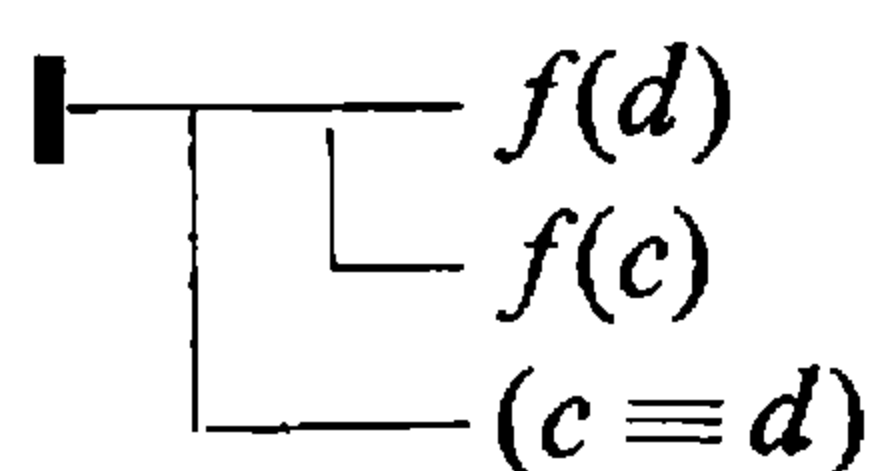
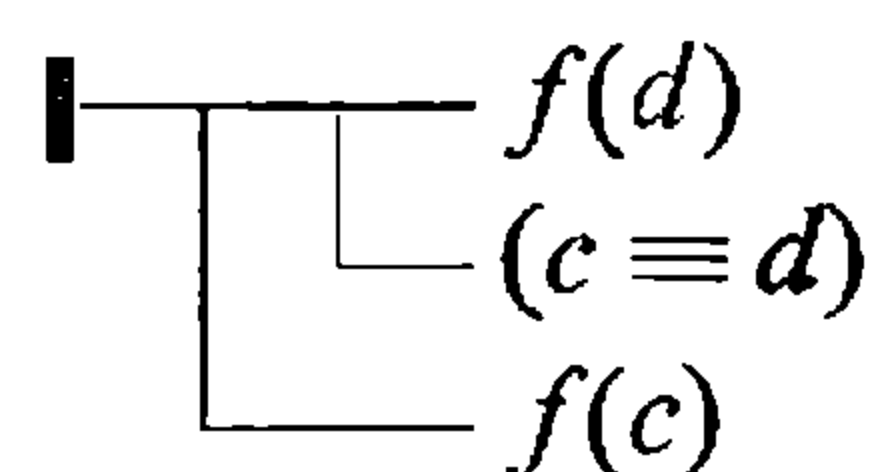
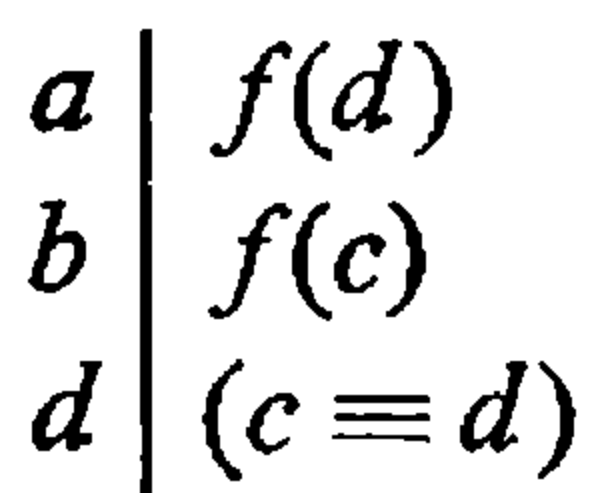
20. Il primo principio dell'uguaglianza di contenuto e sue conseguenze

$f(d)$
$f(c)$
$(c \equiv d)$ (52.

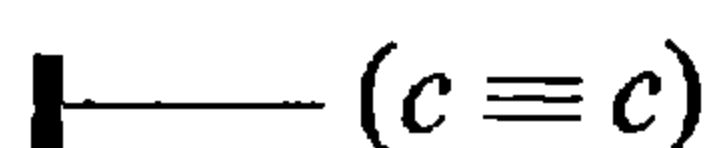
Non ha luogo il caso in cui il contenuto di c sia uguale al contenuto di d, quando $f(c)$ venga affermato e $f(d)$ negato.[1] Questa proposizione esprime che, se è $c \equiv d$, si può sostituire ovunque d in luogo di c. In $f(c)$, c può ricorrere in posti diversi da quelli di argomento. Di conseguenza c può anche essere contenuto in $f(d)$.

[1] [La (52) rappresenta il settimo assioma del sistema di Frege, traducibile in $x=y\rightarrow(Px\rightarrow Py)$.]

52 ⊢ $f(d)$
 $f(c)$
 $(c \equiv d)$

(8):

a | $f(d)$
b | $f(c)$
d | $(c \equiv d)$

⊢ $f(d)$
 $(c \equiv d)$
 $f(c)$ (53.

21. Il secondo principio dell'uguaglianza di contenuto e sue conseguenze

⊢ $(c \equiv c)$ (54.

Il contenuto di c è uguale al contenuto di c.[1]

54 ⊢ $(c \equiv c)$

(53):

$f(A)$ | $(A \equiv c)$

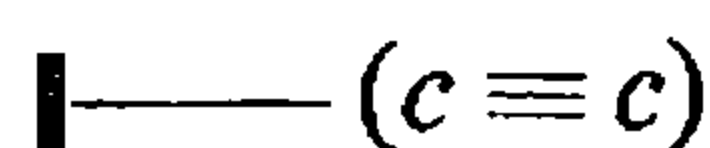
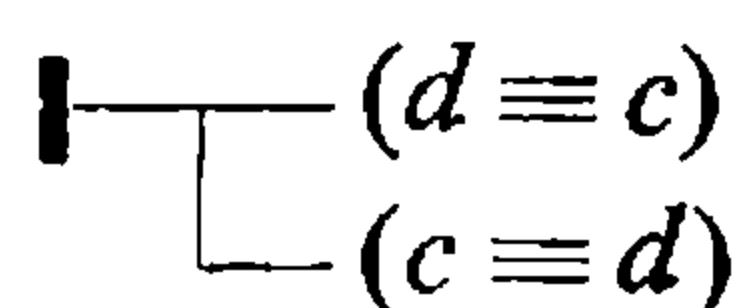
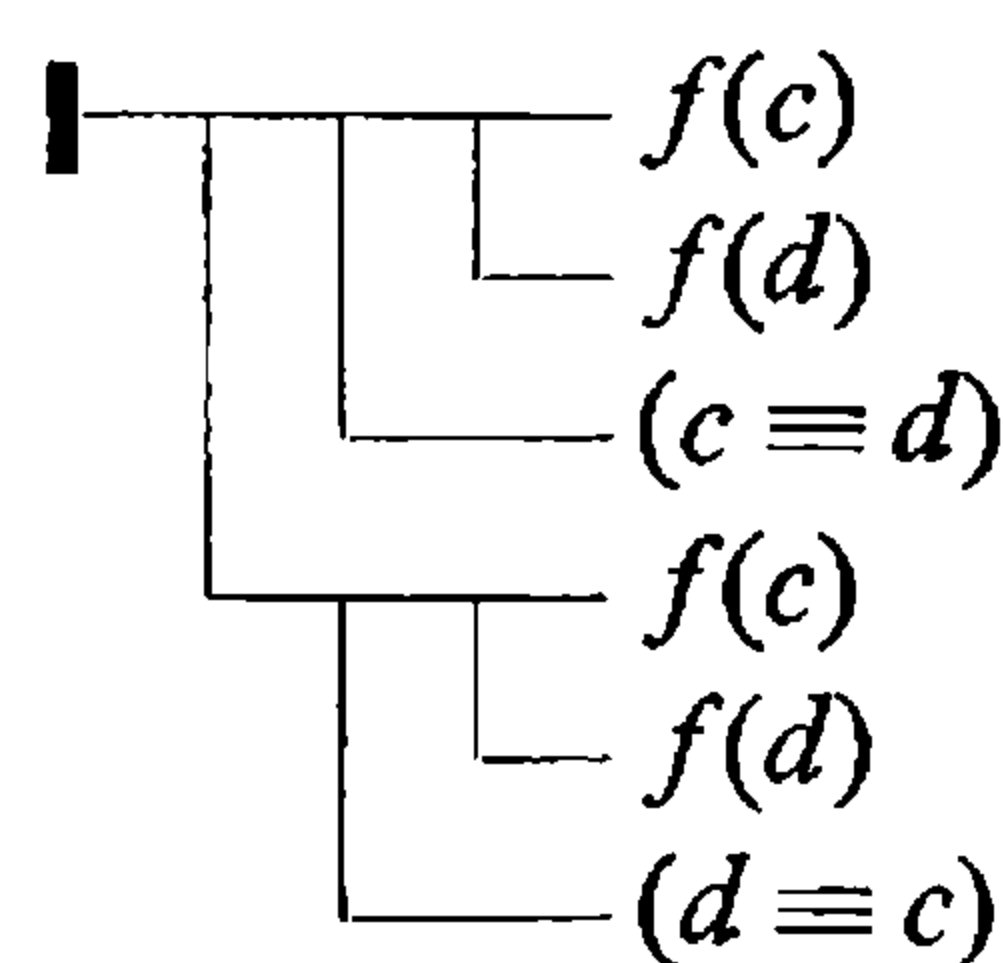
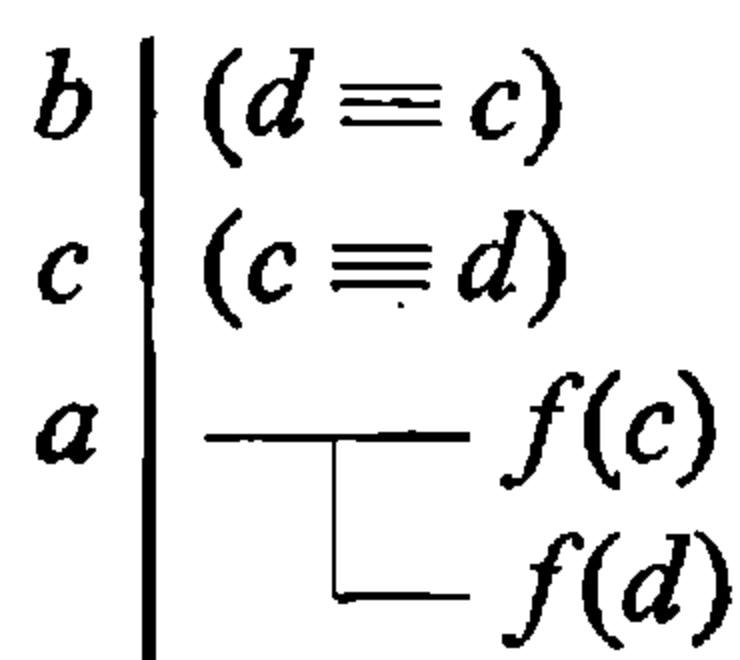
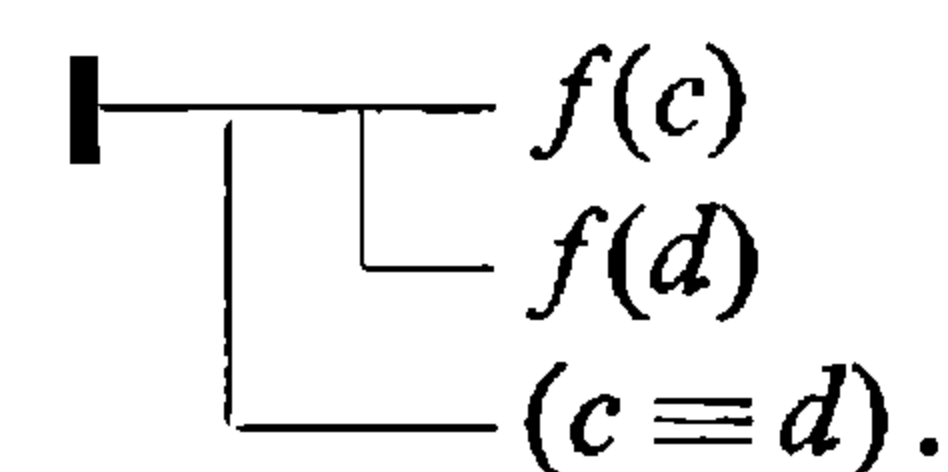
⊢ $(d \equiv c)$
 $(c \equiv d)$ (55.

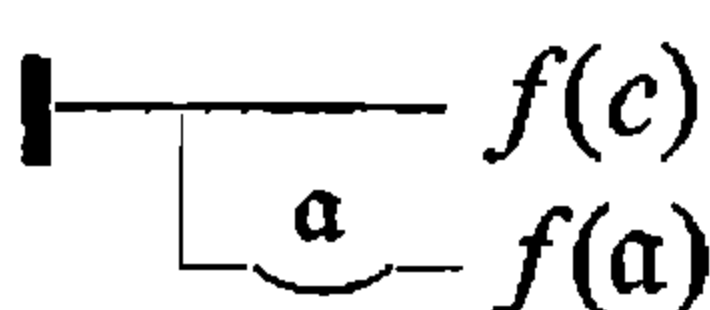
(9):

b | $(d \equiv c)$
c | $(c \equiv d)$
a | $f(c)$
 $f(d)$

⊢ $f(c)$
 $f(d)$
 $(c \equiv d)$
 $f(c)$
 $f(d)$
 $(d \equiv c)$ (56.

(52)::

d | c
c | d

⊢ $f(c)$
 $f(d)$
 $(c \equiv d)$. (57.

22. Il principio della generalità e sue conseguenze

⊢ $f(c)$
 $\mathfrak{a}$ $f(\mathfrak{a})$ (58.

[1] [Ottavo assioma $x = x$.]

$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-f(\mathfrak{a})$ significa che $f(\mathfrak{a})$ ha luogo, qualunque cosa si intenda per $\mathfrak{a}$. Se quindi $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-f(\mathfrak{a})$ viene affermato, allora $f(c)$ non può venir negato. La nostra proposizione esprime appunto questo.[1] Nel presente caso, $\mathfrak{a}$ può ricorrere solo nei posti di argomento di f, perché questa funzione si presenta nel giudizio anche fuori del dominio di $\mathfrak{a}$.

58

$f(A)$ | $f(A)$, $g(A)$

c | b

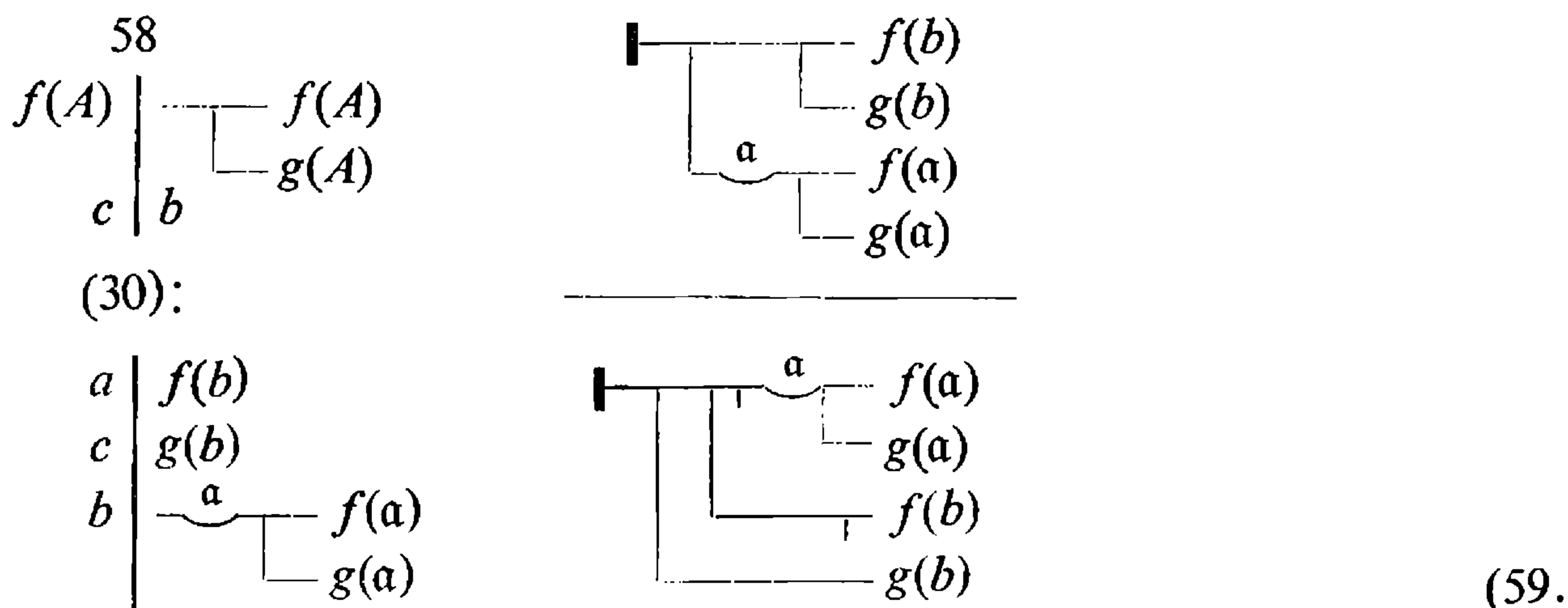
(30):

a | $f(b)$

c | $g(b)$

b | $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$

$\vdash$ $f(b)$, $g(b)$, $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$

$\vdash$ $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$, $f(b)$, $g(b)$ (59.

Esempio. Supponiamo che significhino:
b uno struzzo, e precisamente un singolo animale di questo tipo;
$g(A)$ "*A* è un uccello";
$f(A)$ "*A* può volare".
Allora abbiamo il giudizio (§ 12, n. 2, p. 134):

"Se questo struzzo è un uccello e non può volare, se ne deve dedurre che alcuni uccelli non possono volare."

Si vede che questo giudizio sostituisce un modo di deduzione, e precisamente il Felapton o il Fesapo, fra i quali non faccio qui alcuna distinzione, perché è scomparso il rilievo di un soggetto.[2]

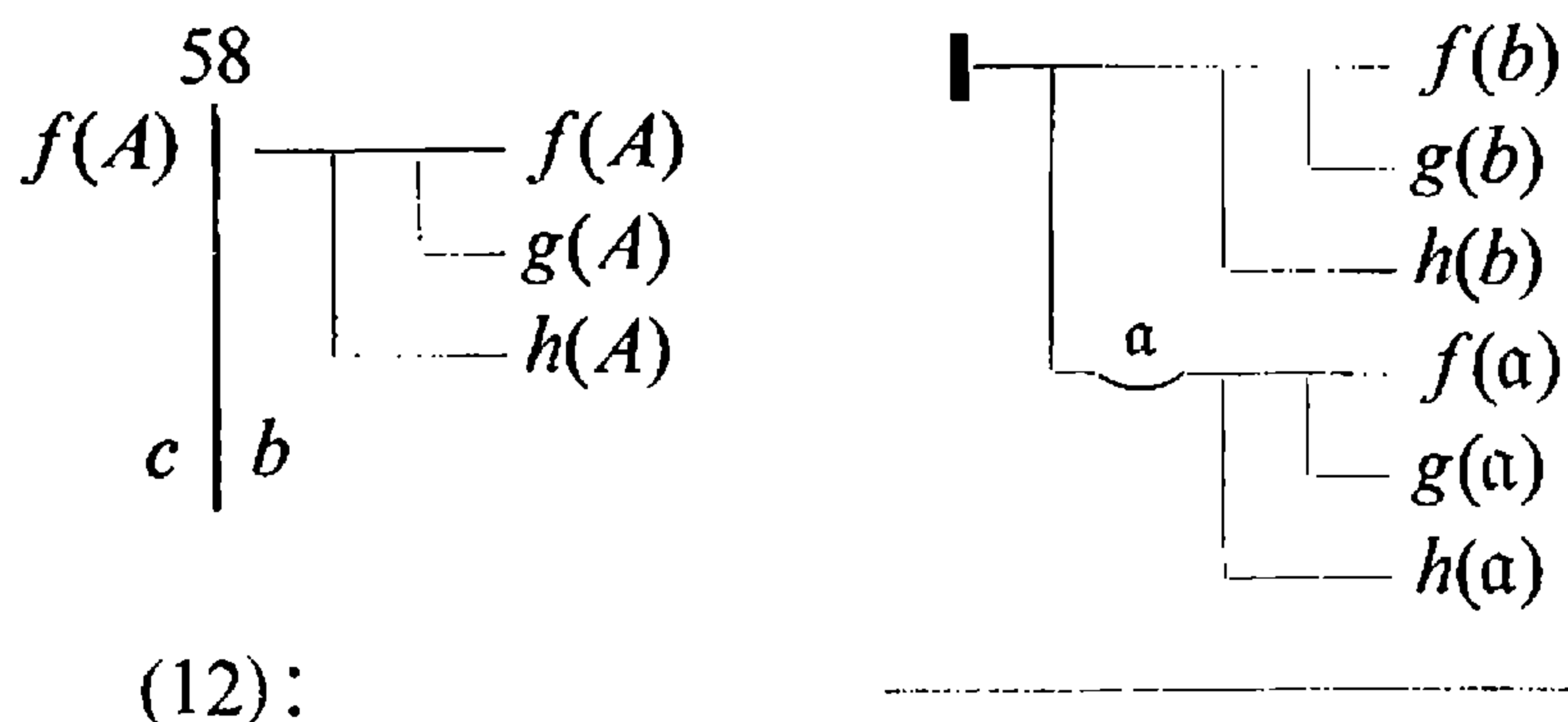
58

$f(A)$ | $f(A)$, $g(A)$, $h(A)$

c | b

$\vdash$ $f(b)$, $g(b)$, $h(b)$, $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$, $h(\mathfrak{a})$

(12):

---

[1] [Nono e ultimo assioma qui introdotto. Come abbiamo già visto, si traduce, nel nostro simbolismo, con $\forall xPx \rightarrow Py$.]

[2] [Abbiamo visto che Frege, attento esclusivamente al contenuto concettuale di una proposizione, non distingue ai fini deduttivi due proposizioni che esprimono lo stesso pensiero pur avendo forma

(12):

a | $f(b)$
b | $g(b)$
c | $h(b)$
d | $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$, $h(\mathfrak{a})$

$f(b)$, $h(b)$, $g(b)$, $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$, $h(\mathfrak{a})$ (60.

58 — $f(c)$, $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$

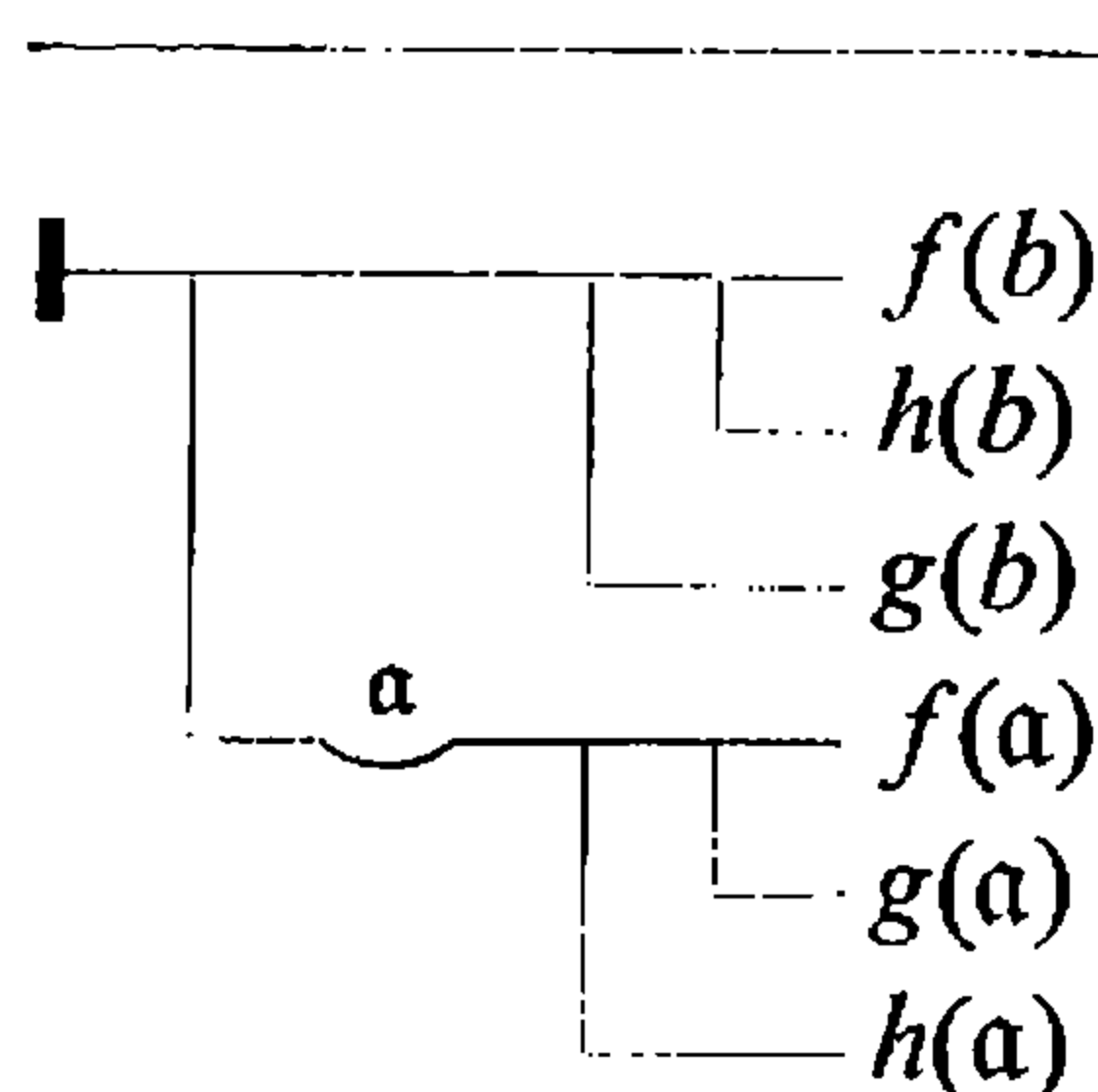
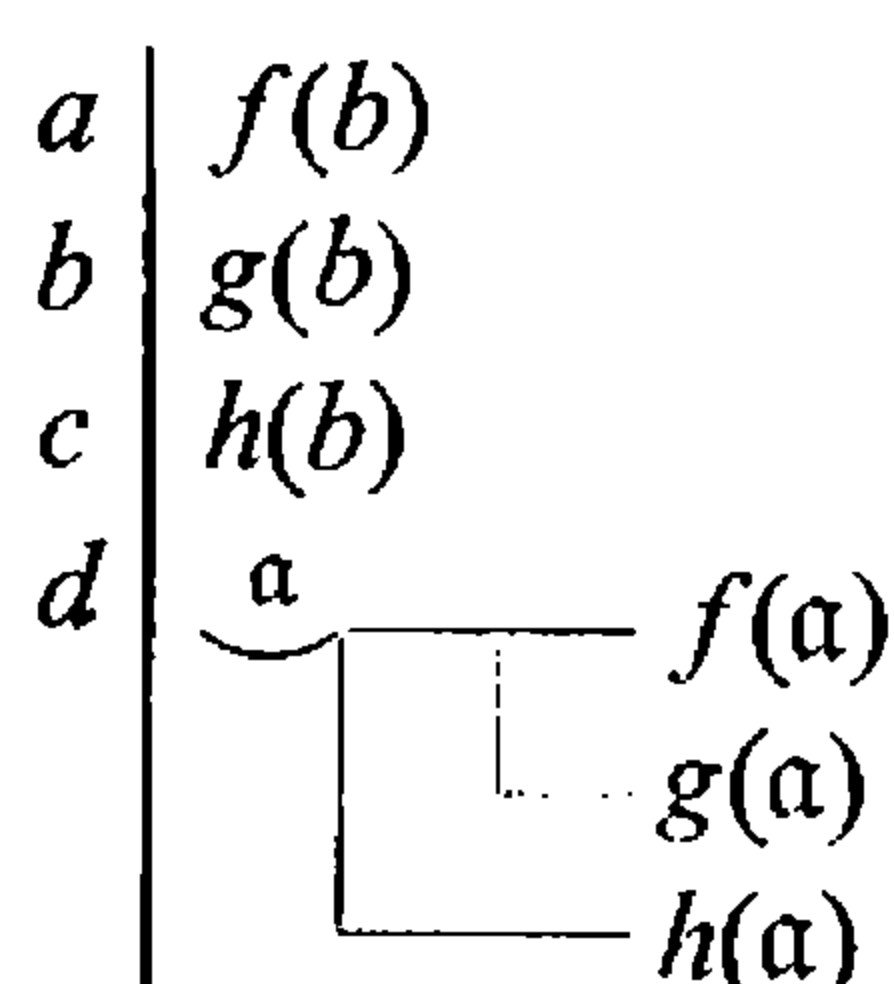
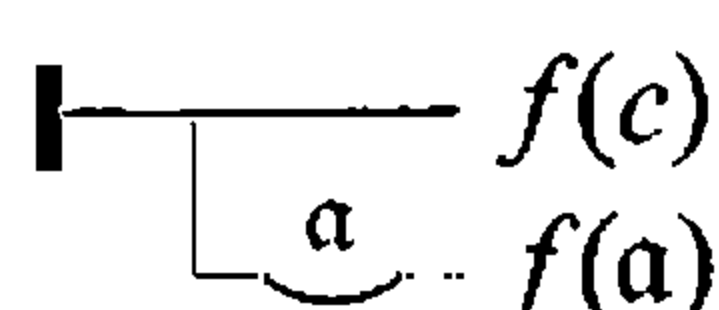
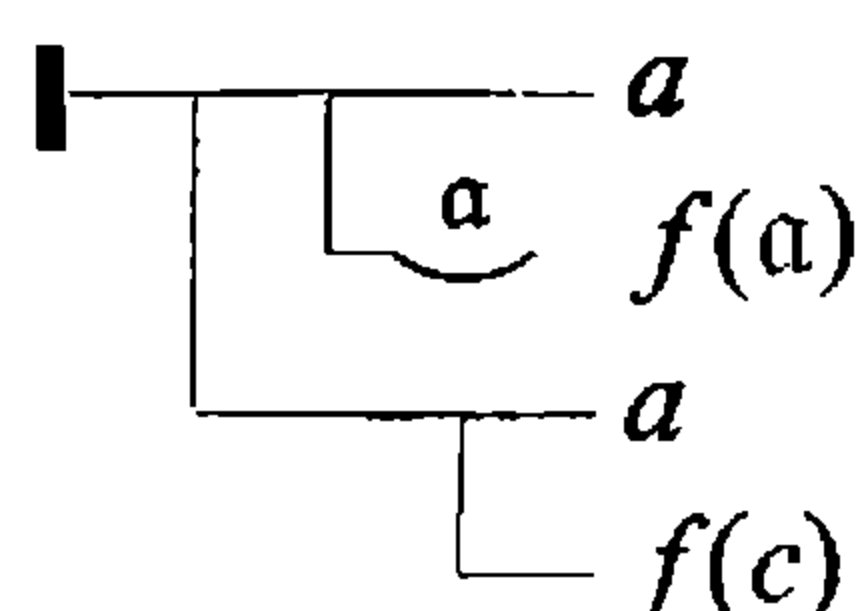
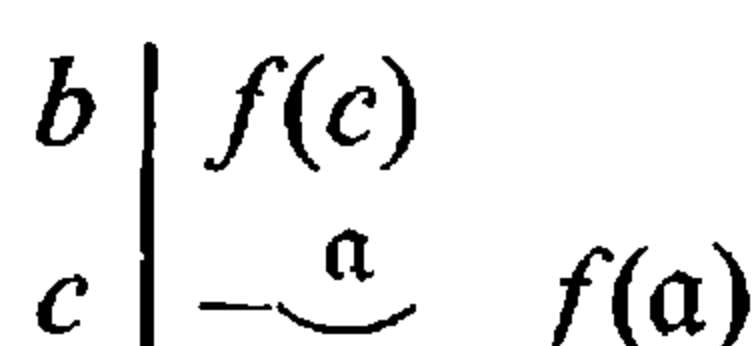
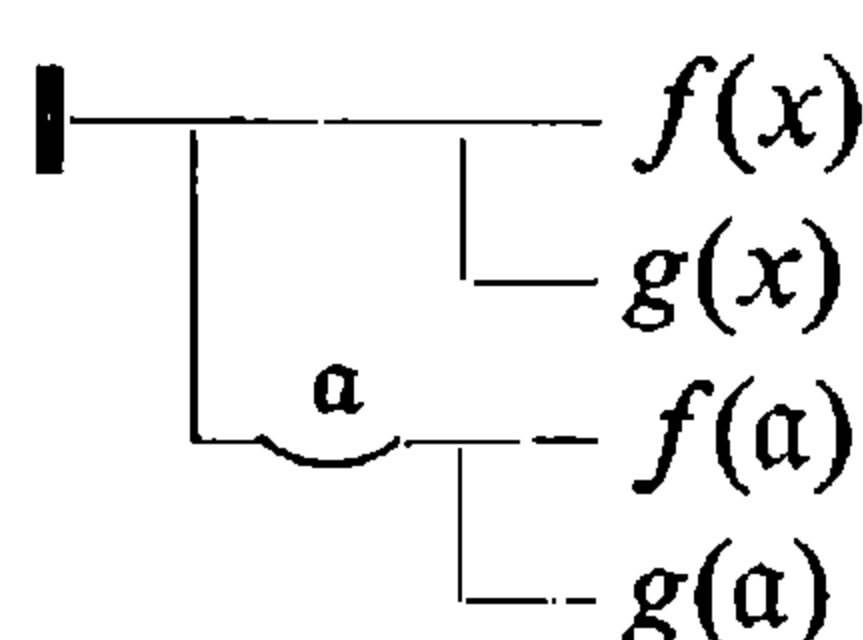
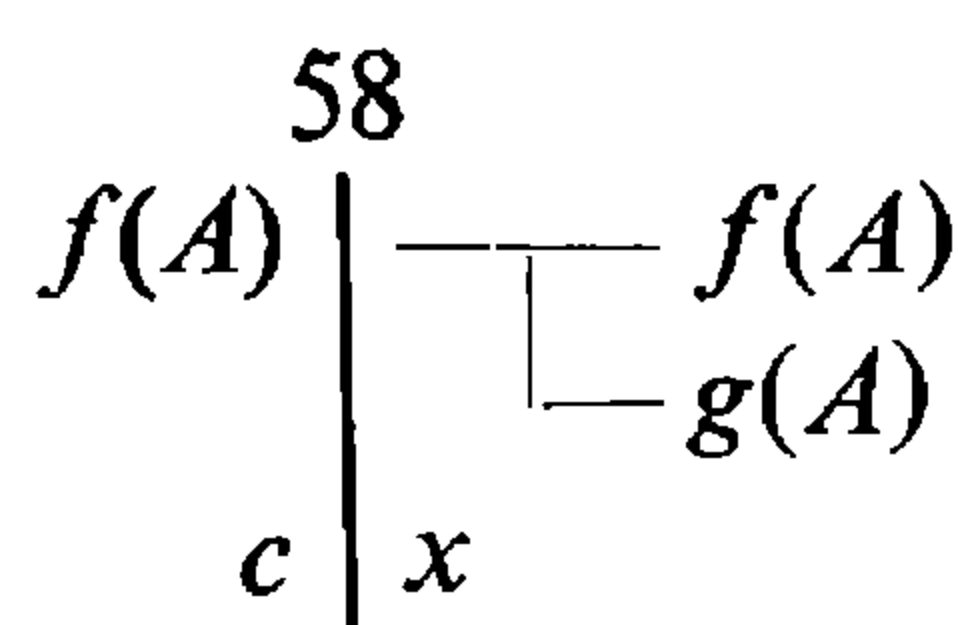
(9):

b | $f(c)$
c | $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$

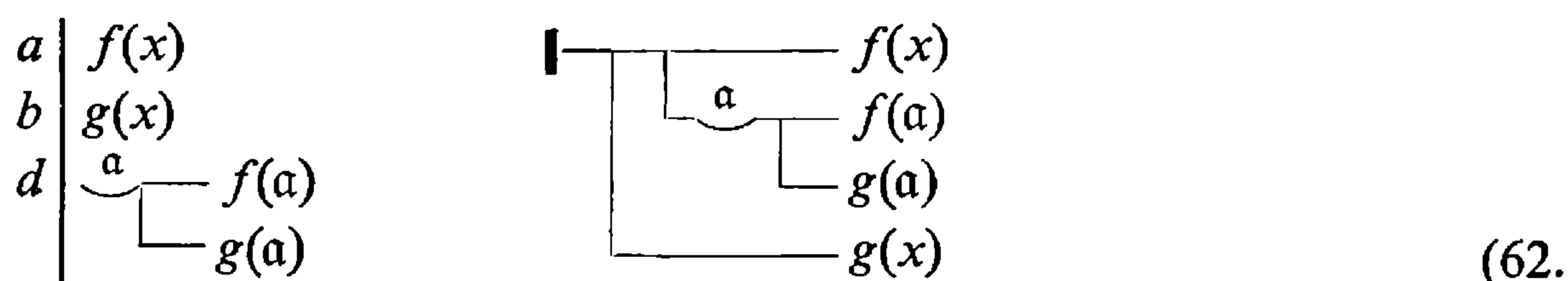
a, $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, a, $f(c)$ (61.

58

$f(A)$ | $f(A)$, $g(A)$
c | x

$f(x)$, $g(x)$, $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$

(8):

diversa da un punto di vista grammaticale. Cosí, ad esempio, (1) "Nessuno struzzo è volante" e (1') "Nessun volante è struzzo" sono per Frege due proposizioni equivalenti, malgrado che la (1) si differenzi linguisticamente dalla (1') per lo scambio del soggetto. Supponiamo ora che la (1) funga da premessa maggiore di un sillogismo *Felapton* (Se nessuno struzzo è volante (*e*) e tutti gli struzzi sono uccelli (*a*), allora alcuni uccelli non volano (*o*)). Come è noto, la validità di questo sillogismo può venir ricondotta a quella del *Ferio* con una conversione *per accidens* della premessa minore *a* (la qual cosa, come noto, viene indicata dalla *p* che segue la *a* di *Felapton*). Supponiamo invece che la (1') sia premessa maggiore di un *Fesapo* (Se nessun volante è struzzo (*e*) e tutti gli struzzi sono uccelli (*a*), allora alcuni uccelli non volano (*o*)); come è noto, i logici scolastici riconducevano anche questo sillogismo al *Ferio*, mediante due conversioni: la prima consisteva nello scambiare *simpliciter* soggetto e predicato della (1'), come convenzionalmente indicato dalla lettera *s* che segue la *e* di *Fesapo* (trasformando cosí la (1) nella (1')); la seconda consisteva nel convertire *per accidens* — come nel caso precedente — la premessa minore *o* (giusta la funzione sopra accennata della lettera *p*). Frege non fa alcuna distinzione fra le due forme di sillogismo proprio perché, come si è detto, considera equivalenti la (1) e la (1').]

(8):

a	$f(x)$
b	$g(x)$
d	$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$

$\vdash$ $f(x)$; $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$; $g(x)$ (62.

Questo giudizio sostituisce il modo di deduzione Barbara nel caso che la proposizione minore $(g(x))$ abbia un contenuto particolare.

62 $\vdash$ $f(x)$; $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$; $g(x)$

(24):

a	$f(x)$; $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$
c	$g(x)$
b	m

$\vdash$ $f(x)$; $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$; m; $g(x)$ (63.

---

62 $\vdash$ $f(x)$; $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$; $g(x)$

(18):

a	$f(x)$
b	$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$
c	$g(x)$
d	$h(y)$

$\vdash$ $f(x)$, $h(y)$; $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$; $g(x)$, $h(y)$ (64.

64

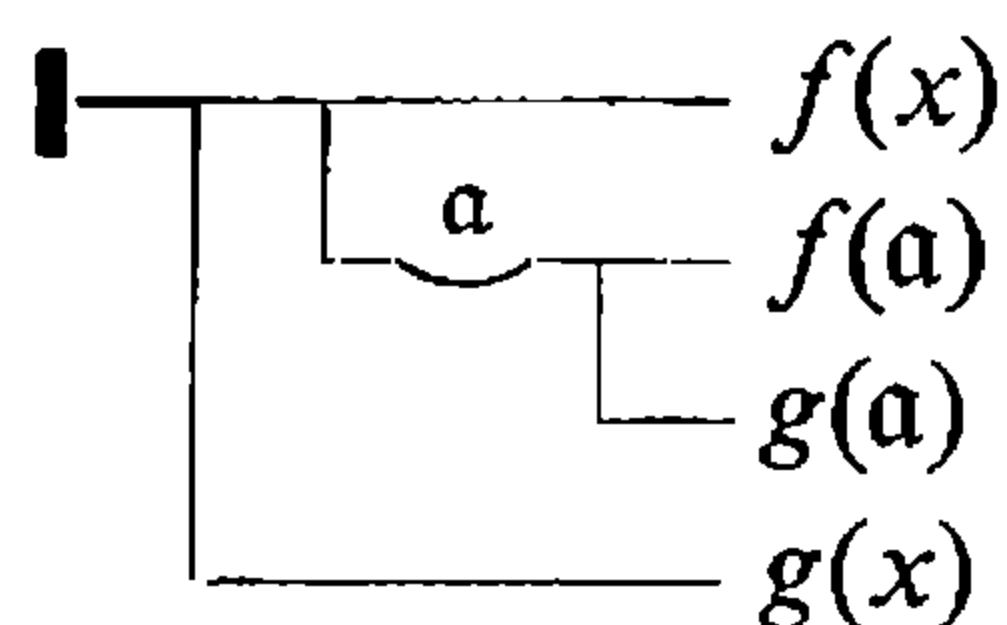
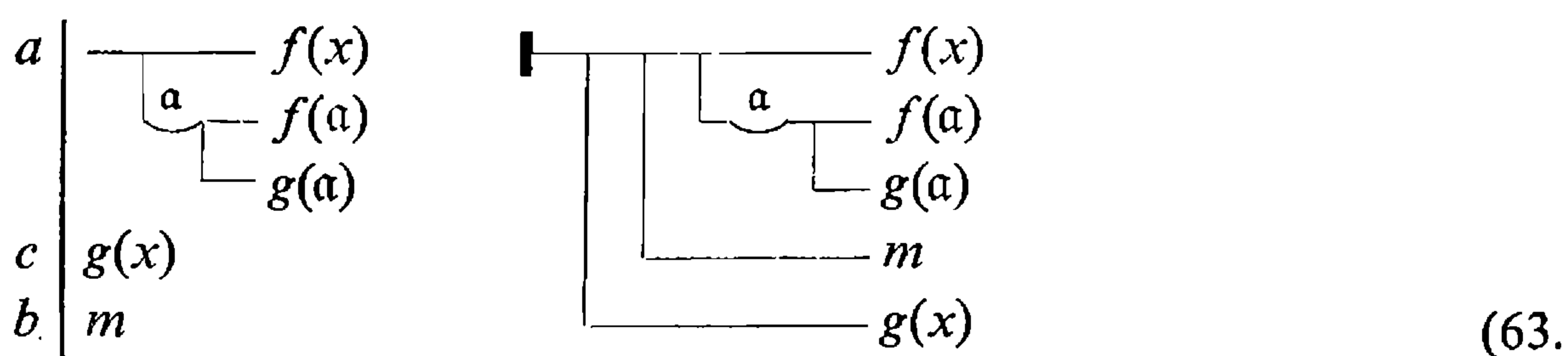
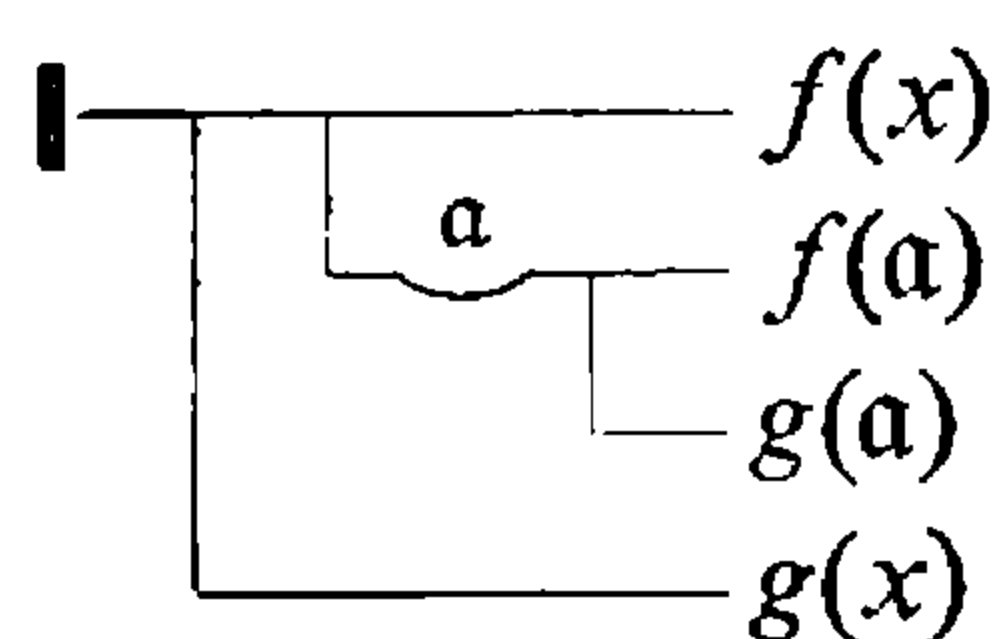
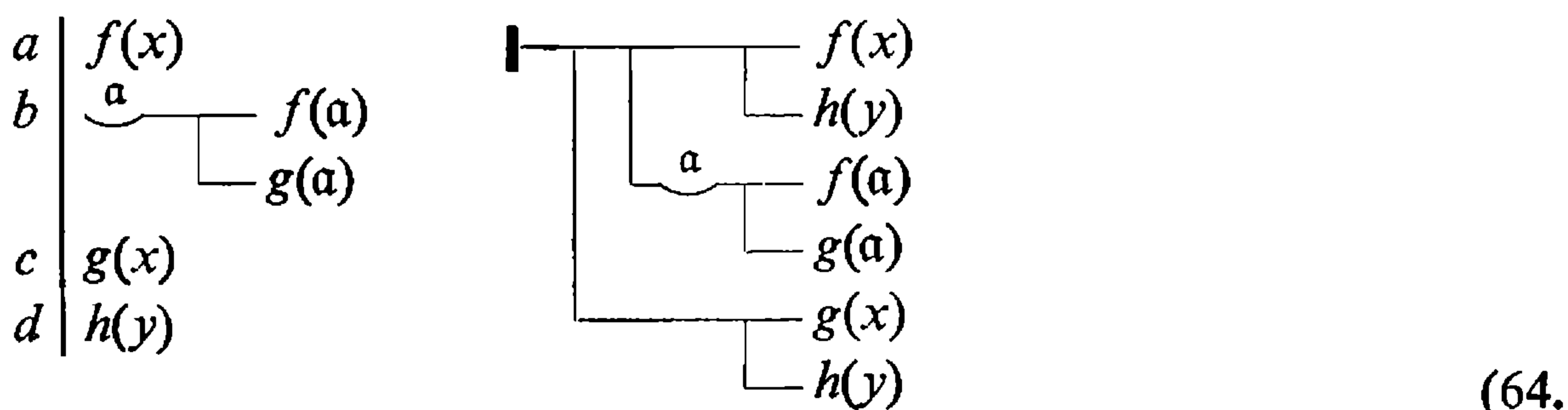
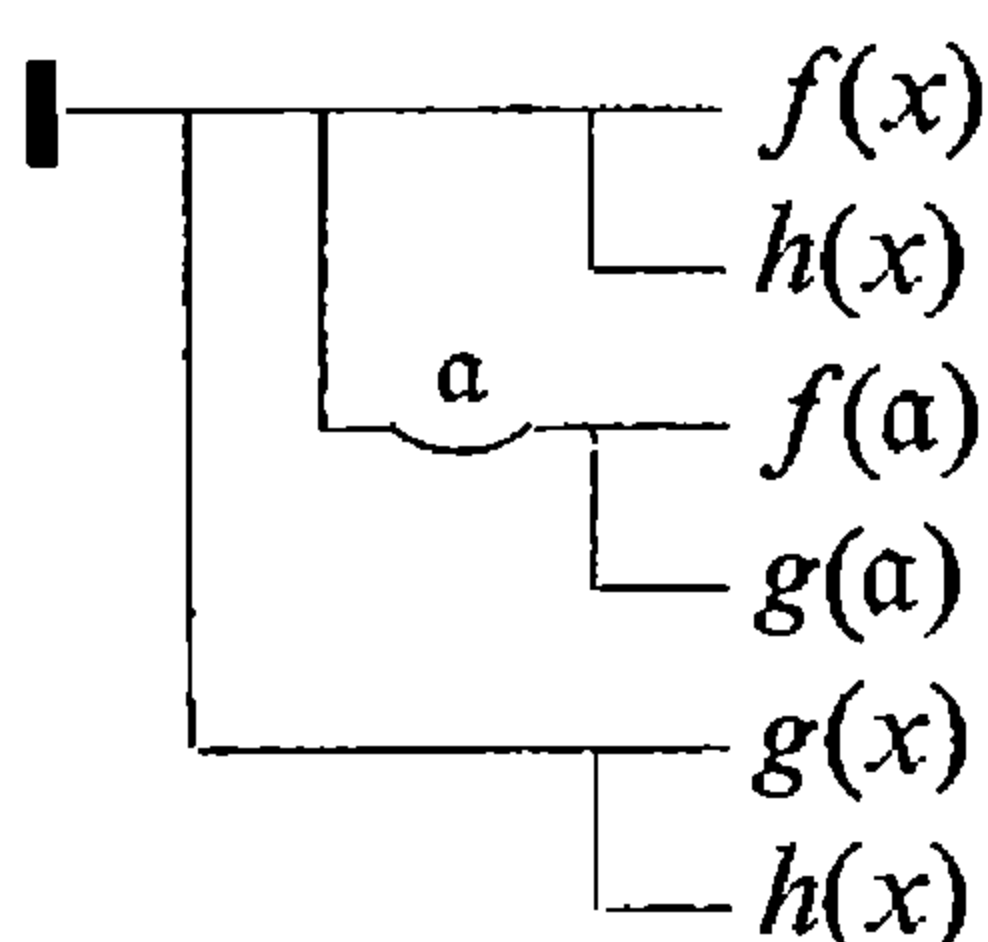
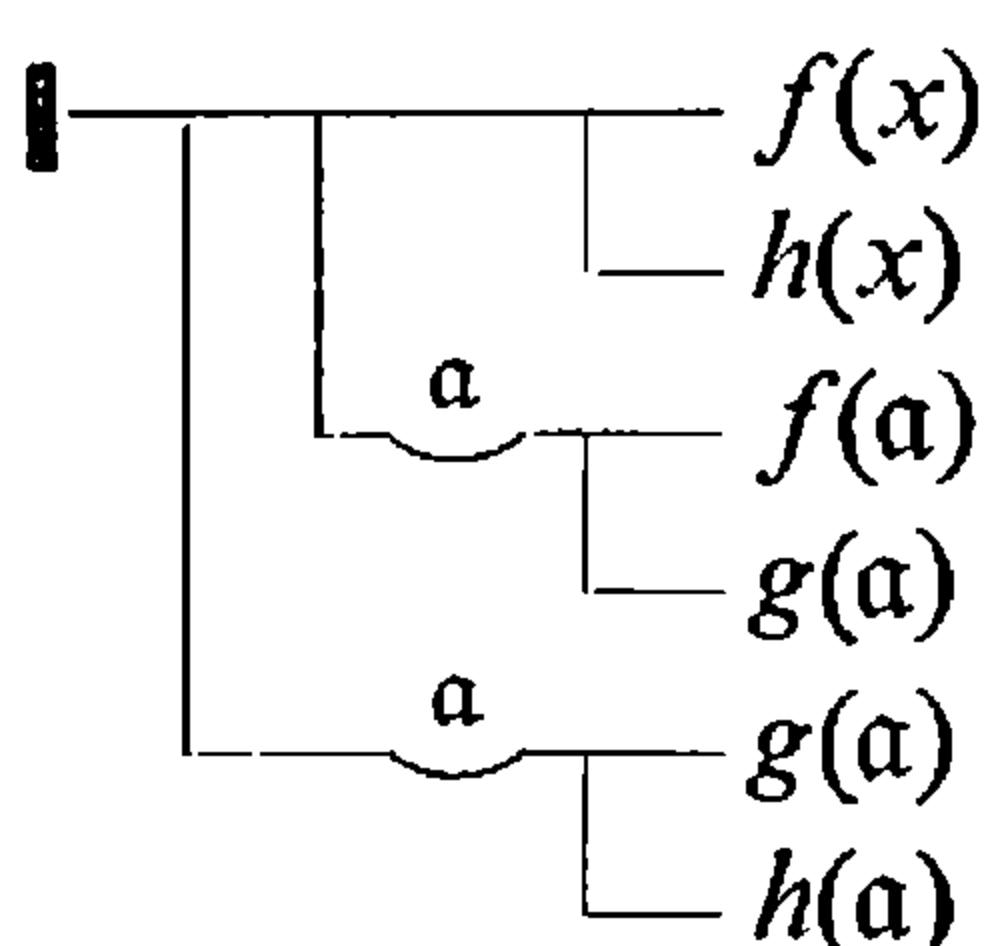
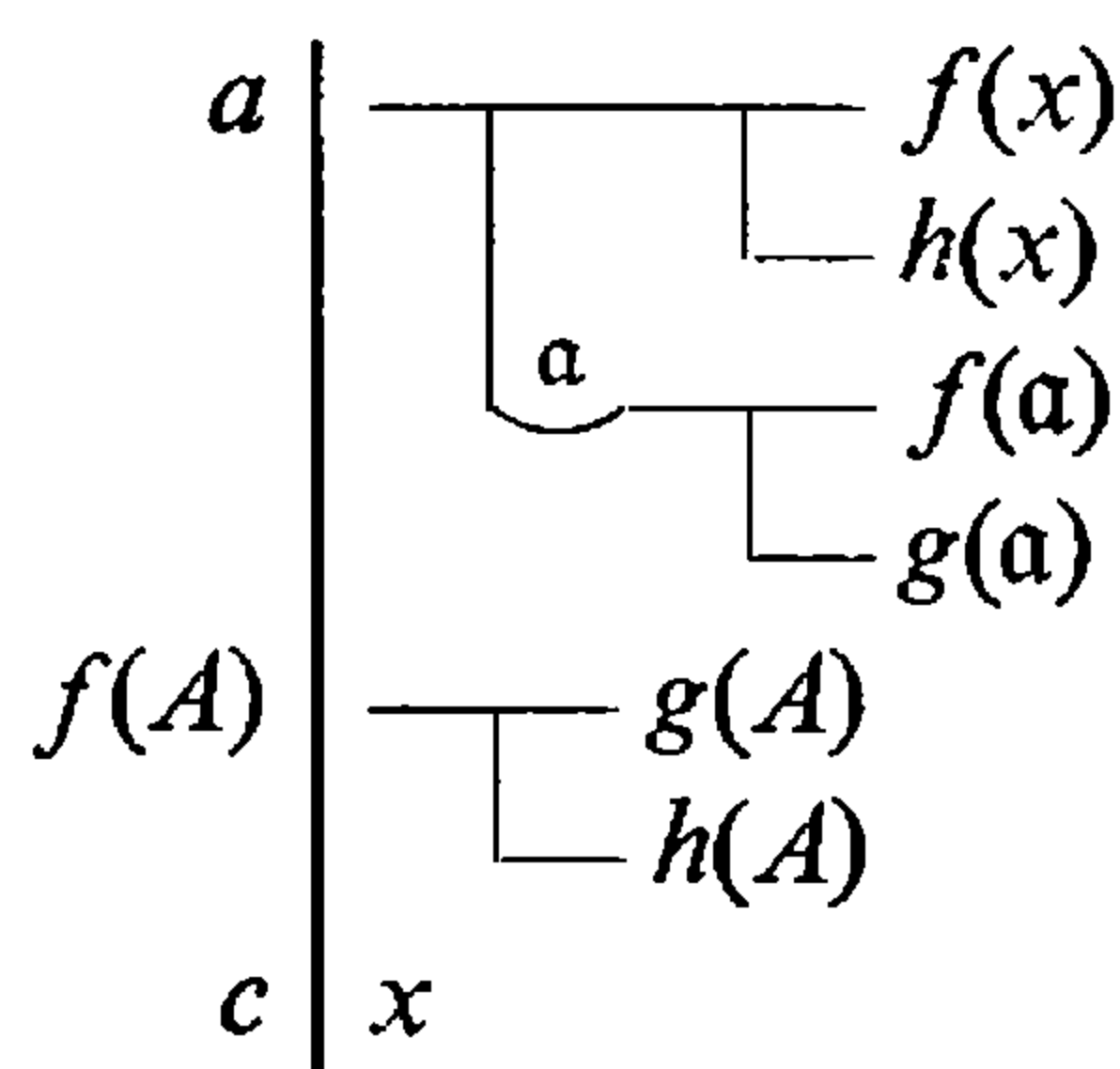
$y \mid x$

$\vdash$ $f(x)$, $h(x)$, $\mathfrak{a}$: $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$, $g(x)$, $h(x)$

(61):

$a \mid$ $f(x)$, $h(x)$, $\mathfrak{a}$: $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$

$f(A) \mid$ $g(A)$, $h(A)$

$c \mid x$

$\vdash$ $f(x)$, $h(x)$, $\mathfrak{a}$: $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}$: $g(\mathfrak{a})$, $h(\mathfrak{a})$ (65.

Nella (65) $\mathfrak{a}$ compare in due domini, senza che questo indichi una particolare relazione. Nel primo dominio si potrebbe anche scrivere, per esempio, $\mathfrak{e}$ invece di $\mathfrak{a}$. Questo giudizio sostituisce il modo di deduzione Barbara, nel caso che la proposizione minore $\mathfrak{a}$: $g(\mathfrak{a})$, $h(\mathfrak{a})$ abbia un contenuto universale. Il lettore che abbia approfondito il tipo di derivazione della mia ideografia, sarà in grado di derivare anche quei giudizi che corrispondono agli altri modi di deduzione. In questa sede possono bastare questi esempi.

65

$\vdash$ $f(x)$, $h(x)$, $\mathfrak{a}$: $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}$: $g(\mathfrak{a})$, $h(\mathfrak{a})$

(8):

(8):

a	$f(x)$, $h(x)$
b	$\smile^{\mathfrak{a}}$ $f(\mathfrak{a})$, $g(\mathfrak{a})$
d	$\smile^{\mathfrak{a}}$ $g(\mathfrak{a})$, $h(\mathfrak{a})$

$\vdash$ $f(x)$ / $h(x)$ / $\smile^{\mathfrak{a}}$ $g(\mathfrak{a})$ / $h(\mathfrak{a})$ / $\smile^{\mathfrak{a}}$ $f(\mathfrak{a})$ / $g(\mathfrak{a})$ (66.

---

58 $\vdash$ $f(c)$ / $\smile^{\mathfrak{a}}$ $f(\mathfrak{a})$

(7):

a	$f(c)$
b	$\smile^{\mathfrak{a}}$ $f(\mathfrak{a})$
c	b
d	$[(\smile^{\mathfrak{a}} f(\mathfrak{a})) \equiv b]$

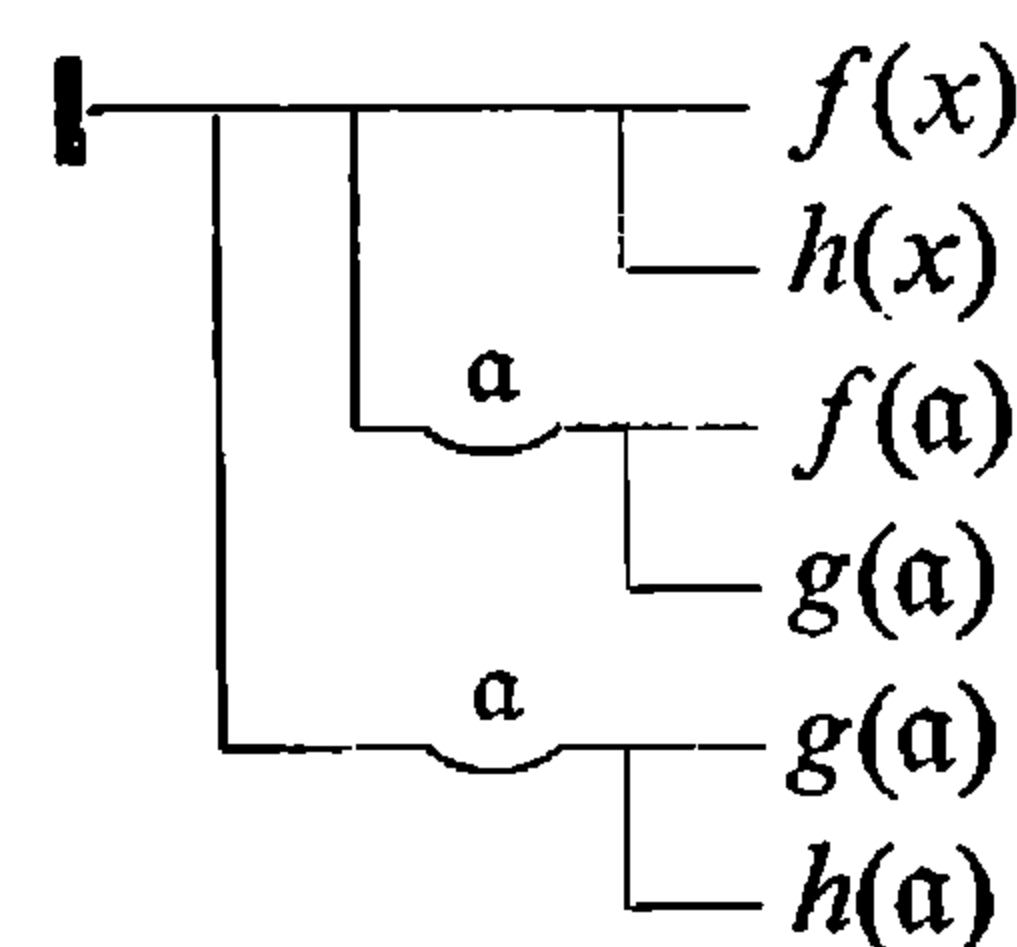
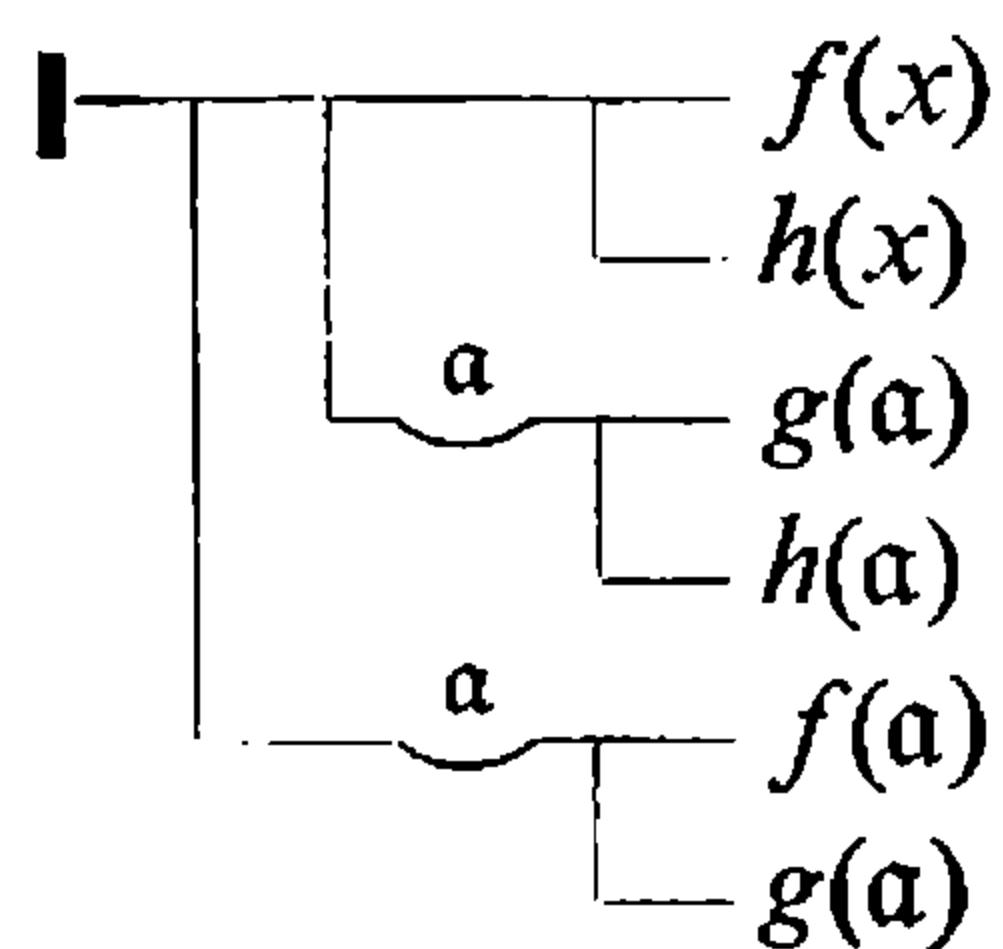
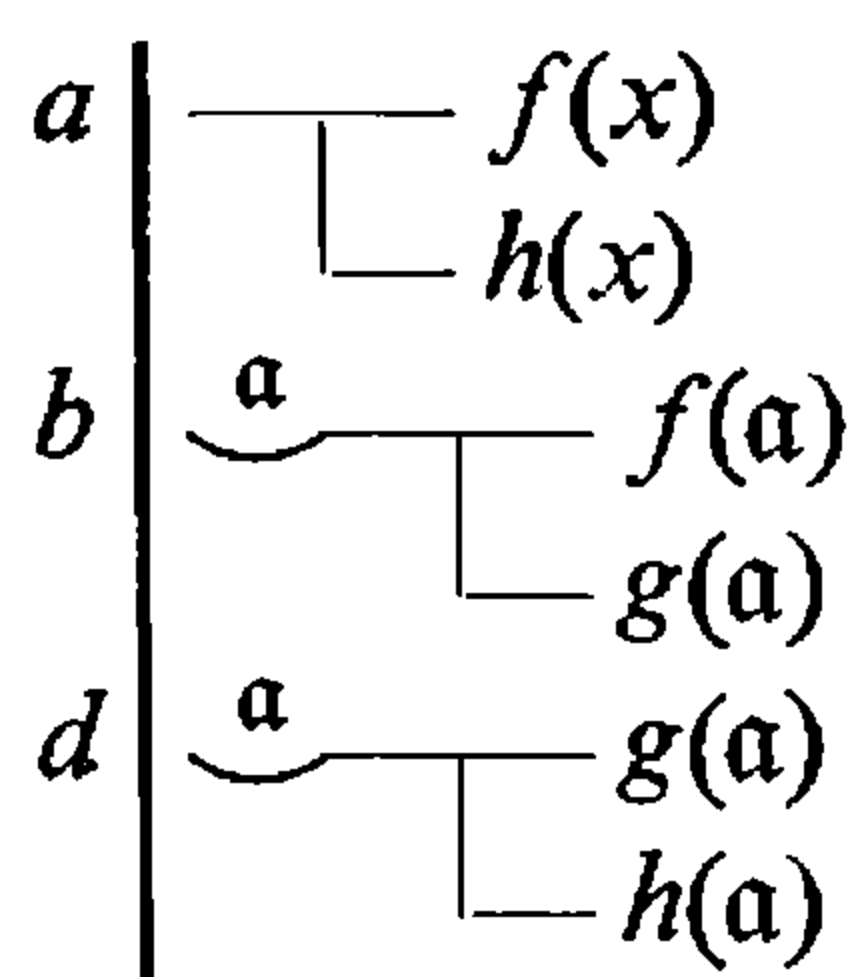
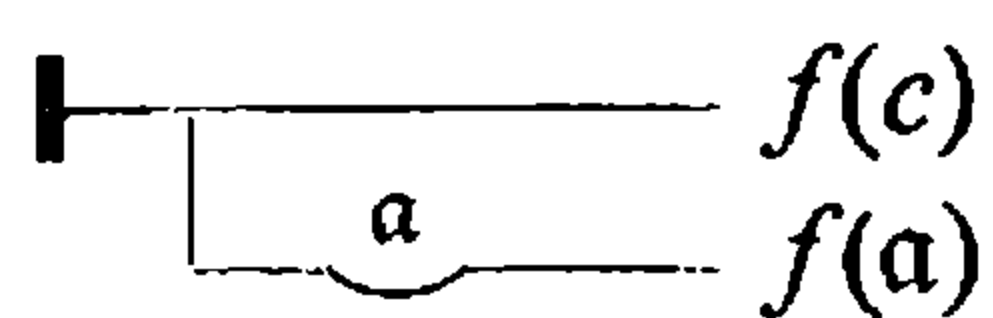
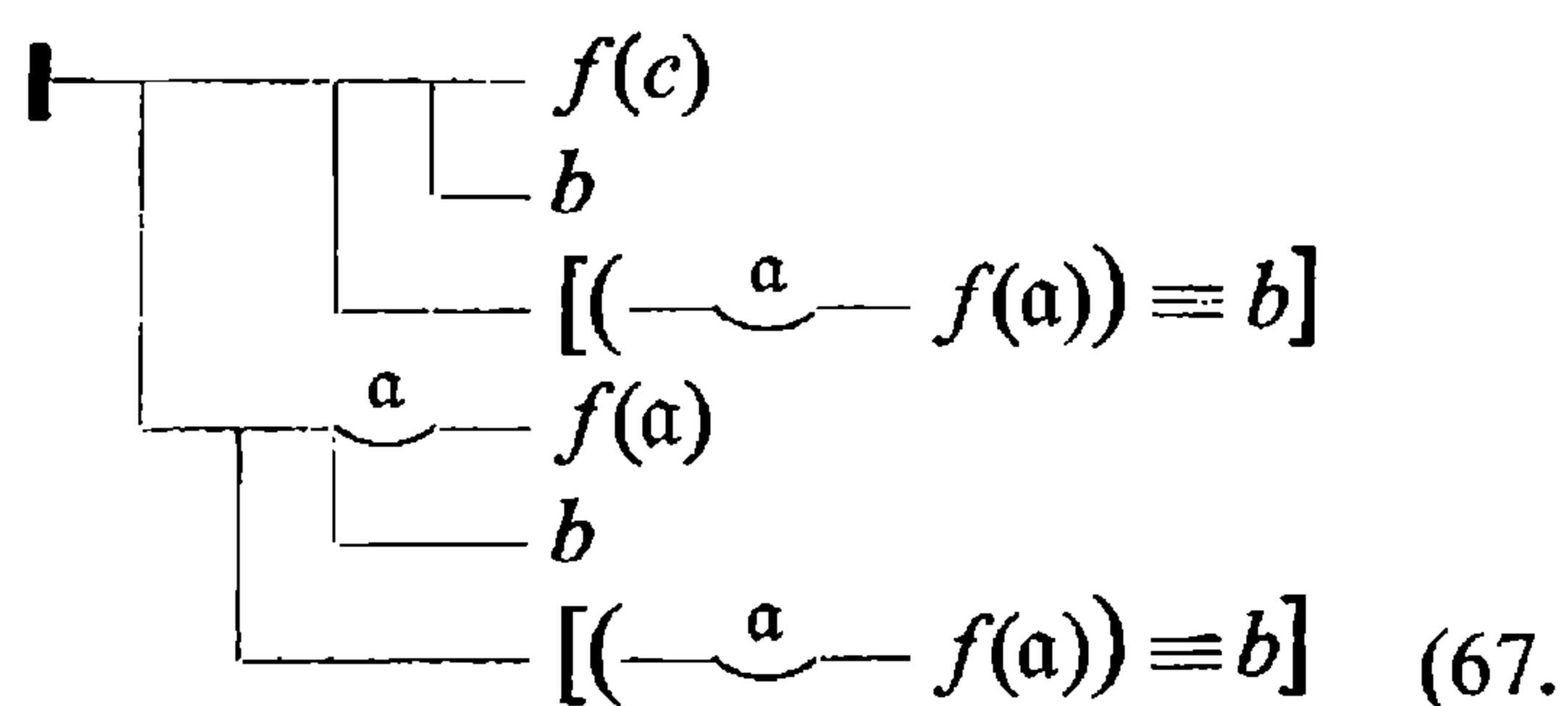
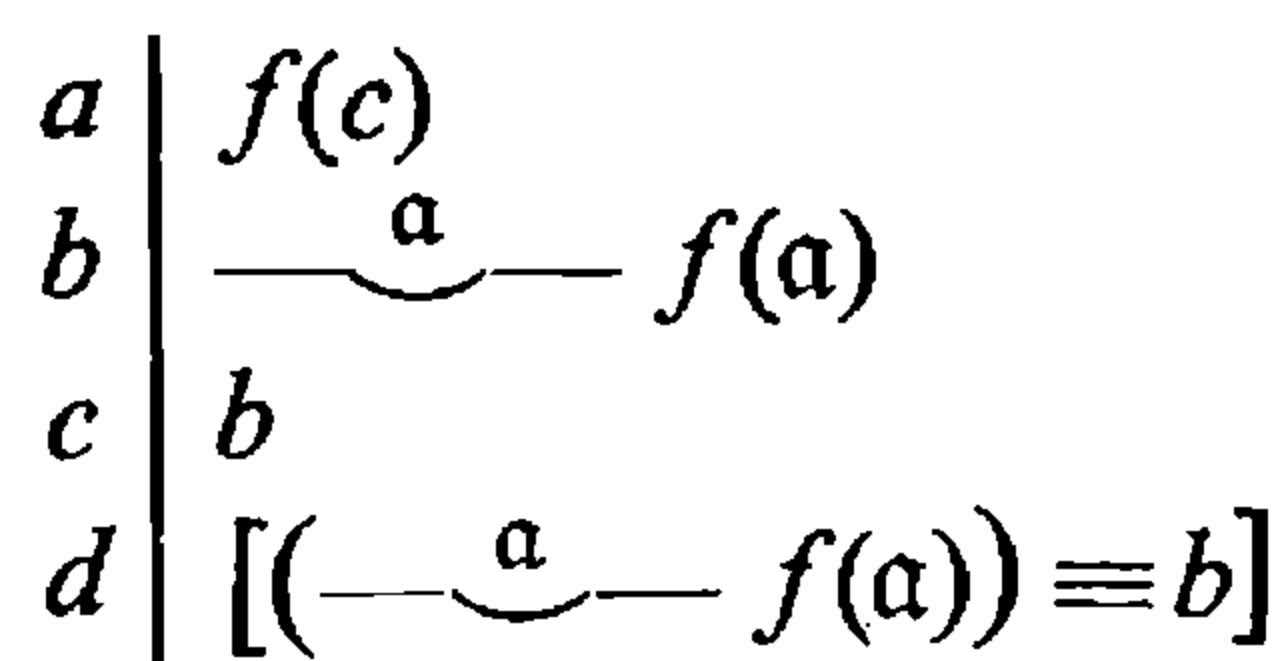
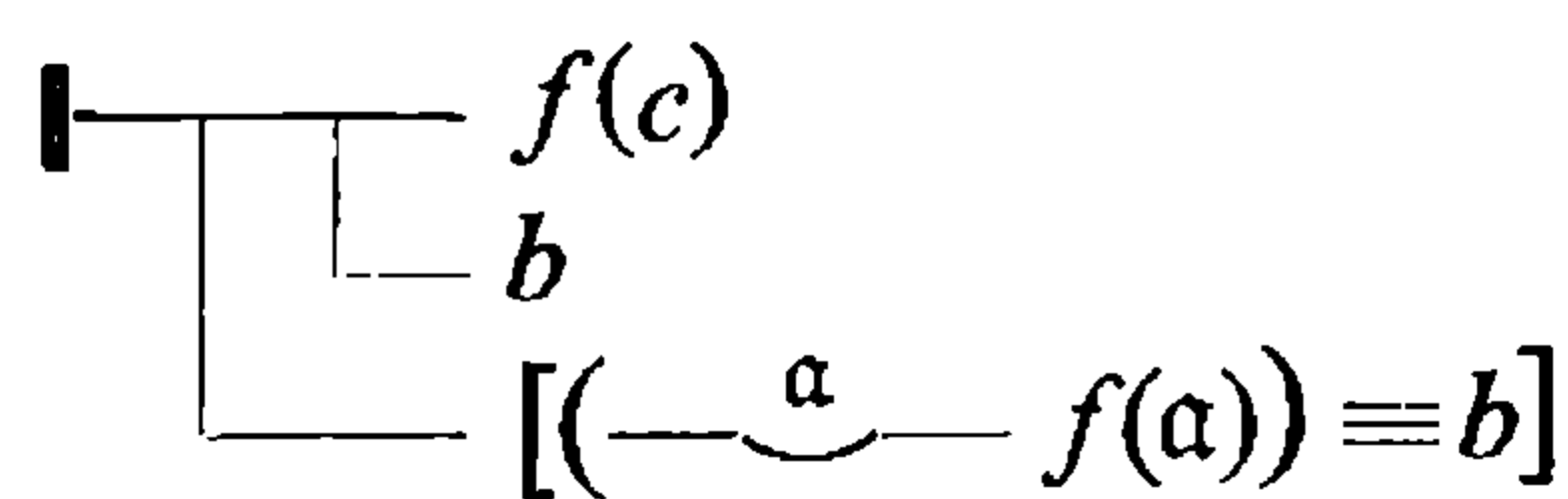
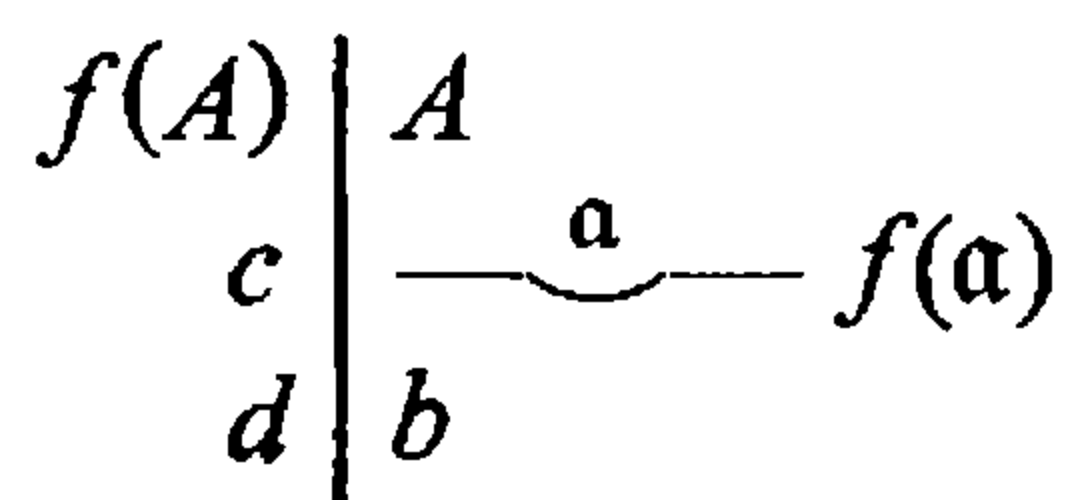
$\vdash$ $f(c)$ / b / $[(\smile^{\mathfrak{a}} f(\mathfrak{a})) \equiv b]$ / $\smile^{\mathfrak{a}}$ $f(\mathfrak{a})$ / b / $[(\smile^{\mathfrak{a}} f(\mathfrak{a})) \equiv b]$ (67.

(57)::

$f(A)$	A
c	$\smile^{\mathfrak{a}}$ $f(\mathfrak{a})$
d	b

$\vdash$ $f(c)$ / b / $[(\smile^{\mathfrak{a}} f(\mathfrak{a})) \equiv b]$ (68.

3.

Elementi di una teoria generale delle successioni

23. Osservazioni introduttive Le derivazioni che seguono vogliono dare una presentazione generale del modo di adoperare il mio linguaggio ideografico, anche se forse non sono sufficienti a farne riconoscere appieno l'utilità, che risulterebbe chiaramente soltanto da proposizioni piú complesse. Da questo esempio si vede inoltre come il pensiero puro, mentre astrae da ogni contenuto dato dai sensi o addirittura da una intuizione a priori, sia in grado di produrre dal solo contenuto, che trae origine dalla sua propria natura, giudizi che a prima vista non sembrano possibili, se non in base a una intuizione qualsiasi. Si può paragonare un tale fatto alla compressione, mediante la quale si è riusciti a trasformare l'aria, che a una coscienza infantile appare come un niente, in un liquido visibile e sgocciolante. Le proposizioni sulle successioni sviluppate qui di seguito, superano di gran lunga, per quanto riguarda la generalità, tutte le proposizioni simili che possano venir derivate da una qualsiasi intuizione di successioni. Pertanto, se qualcuno volesse ritenere piú adeguato porre a fondamento una rappresentazione intuitiva di successione, non dimentichi che le proposizioni cosí ottenute, pur avendo un enunciato all'incirca uguale a quelle da me presentate, esprimerebbero tuttavia assai meno di esse, perché risulterebbero valide solo entro il dominio di quella intuizione su cui fossero fondate.

24. L'ereditarietà. Raddoppiamento del segno di giudizio. Lettere greche minuscole

$$\Vdash \left(\left(\mathfrak{d}\ \mathfrak{a} \; F(\mathfrak{a}),\ f(\mathfrak{d},\mathfrak{a}),\ F(\mathfrak{d}) \right) \equiv \left({}^{\delta}_{\alpha}\ F(\alpha),\ f(\delta,\alpha) \right) \right) \qquad (69.$$

Questa proposizione si differenzia dai giudizi finora considerati per il fatto che in essa compaiono dei segni che non sono stati precedentemente spiegati; essa stessa fornisce questa spiegazione. La (69) non dice: "Il secondo membro dell'eguaglianza ha lo stesso contenuto del primo membro"; ma: "Esso deve avere lo stesso contenuto." Questa proposizione quindi non è un giudizio, e di conseguenza non è neppure un *giudizio sintetico,* per servirmi dell'espressione kantiana. Faccio notare la cosa, perché Kant ritiene sintetici tutti i giudizi della matematica. Ora, se la (69) fosse un giudizio sintetico, lo sarebbero anche le proposizioni da essa derivate. Si può invece rinunciare alle denotazioni introdotte mediante questa proposizione, e quindi alla proposizione stessa come loro spiegazione: da essa non segue nulla che non possa dedursi anche senza di essa. Tali spiegazioni hanno solo lo scopo di portare una facilitazione pratica, stabilendo un'abbreviazione. Servono inoltre a porre in rilievo un nesso segnico particolare entro la grande quantità di quelli possibili, onde ottenere con esso un appiglio piú solido per la rappresentazione. Anche se l'accennata facilitazione è qui appena avvertita, a causa del ristretto numero di giudizi che si introducono, ho tuttavia scelto questa formula per portare un esempio.

Sebbene la (69) non sia originariamente un giudizio, lo può però subito divenire; infatti, una volta fissato il significato dei nuovi simboli, questo significato acquista validità da tale momento e di conseguenza anche la formula (69) vale come un giudizio, ma un giudizio analitico, perché da esso si può ricavare solo quanto era inserito entro i nuovi segni. Questo doppio aspetto della formula viene indicato raddoppiando il segno di giudizio. Rispetto alle derivazioni che seguono, la (69) può dunque venir trattata come un giudizio ordinario.

Le lettere greche minuscole, che ricorrono per la prima volta nella (69), *non rappresentano alcun contenuto indipendente,* come le gotiche e le latine. Riguardo a esse va soltanto rispettata l'uguaglianza e la diversità, cosicché in luogo di α e δ possono sostituirsi altre lettere greche minuscole arbitrarie, solo se i posti precedentemente occupati da lettere greche uguali, vengono di nuovo occupati da lettere uguali, e se lettere diverse non vengono rimpiazzate da lettere uguali. *Questa ugua-*

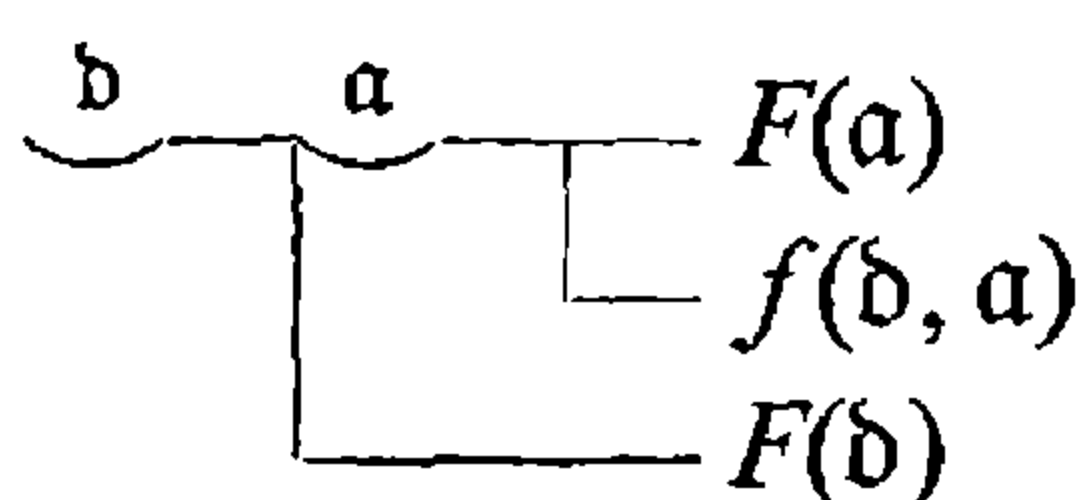
glianza o diversità delle lettere greche ha tuttavia significato solo all'interno della formula per la quale in particolare esse sono state introdotte, come qui succede per

$$\underset{\alpha}{\overset{\delta}{|}}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right.$$

Esse servono al seguente scópo: che in ogni momento, dalla forma abbreviata

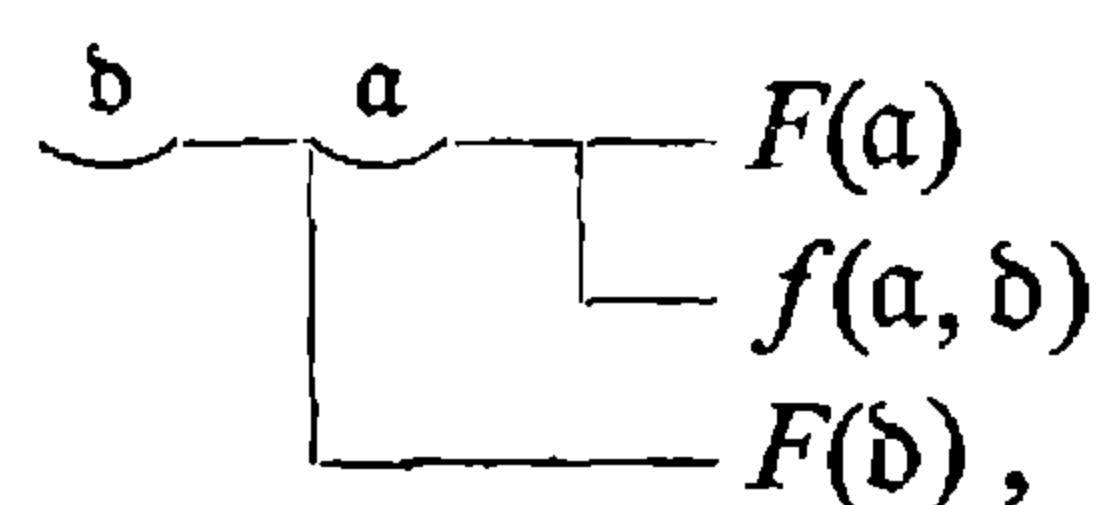
$$\underset{\alpha}{\overset{\delta}{|}}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right.$$

si possa univocamente ricomporre la forma dettagliata

$$\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\!-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\!\!\top\!-\,F(\mathfrak{a})\\ \qquad\quad|\qquad\llcorner\,f(\mathfrak{d},\mathfrak{a})\\ \qquad\quad\llcorner\!-\!-\!-\,F(\mathfrak{d})\end{array}$$

Cosí, per esempio,

$$\underset{\delta}{\overset{\alpha}{|}}\left(\begin{array}{l}F(\delta)\\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right.$$

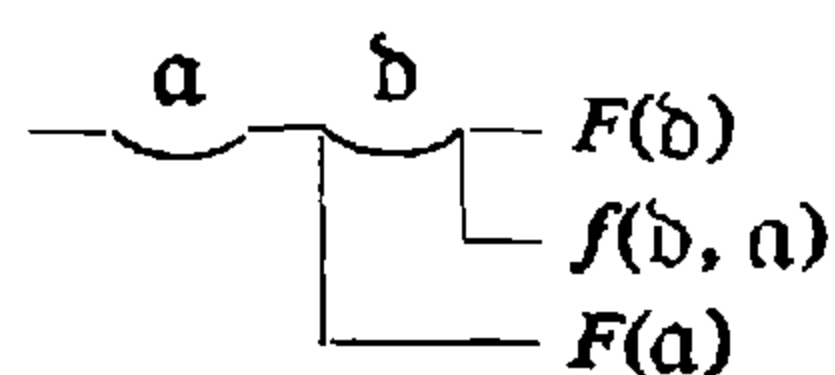
significa [1] l'espressione

$$\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\!-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\!\!\top\!-\,F(\mathfrak{a})\\ \qquad\quad|\qquad\llcorner\,f(\mathfrak{a},\mathfrak{d})\\ \qquad\quad\llcorner\!-\!-\!-\,F(\mathfrak{d})\,,\end{array}$$

mentre

$$\underset{\delta}{\overset{\alpha}{|}}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right.$$

[1] [Per giustificare quest'ultimo passaggio dalla formula abbreviata alla notazione dettagliata, si può procedere come segue:

1) in base alla (69) la formula abbreviata equivale a

$$\begin{array}{l}-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\!\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\!\!\top\!-\,F(\mathfrak{d})\\ \qquad\quad|\qquad\llcorner\,f(\mathfrak{d},\mathfrak{a})\\ \qquad\quad\llcorner\!-\!-\!-\,F(\mathfrak{a})\end{array}$$

2) operando ora uno scambio reciproco fra $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{d}$ — scambio autorizzato dalle considerazioni fatte all'inizio del capoverso — si ottiene proprio la formula in questione.]

non ha alcun senso.[1] Si vede che l'espressione dettagliata, per quanto complesse possano essere le funzioni F e f, può sempre venir ritrovata con sicurezza, astraendo dalla scelta, peraltro indifferente, delle lettere gotiche. La scrittura

$$\vdash\!\!\!-\!\!-\!\!-\, f(\Gamma, \Delta)$$

può venir tradotta per mezzo delle seguenti parole: "Δ è il risultato di un'applicazione del procedimento f su Γ", oppure "Γ è l'oggetto di un'applicazione del procedimento f il cui risultato è Δ", o ancora "Δ sta nella f-relazione con Γ" o infine "Γ sta nella f-relazione inversa con Δ", e queste espressioni vanno considerate come aventi tutte lo stesso significato.

A sua volta

$$\begin{matrix}\delta \\ | \\ \alpha\end{matrix}\left(\begin{matrix}F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha)\end{matrix}\right.$$

può venir tradotto cosí: "La circostanza che la proprietà F è ereditaria nella f-successione." Il seguente esempio servirà forse a rendere piú plausibile questa espressione. Supponiamo che $\Lambda(M, N)$ significhi la circostanza che N è un figlio di M; $\Sigma(P)$ significhi la circostanza che P è un uomo. Allora [2]

$$\begin{matrix}\delta \\ | \\ \alpha\end{matrix}\left(\begin{matrix}\Sigma(\alpha) \\ \Lambda(\delta, \alpha)\end{matrix}\right. \qquad \text{oppure} \qquad \begin{array}{l}\smile^{\mathfrak{d}}\!\!-\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\!\!\top\!\!-\!\!\top\!\!-\; \Sigma(\mathfrak{a}) \\ \qquad\qquad\;\; |\quad\;\; \llcorner\!-\; \Lambda(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \\ \qquad\qquad\;\; \llcorner\!-\!-\!-\!-\; \Sigma(\mathfrak{d})\end{array}$$

è la circostanza che ogni figlio di un uomo risulta a sua volta un uomo, ovverossia che la proprietà di essere un uomo è ereditaria. Si vede del resto che la rienunciazione in parole può diventare difficile o addi-

[1] [Infatti, risalendo dalla formula abbreviata alla formula dettagliata, si otterrebbe

$$\begin{array}{l}\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\!\!\top^{\mathfrak{d}}\!\!-\!\!\top\!\!-\; F(\mathfrak{a}) \\ \qquad |\quad \llcorner\!-\; f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \\ \qquad \llcorner\!-\!-\!-\; F(\mathfrak{d})\end{array}$$

e questa formula non ha senso in quanto contiene la lettera gotica $\mathfrak{d}$ al di fuori del dominio d'azione del relativo quantificatore. Si confronti, a pagina 131, quanto l'autore stabilisce a questo proposito.]

[2] [Nell'originale, la prima delle due formule seguenti figura come segue: $\begin{matrix}\alpha \\ | \\ \delta\end{matrix}\left(\begin{matrix}\Sigma(\alpha) \\ \Lambda(\delta, \alpha)\end{matrix}\right.$; ma trattasi evidentemente di un errore di stampa.]

rittura impossibile, se in luogo di f e F compaiono funzioni molto complicate. Detto questo, la proposizione (69) si può esprimere a parole come segue:

"*Se dalla proposizione che* 𝔡 *ha la proprietà* F *può venir dedotto, in generale, qualunque sia* 𝔡, *che ogni risultato di una applicazione del procedimento* f *su* 𝔡 *ha la proprietà* F, *allora dico*:

"*La proprietà* F *è ereditaria nella* f*-successione.*"

25. Conseguenze

69

$$\vdash \left[\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ F(\mathfrak{a}) \\ \quad f(\mathfrak{d},\mathfrak{a}) \\ \quad F(\mathfrak{d}) \end{array} \right) \equiv \begin{array}{c}\delta\\|\\\alpha\end{array}\left(\begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta,\alpha) \end{array}\right)\right]$$

(68):

$$\begin{array}{r|l} \mathfrak{a} & \mathfrak{d} \\ f(\Gamma) & \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ F(\mathfrak{a}) \\ \quad f(\Gamma,\mathfrak{a}) \\ \quad F(\Gamma) \end{array} \\ b & \begin{array}{c}\delta\\|\\\alpha\end{array}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right) \\ c & x \end{array} \qquad \vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ F(\mathfrak{a}) \\ \quad f(x,\mathfrak{a}) \\ \quad F(x) \\ \begin{array}{c}\delta\\|\\\alpha\end{array}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right) \end{array} \qquad (70.$$

(19):

$$\begin{array}{r|l} b & \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ F(\mathfrak{a}) \\ \quad f(x,\mathfrak{a}) \end{array} \\ c & F(x) \\ d & \begin{array}{c}\delta\\|\\\alpha\end{array}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right) \\ a & \begin{array}{l} F(y) \\ f(x,y) \end{array} \end{array} \qquad \vdash \begin{array}{l} F(y) \\ f(x,y) \\ F(x) \\ \begin{array}{c}\delta\\|\\\alpha\end{array}\left(\begin{array}{l}F(\mathfrak{a})\\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right) \\ F(y) \\ f(x,y) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ F(\mathfrak{a}) \\ \quad f(x,\mathfrak{a}) \end{array} \qquad (71.$$

(58)::

(58)::

```
f(Γ) | ──┬── F(Γ)          ├──┬──┬──┬── F(y)
     |   └── f(x, Γ)          │  │  └── f(x, y)
  c  | y                      │  └───── F(x)
                              │         δ ⎛ F(α)
                              └──────── | ⎨
                                        α ⎝ f(δ, α)
```

(72.

Se la proprietà F è ereditaria nella f-successione; se x ha la proprietà F e y risulta da una applicazione del procedimento f su x: allora y ha la proprietà F.

```
 72                 ├──┬──┬──┬── F(y)
                       │  │  └── f(x, y)
                       │  └───── F(x)
                       │         δ ⎛ F(α)
                       └──────── | ⎨
                                 α ⎝ f(δ, α)
(2):  ─────────────────────────────────────────
a | ──┬── F(y)          ├──┬──┬──┬── F(y)
  |   └── f(x, y)          │  │  └── f(x, y)
b | F(x)                   │  │     δ ⎛ F(α)
  | δ ⎛ F(α)               │  └──── | ⎨
c | | ⎨                    │        α ⎝ f(δ, α)
  | α ⎝ f(δ, α)            └─────┬── F(x)
                                 │   δ ⎛ F(α)
                                 └── | ⎨
                                     α ⎝ f(δ, α)
```

(73.

```
 72                 ├──┬──┬──┬── F(y)
                       │  │  └── f(x, y)
                       │  └───── F(x)
                       │         δ ⎛ F(α)
                       └──────── | ⎨
                                 α ⎝ f(δ, α)
(8):  ─────────────────────────────────────────
a | ──┬── F(y)          ├──┬──┬──┬── F(y)
  |   └── f(x, y)          │  │  └── f(x, y)
b | F(x)                   │  │     δ ⎛ F(α)
  | δ ⎛ F(α)               │  └──── | ⎨
d | | ⎨                    │        α ⎝ f(δ, α)
  | α ⎝ f(δ, α)            └──────── F(x)
```

(74.

Se x ha una proprietà F che è ereditaria nella f-successione, allora ogni risultato di una applicazione del procedimento f su x ha la proprietà F.

69

$$\vdash \left(\left(\underset{\mathfrak{d}}{\smile}\ \underset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} F(\mathfrak{a}) \\ f(\mathfrak{d},\mathfrak{a}) \\ F(\mathfrak{d}) \end{array} \right) \equiv \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta,\alpha) \end{array} \right) \right)$$

(52):

$$\begin{array}{l|l} c & \underset{\mathfrak{d}}{\smile}\ \underset{\mathfrak{a}}{\smile}\ F(\mathfrak{a}),\ f(\mathfrak{d},\mathfrak{a}),\ F(\mathfrak{d}) \\ d & \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(F(\alpha),\ f(\delta,\alpha) \right) \\ f(\Gamma) & \Gamma \end{array}$$

$$\vdash \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta,\alpha) \end{array} \right) \quad \underset{\mathfrak{d}}{\smile}\ \underset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} F(\mathfrak{a}) \\ f(\mathfrak{d},\mathfrak{a}) \\ F(\mathfrak{d}) \end{array}$$

(75.

Se dalla proposizione che $\mathfrak{d}$ ha la proprietà F, qualunque sia $\mathfrak{d}$, può venir dedotto che ogni risultato di una applicazione del procedimento f su $\mathfrak{d}$ ha la proprietà F, allora la proprietà F è ereditaria nella f-successione.

26. Il susseguirsi in una successione

$$\Vdash \left(\left(\underset{\mathfrak{F}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{F}(y) \\ \underset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ f(x,\mathfrak{a}) \end{array} \\ \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\begin{array}{l} \mathfrak{F}(\alpha) \\ f(\delta,\alpha) \end{array} \right) \end{array} \right) \equiv \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\tilde{}}} f(x_\gamma, y_\beta) \right)$$

(76.

Questa è la spiegazione del complesso di segni $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\tilde{}}} f(x_\gamma, y_\beta)$ che figura al secondo membro. Per quanto riguarda il raddoppio del segno di giudizio, e le lettere greche, rimando al paragrafo 24. Non sarebbe ammissibile scrivere semplicemente

$$\overset{x}{\underset{y}{\tilde{}}} f(x, y)$$

in luogo dell'espressione precedente, perché in una funzione di x e di y scritta in modo dettagliato, queste lettere potrebbero ricorrere anche all'infuori dei posti di argomento, e allora non si potrebbe piú

riconoscere quali posti andrebbero riguardati come posti d'argomento. Questi ultimi devono quindi venir caratterizzati come tali. Ciò avviene qui per mezzo degli indici γ e β. Questi indici devono essere scelti diversi in previsione del caso che i due argomenti siano uguali fra loro. Assumiamo le lettere greche per avere una certa libertà di scelta, affinché, nel caso che

$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$$

racchiuda in sé un'espressione similmente strutturata, si possa scegliere la denotazione dei posti d'argomento dell'espressione racchiusa, in modo che risulti diversa dalla denotazione di quelli dell'espressione che la racchiude. *L'uguaglianza e la diversità delle lettere greche ha qui significato solo all'interno dell'espressione*

$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta) ;$$

al di fuori di essa possono ricorrere le medesime lettere senza che con ciò venga indicata una qualsiasi relazione con queste.

Traduciamo

$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$$

con le parole: "y segue x nella f-successione", modo questo di esprimersi che risulta evidentemente possibile solo fintantoché la funzione f è determinata. In base alla (76), questo potrebbe venir espresso in parole all'incirca cosí:

"*Se dalle due proposizioni che, qualunque sia F, ogni risultato di una applicazione del procedimento f su x ha la proprietà F e la proprietà F è ereditaria nella f-successione, può dedursi che y ha la proprietà F, allora dico:*

'y segue x nella f-successione'; oppure: 'x precede y nella f-successione'." [1]

[1] Per rendere piú chiaro il grado di generalità del concetto qui introdotto del seguirsi in una successione, ricordo alcune possibilità. In questo concetto non è compreso soltanto un susseguirsi come delle perle in un filo, ma anche una ramificazione, quale ha luogo in un tronco d'albero, o una riunione di piú rami prima distinti, come pure un richiudersi su di sé ad anello.

27. CONSEGUENZE

76 ⊢ [(𝔉 ─┬─ 𝔉(y) ; α ─┬─ 𝔉(α) ; └─ f(x, α) ; └─ δ/α (𝔉(α) ; f(δ, α))) ≡ $\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, y_\beta)$]

(68):

a | 𝔉
f(Γ) | Γ(y) ; α ─ Γ(α) ; f(x, α) ; δ/α (Γ(α) ; f(δ, α))
b | $\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, y_\beta)$
c | F

⊢ F(y) ; α ─ F(α) ; f(x, α) ; δ/α (F(α) ; f(δ, α)) ; $\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, y_\beta)$ (77.

Qui, conformemente al paragrafo 10, $F(y)$, $F(\mathfrak{a})$, $F(\alpha)$ vanno riguardate come funzioni diverse dell'argomento F. La (77) significa:

Se y segue x nella f-successione; se la proprietà F è ereditaria nella f-successione; se ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su x ha la proprietà F: allora y ha la proprietà F.

77 ⊢ F(y) ; α ─ F(α) ; f(x, α) ; δ/α (F(α) ; f(δ, α)) ; $\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, y_\beta)$

(17):

a | F(y)
b | α ─ F(α) ; f(x, α)
c | δ/α (F(α) ; f(δ, α))
d | $\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, y_\beta)$

⊢ F(y) ; $\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, y_\beta)$; α ─ F(α) ; f(x, α) ; δ/α (F(α) ; f(δ, α)) (78.

(2):

(2):

$$
\begin{array}{l|l}
a & F(y);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta) \\
b & \overset{\mathfrak{a}}{\smile} F(\mathfrak{a});\ f(x, \mathfrak{a}) \\
c & \underset{\alpha}{\overset{\delta}{|}} \left(F(y);\ f(\delta, \alpha) \right)
\end{array}
$$

$$\vdash F(y);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(\alpha_\gamma, y_\beta);\ \underset{\alpha}{\overset{\delta}{|}} \left(F(\alpha);\ f(\delta, \alpha) \right);\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile} F(\mathfrak{a});\ f(x, \mathfrak{a});\ \underset{\alpha}{\overset{\delta}{|}} \left(F(\alpha);\ f(\delta, \alpha) \right) \qquad (79.$$

(5):

$$
\begin{array}{l|l}
a & F(y);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta);\ \underset{\alpha}{\overset{\delta}{|}} \left(F(\alpha);\ f(\delta, \alpha) \right) \\
b & \overset{\mathfrak{a}}{\smile} F(\mathfrak{a});\ f(x, \mathfrak{a});\ \underset{\alpha}{\overset{\delta}{|}} \left(F(\alpha);\ f(\delta, \alpha) \right) \\
c & F(x)
\end{array}
$$

$$\vdash F(y);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta);\ \underset{\alpha}{\overset{\delta}{|}} \left(F(\alpha);\ f(\delta, \alpha) \right);\ F(x);\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile} F(\mathfrak{a});\ f(x, \mathfrak{a});\ \underset{\alpha}{\overset{\delta}{|}} \left(F(\alpha);\ f(\delta, \alpha) \right);\ F(x) \qquad (80.$$

(74)::

$$
\begin{array}{l|l}
y & \mathfrak{a}
\end{array}
$$

$$\vdash F(y);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta);\ \underset{\alpha}{\overset{\delta}{|}} \left(F(\alpha);\ f(\delta, \alpha) \right);\ F(x) \qquad (81.$$

Poiché nella (74) y ricorre soltanto in $F(x);\ f(x, y)$, sostituendo a y la lettere gotica $\mathfrak{a}$, si può (§ 11) fare in modo che la cavità preceda immediatamente questa espressione. La (81) può venir cosí tradotta:

Se x ha una proprietà F che è ereditaria nella f-successione, e se y segue x nella f-successione, allora y ha la proprietà F.[1]

Supponiamo per esempio che F sia la proprietà di essere un mucchio di fagioli; il procedimento f consista nel togliere un fagiolo da un mucchio di fagioli, cosicché

$$f(a, b)$$

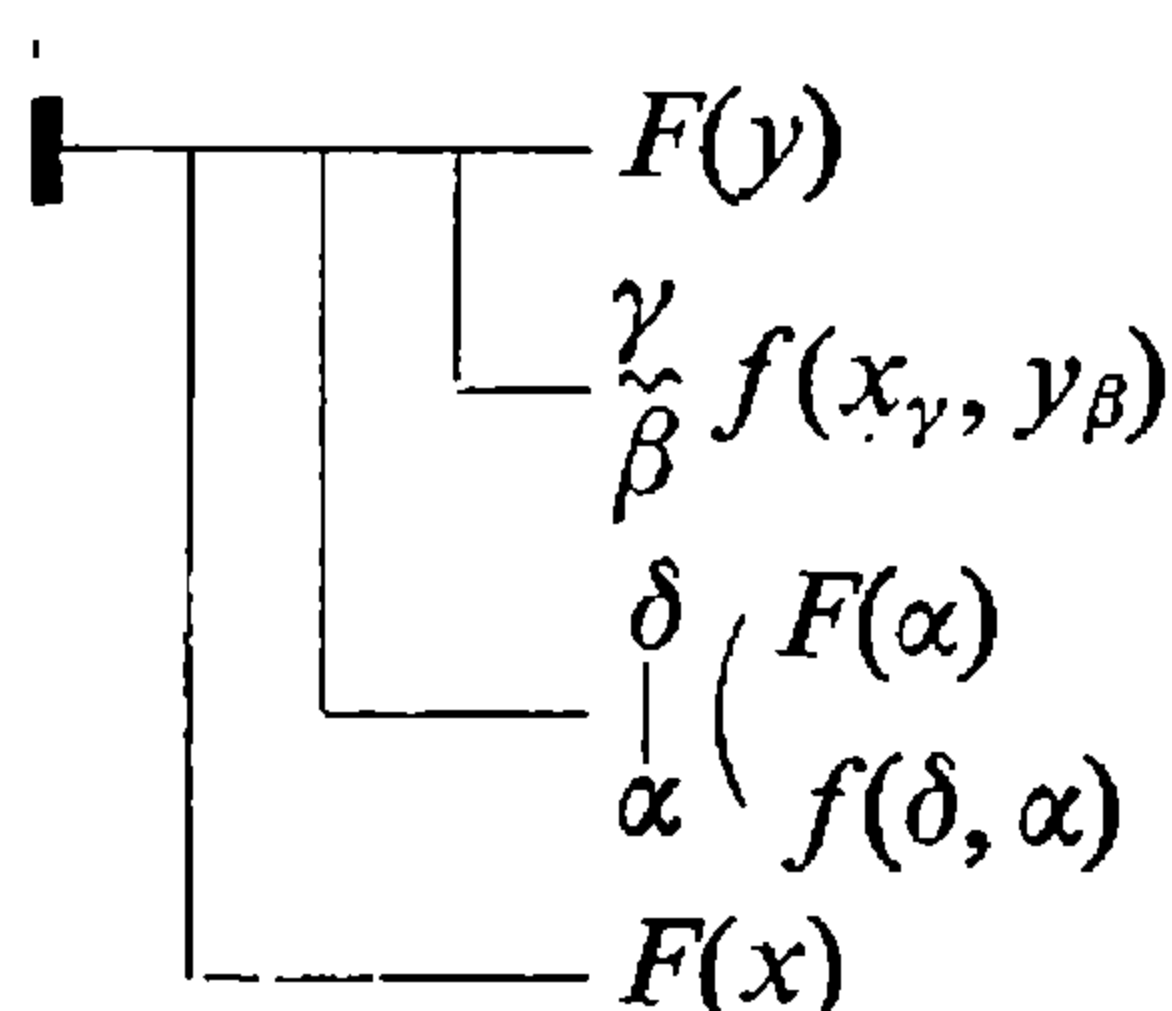
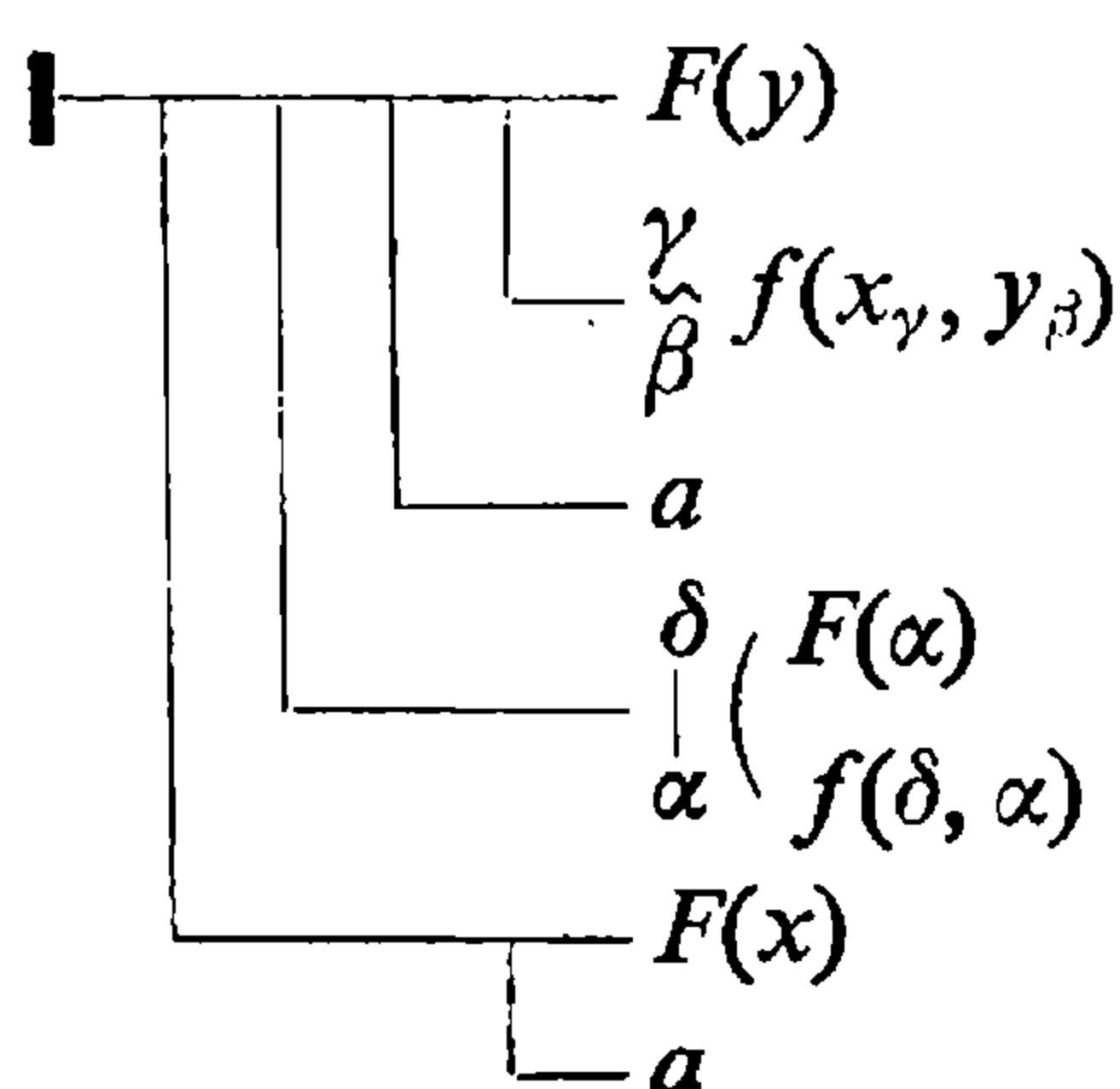
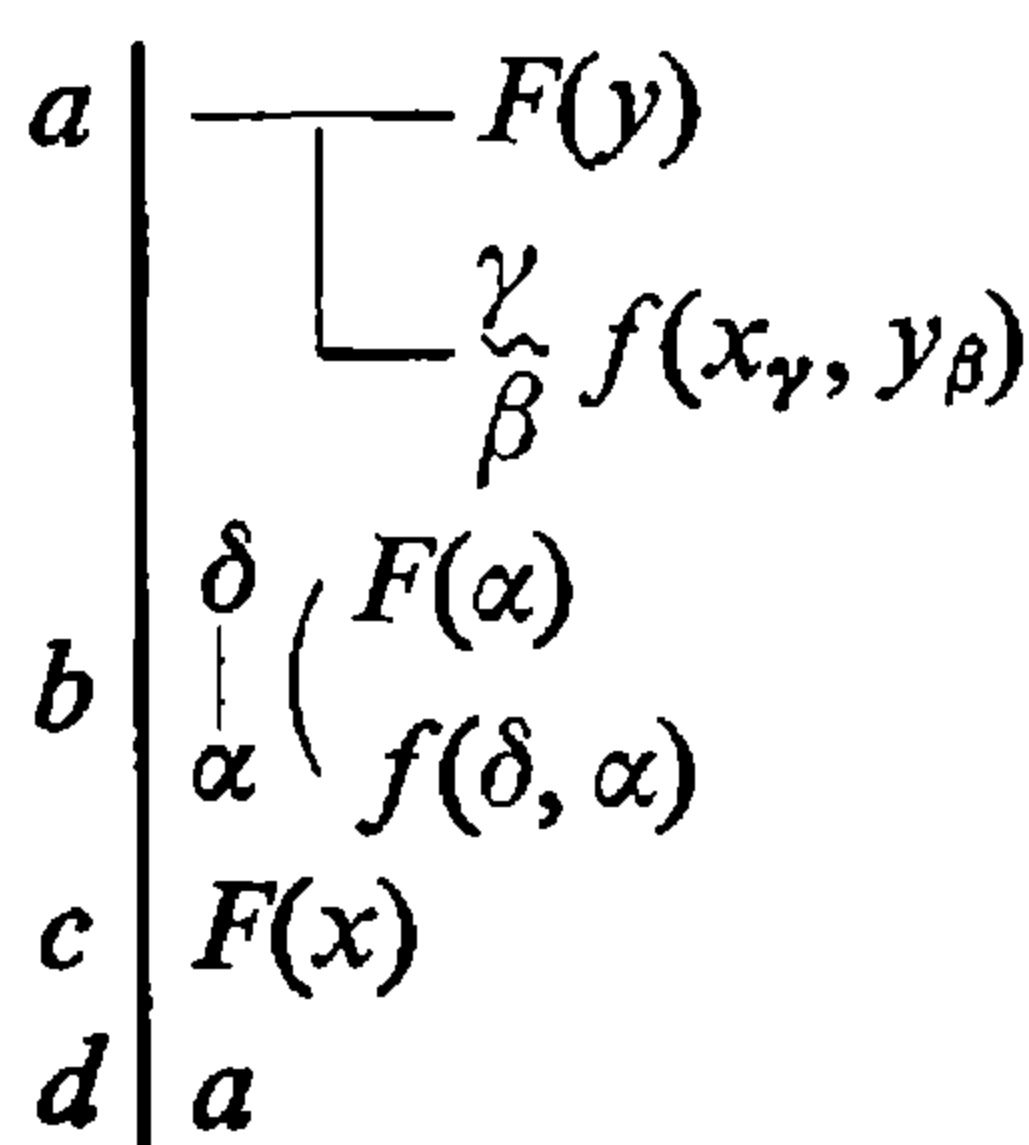
significhi la circostanza che b contiene tutti i fagioli del mucchio a meno uno e, se mai, che non contiene niente. Allora con la nostra proposizione si otterrebbe il seguente risultato: se la proprietà di essere un mucchio fosse ereditaria nella f-successione, un unico fagiolo, o addirittura nessun fagiolo, sarebbe un mucchio di fagioli. Questa ereditarietà tuttavia non sussiste in generale, perché esistono certi z per i quali, a causa dell'indeterminatezza del concetto "mucchio", $F(z)$ non è giudicabile.

81

$$\vdash F(y)$$
$$\frac{\gamma}{\beta}\, f(x_\gamma, y_\beta)$$
$$\begin{matrix}\delta\\ |\\ \alpha\end{matrix}\left(\begin{matrix}F(\alpha)\\ f(\delta, \alpha)\end{matrix}\right.$$
$$F(x)$$

(18):

a	$F(y)$; $\frac{\gamma}{\beta}\, f(x_\gamma, y_\beta)$
b	$\begin{matrix}\delta\\ |\\ \alpha\end{matrix}\left(\begin{matrix}F(\alpha)\\ f(\delta, \alpha)\end{matrix}\right.$
c	$F(x)$
d	a

$$\vdash F(y)$$
$$\frac{\gamma}{\beta}\, f(x_\gamma, y_\beta)$$
$$a$$
$$\begin{matrix}\delta\\ |\\ \alpha\end{matrix}\left(\begin{matrix}F(\alpha)\\ f(\delta, \alpha)\end{matrix}\right.$$
$$F(x)$$
$$a$$

(82.

[1] Su questo si basa l'induzione di Bernoulli.

82

$F(\Gamma)$ | $g(\Gamma)$, $h(\Gamma)$

a | $h(x)$

$\vdash$ $g(y)$; $h(y)$; $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$; $h(x)$; $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left\{ \begin{array}{l} g(\alpha) \\ h(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right.$; $g(x)$; $h(x)$; $h(x)$

(36)::

b | $g(x)$

a | $h(x)$

$\vdash$ $g(y)$; $h(y)$; $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$; $h(x)$; $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left\{ \begin{array}{l} g(\alpha) \\ h(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right.$ (83.

81

$\vdash$ $F(y)$; $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$; $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right.$; $F(x)$

(8):

a | $F(y)$; $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$

b | $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right.$

d | $F(x)$

$\vdash$ $F(y)$; $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$; $F(x)$; $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right.$ (84.

77

$F(y)$
$F(\mathfrak{a})$
$f(x, \mathfrak{a})$
$F(\alpha)$
$f(\delta, \alpha)$
$f(x_\gamma, y_\beta)$

(12):

a $F(y)$
b $F(\mathfrak{a})$, $f(x, \mathfrak{a})$
c $F(\alpha)$, $f(\delta, \alpha)$
d $f(x_\gamma, y_\beta)$

$F(y)$
$F(\alpha)$
$f(\delta, \alpha)$
$F(\mathfrak{a})$
$f(x, \mathfrak{a})$
$f(x_\gamma, y_\beta)$

(85.

(19):

b $F(y)$, $F(\alpha)$, $f(\delta, \alpha)$
c $F(\mathfrak{a})$, $f(x, \mathfrak{a})$
d $f(x_\gamma, y_\beta)$
a $F(z)$, $f(y, z)$, $F(\alpha)$, $f(\delta, \alpha)$

$F(z)$
$f(y, z)$
$F(\alpha)$
$f(\delta, \alpha)$
$F(\mathfrak{a})$
$f(x, \mathfrak{a})$
$f(x_\gamma, y_\beta)$
$F(z)$
$f(y, z)$
$F(\alpha)$
$f(\delta, \alpha)$
$F(y)$
$F(\alpha)$
$f(\delta, \alpha)$

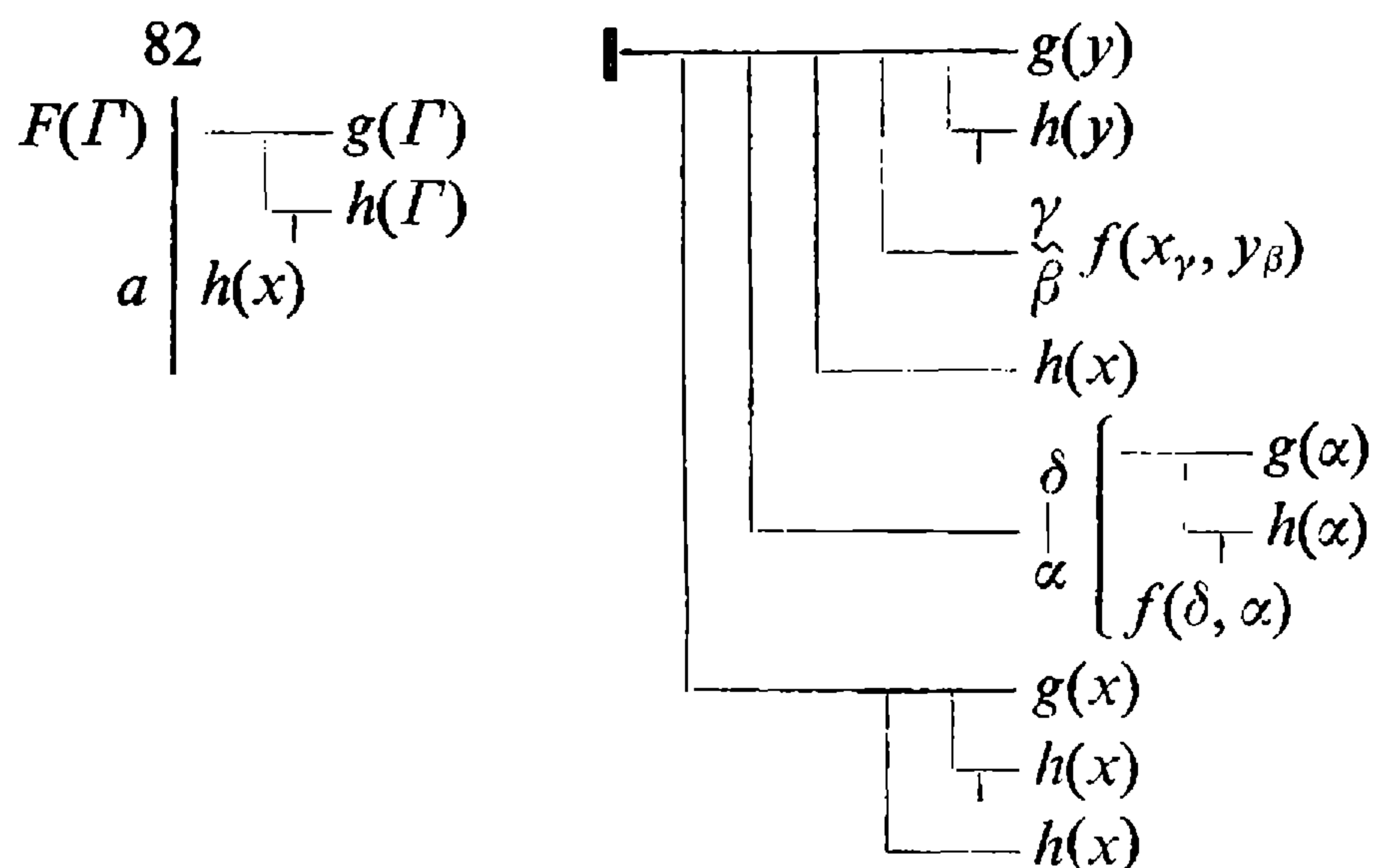
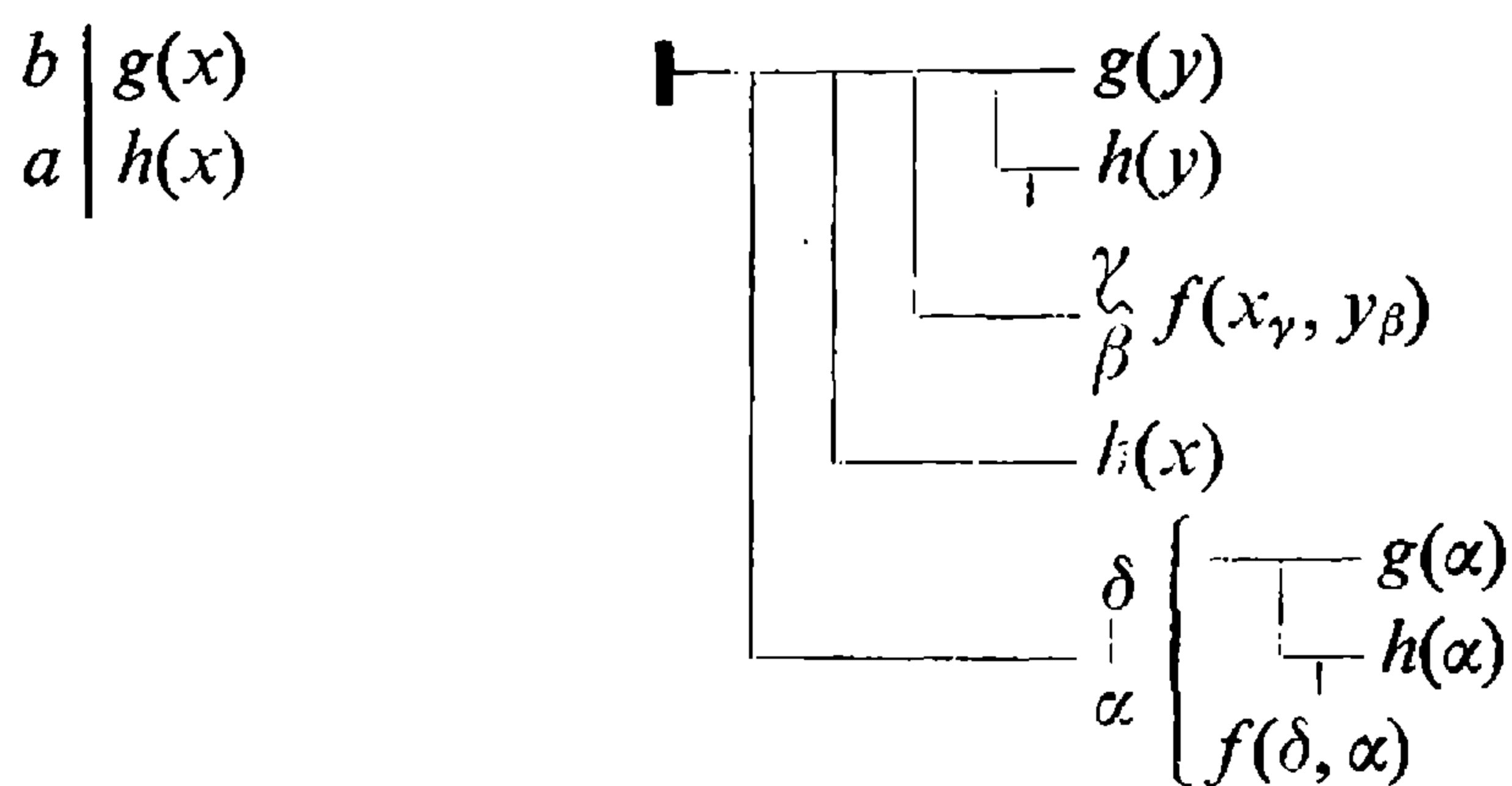
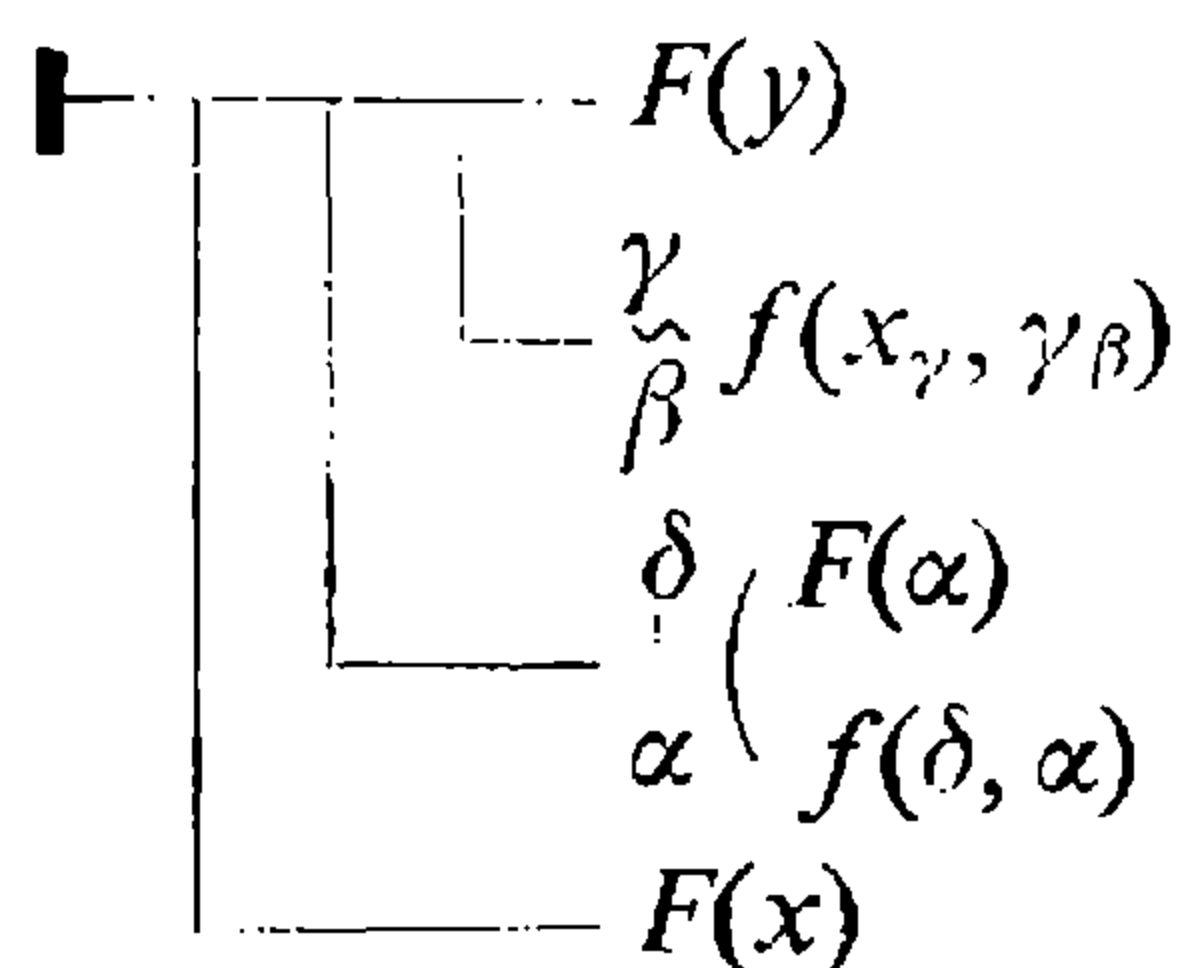
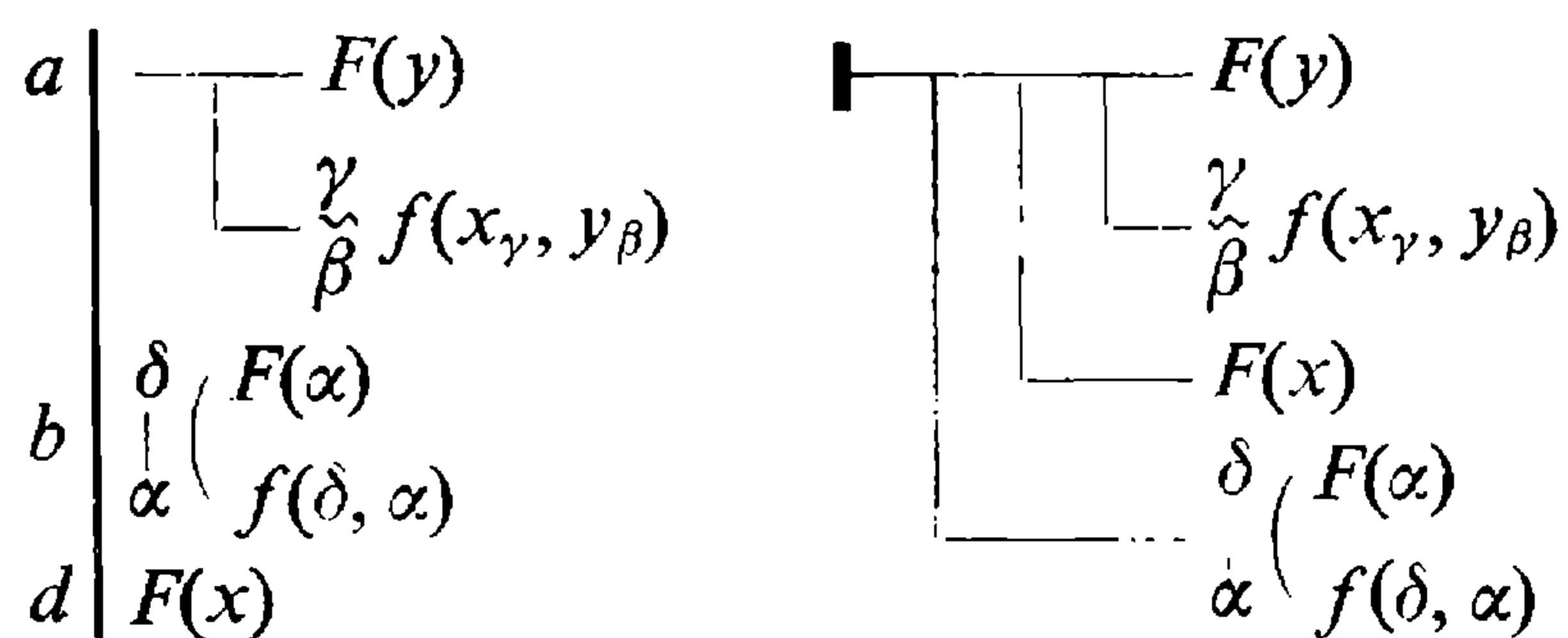
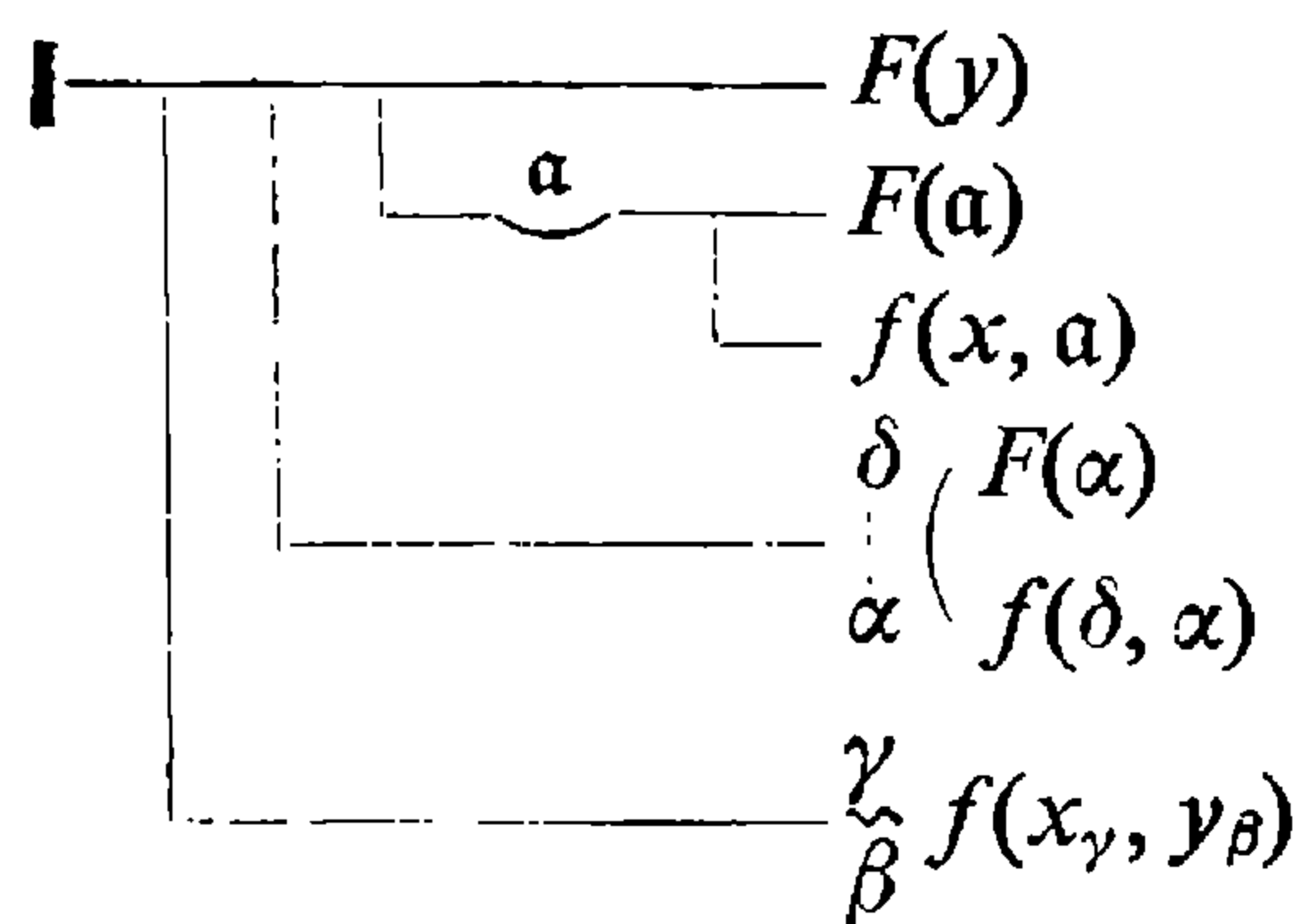
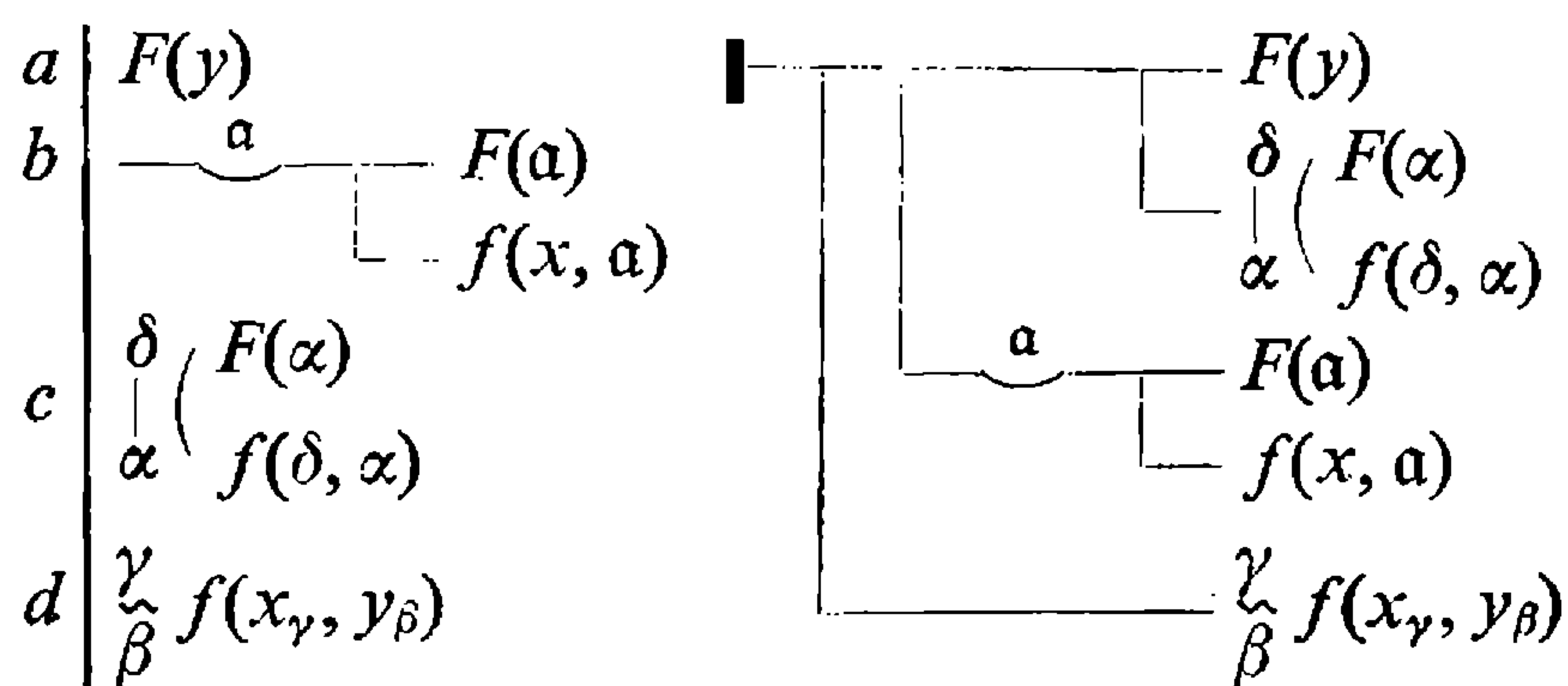
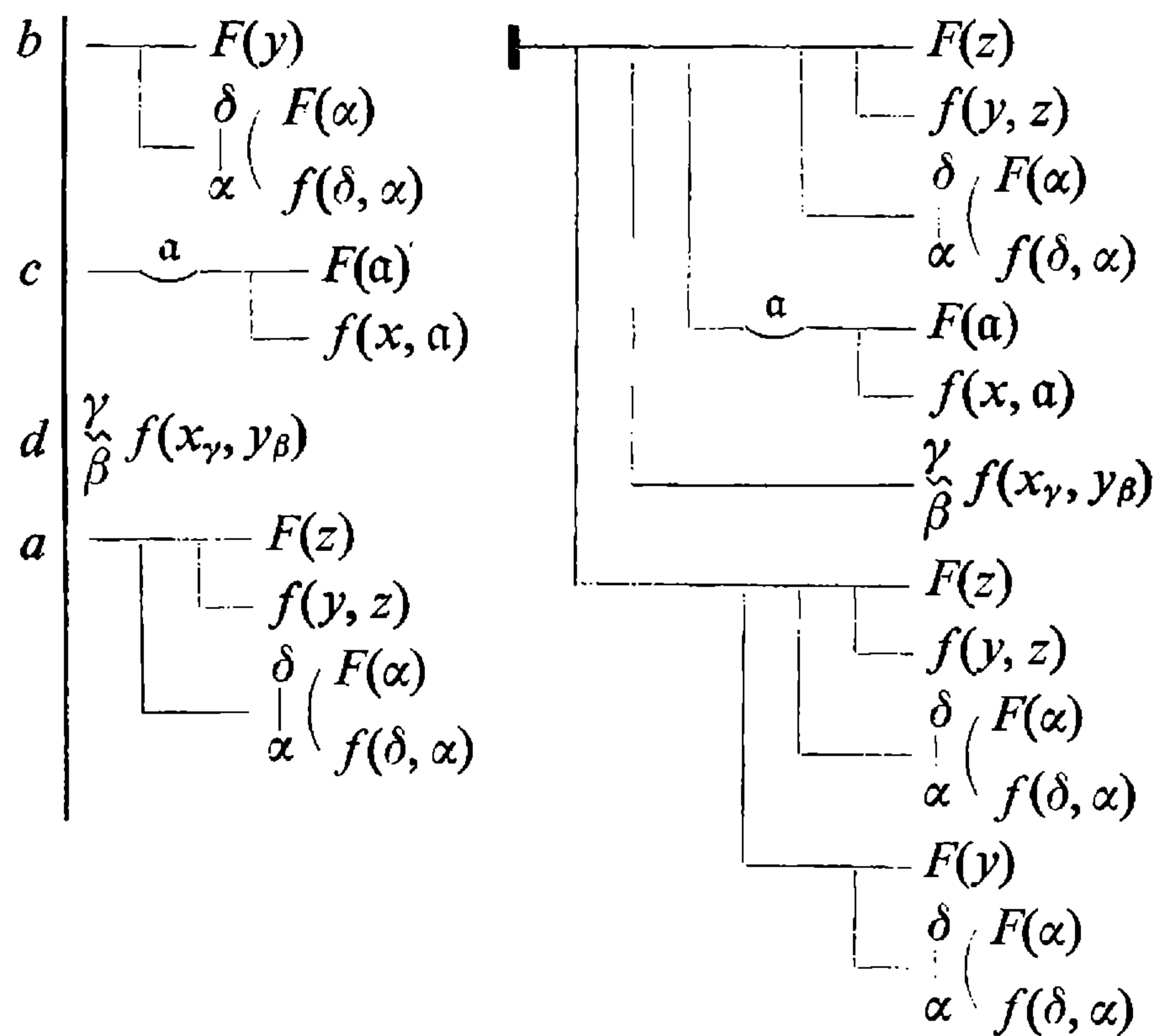
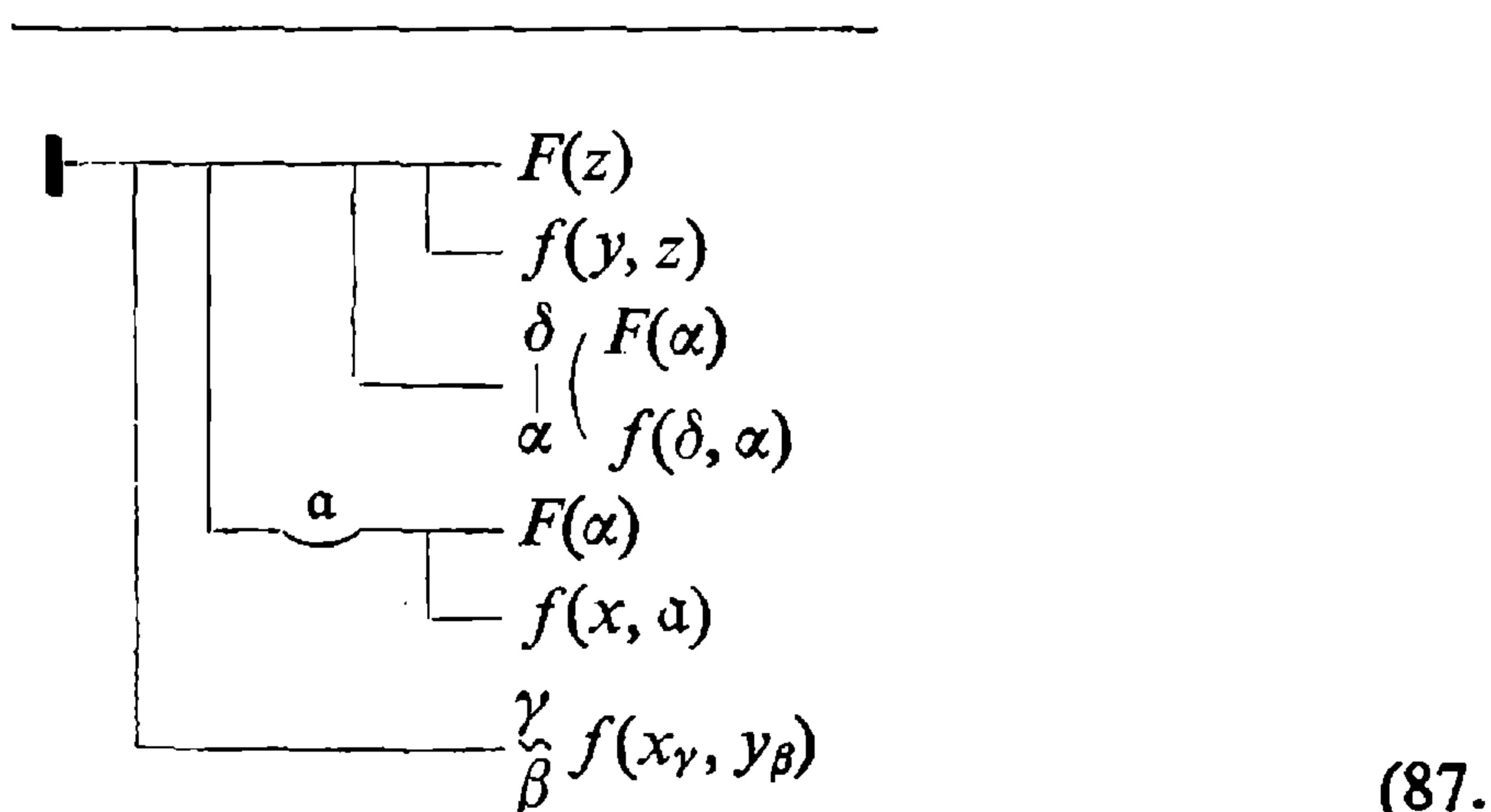
(86.

(73)::

(73)::

$\begin{array}{c|c} y & z \\ x & y \end{array}$

$$\vdash F(z)$$
$$f(y, z)$$
$$\underset{\alpha}{\overset{\delta}{|}} \left(\begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right)$$
$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile} F(\mathfrak{a})$$
$$f(x, \mathfrak{a})$$
$$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smallfrown}} f(x_\gamma, y_\beta)$$

(87.

La derivazione di questa proposizione, espressa in parole, suonerà all'incirca cosí:

α) nella f-successione y segua x;

β) ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su x abbia la proprietà F;

γ) la proprietà F sia ereditaria nella f-successione.

Da queste ipotesi segue, in base alla (85):

δ) y ha la proprietà F.

ε) Se z risulta da un'applicazione del procedimento f su y, allora da (γ), (δ), (ε) segue, per la (72):

z ha la proprietà F.

Quindi:

Se z è il risultato di una applicazione del procedimento f su un oggetto y che nella f-successione segue x, e se ogni risultato di una applicazione del procedimento f su x ha una proprietà F che è ereditaria nella f-successione, allora z ha questa proprietà F.

87

$$\vdash F(z)$$
$$f(y, z)$$
$$\underset{\alpha}{\overset{\delta}{|}} \left(\begin{array}{l} F(\mathfrak{a}) \\ f(\delta, \mathfrak{a}) \end{array} \right)$$
$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile} F(\mathfrak{a})$$
$$f(x, \mathfrak{a})$$
$$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smallfrown}} f(x_\gamma, y_\beta)$$

(15):

(15):

$a \mid F(z)$
$b \mid f(y, z)$
$c \mid \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right.$
$d \mid \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \; F(\mathfrak{a}) \;\; f(x, \mathfrak{a})$
$e \mid \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\frown}} f(x_\gamma, y_\beta)$

$\vdash F(z)$; $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right.$; $\overset{\mathfrak{a}}{\smile} F(\mathfrak{a})$; $f(x, \mathfrak{a})$; $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\frown}} f(x_\gamma, y_\beta)$; $f(y, z)$ (88.

28. Ulteriori conseguenze.

76 $\vdash \left(\left[\overset{\mathfrak{F}}{\smile} \; \mathfrak{F}(y); \; \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{F}(\mathfrak{a}); \; f(x, \mathfrak{a}); \; \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\begin{array}{l} \mathfrak{F}(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right. \right] \equiv \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\frown}} f(x_\gamma, y_\beta) \right)$

(52):

$f(\Gamma) \mid \Gamma$
$c \mid \overset{\mathfrak{F}}{\smile} \; \mathfrak{F}(y); \; \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{F}(\mathfrak{a}); \; f(x, \mathfrak{a}); \; \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\begin{array}{l} \mathfrak{F}(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right.$
$d \mid \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\frown}} f(x_\gamma, y_\beta)$

$\vdash \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\frown}} f(x_\gamma, y_\beta)$; $\overset{\mathfrak{F}}{\smile} \mathfrak{F}(y)$; $\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$; $f(x, \mathfrak{a})$; $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\begin{array}{l} \mathfrak{F}(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right.$ (89.

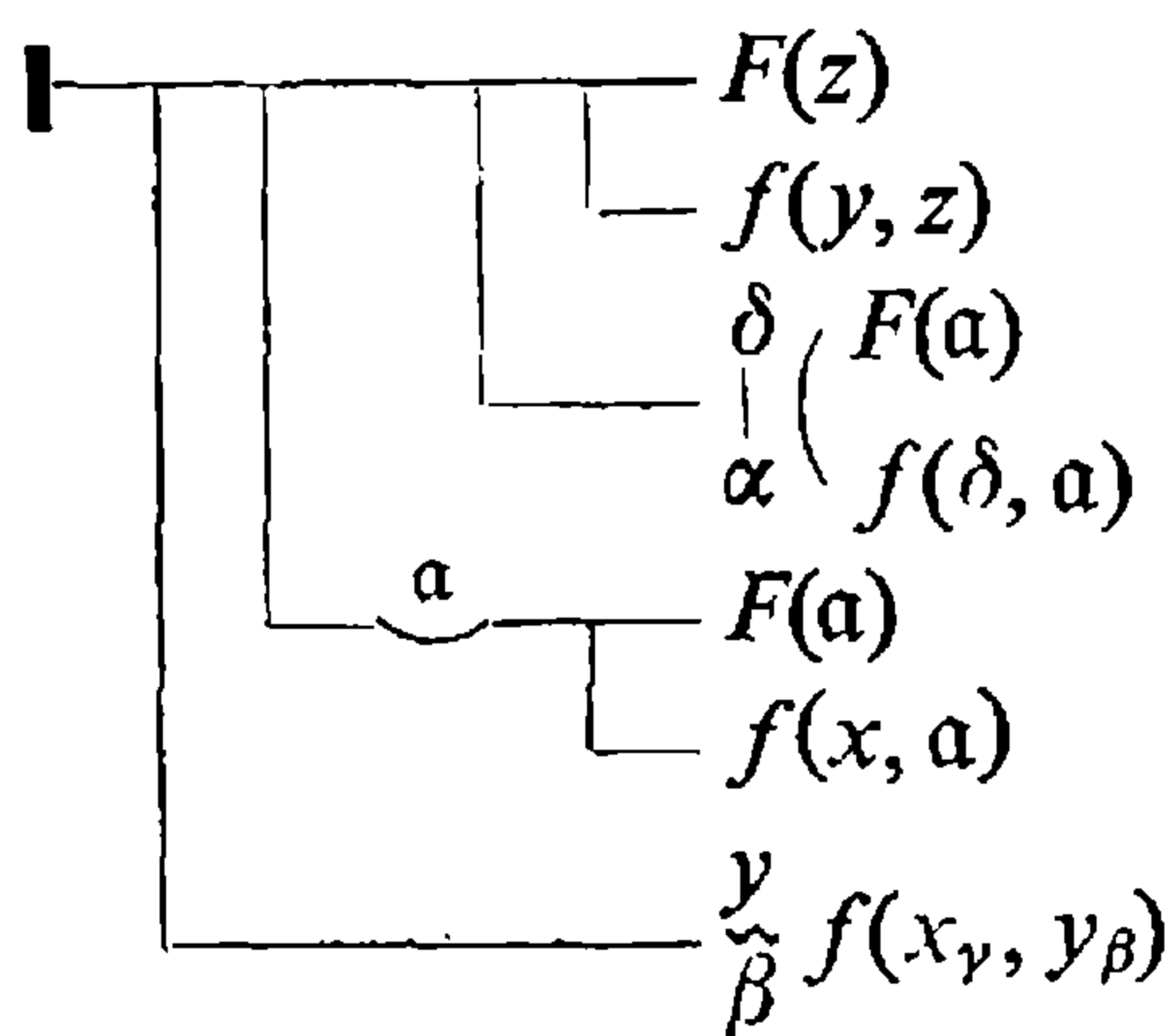
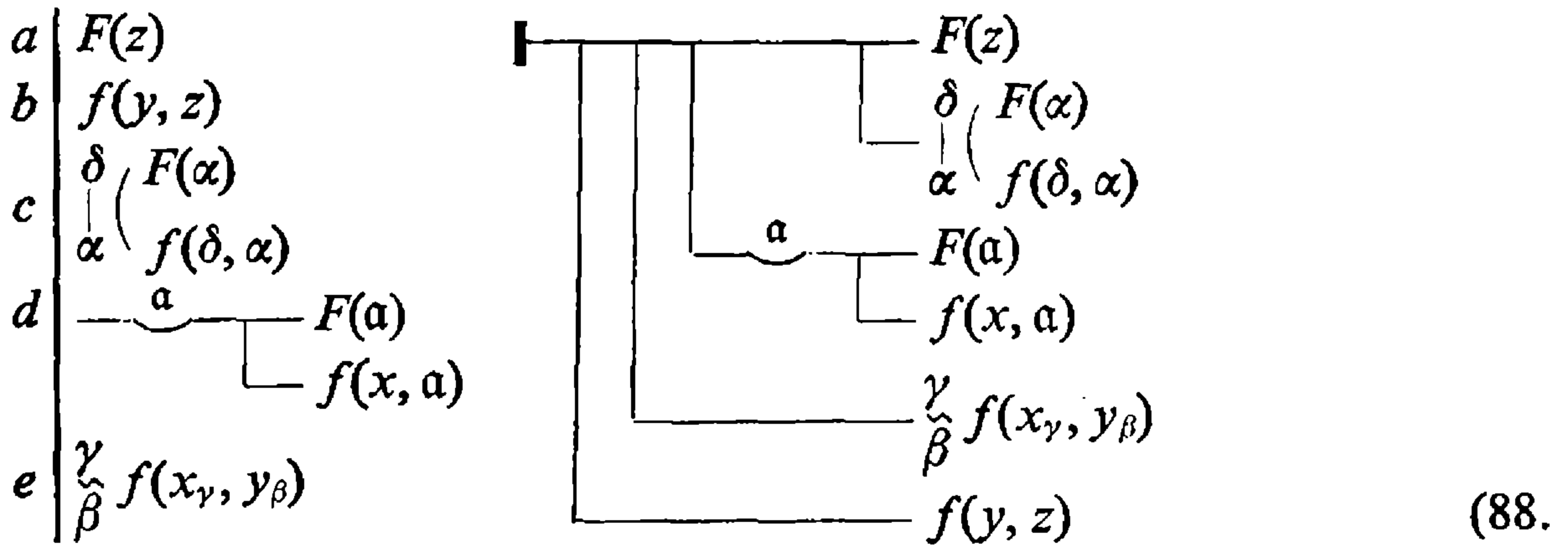
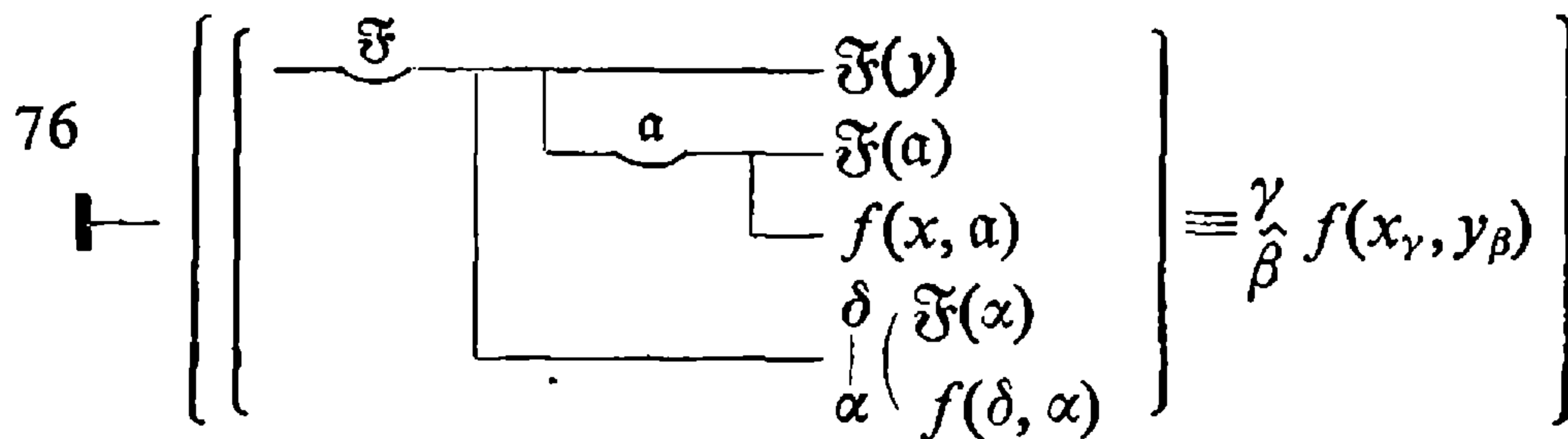
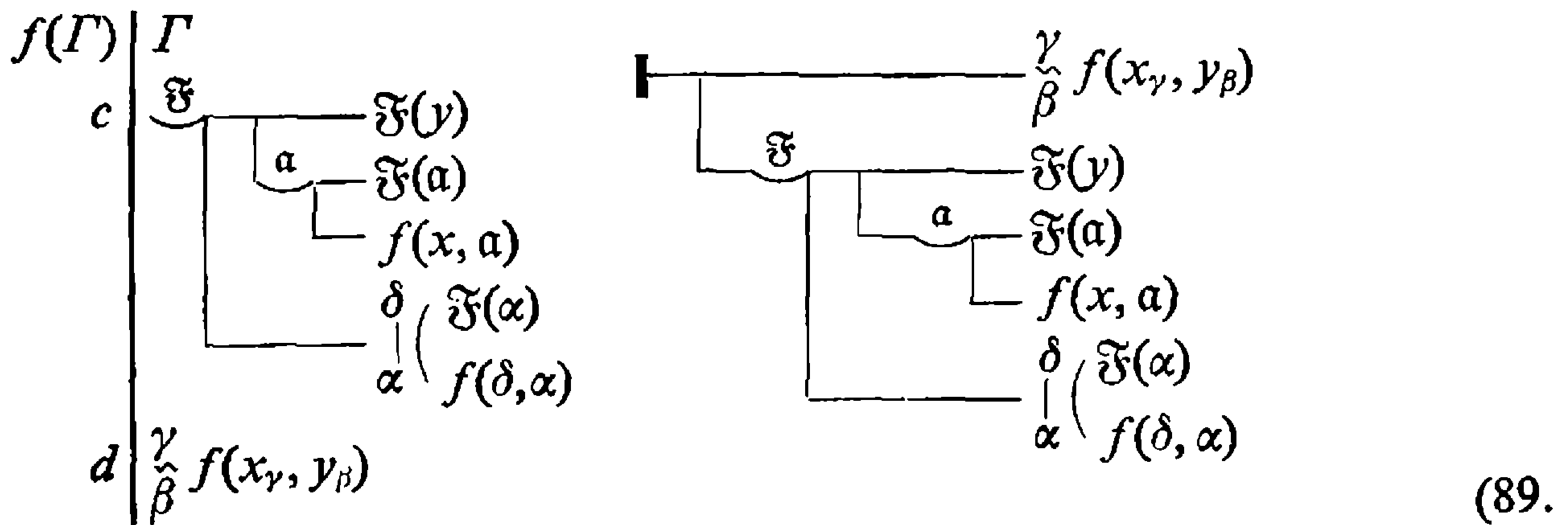
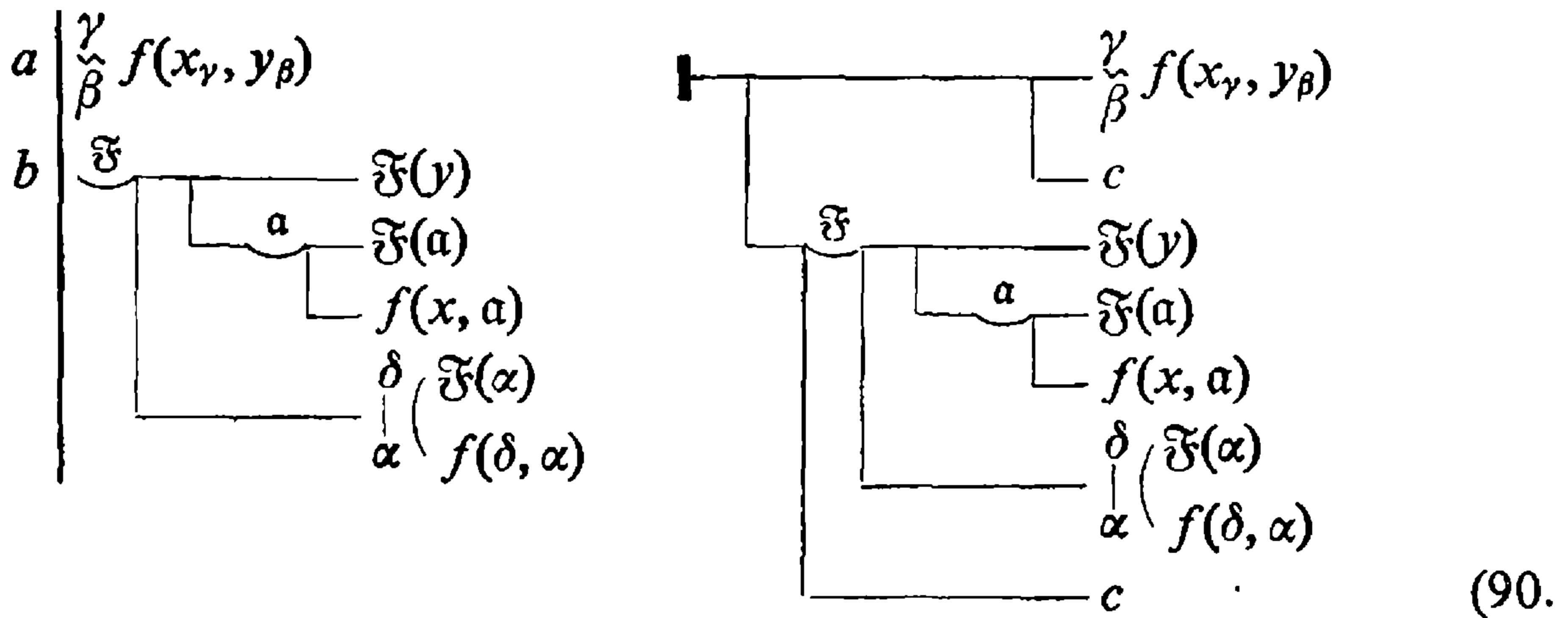
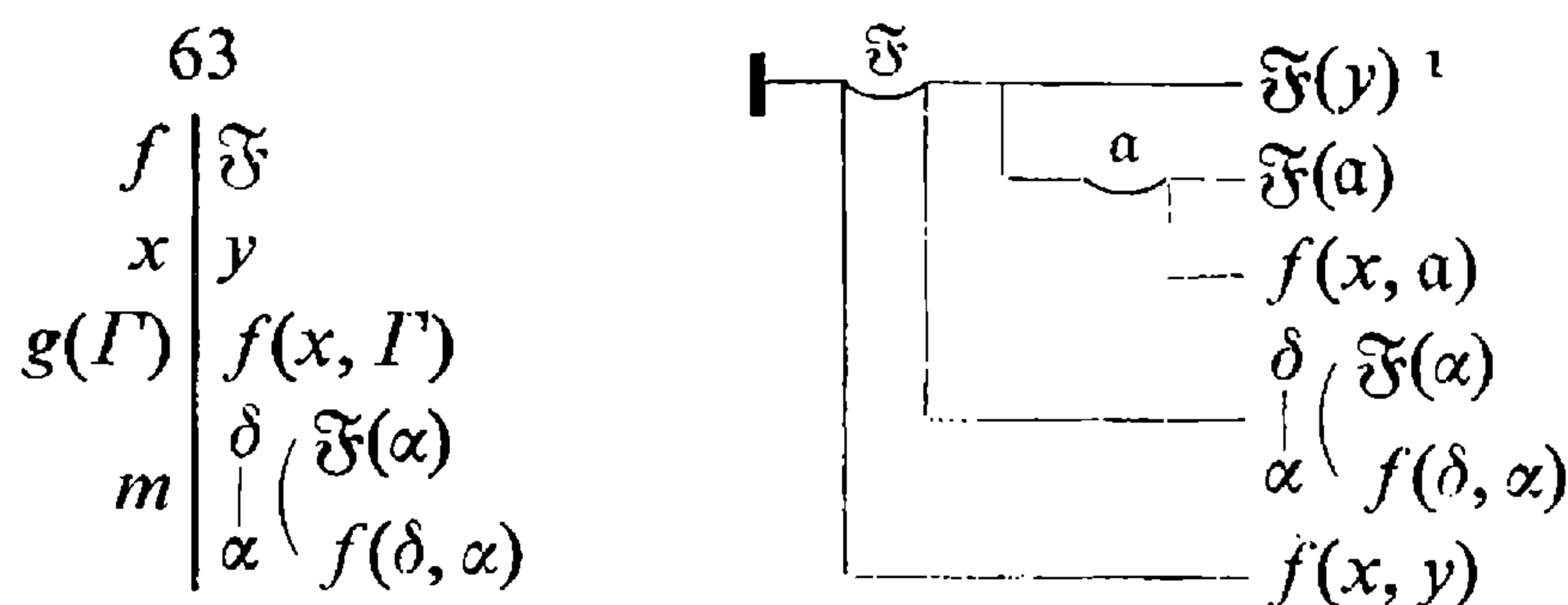
(5):

$a \mid \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\frown}} f(x_\gamma, y_\beta)$
$b \mid \overset{\mathfrak{F}}{\smile} \; \mathfrak{F}(y); \; \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{F}(\mathfrak{a}); \; f(x, \mathfrak{a}); \; \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\begin{array}{l} \mathfrak{F}(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right.$

$\vdash \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\frown}} f(x_\gamma, y_\beta)$; c; $\overset{\mathfrak{F}}{\smile} \mathfrak{F}(y)$; $\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$; $f(x, \mathfrak{a})$; $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left(\begin{array}{l} \mathfrak{F}(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right.$; c (90.

63

f	$\mathfrak{F}$
x	y
$g(\Gamma)$	$f(x, \Gamma)$
m	$\overset{\delta}{\underset{\alpha}{\mid}} \left(\begin{matrix} \mathfrak{F}(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{matrix} \right.$

$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{F}}{\smile}$ — $\mathfrak{F}(y)$ [1]
— $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ — $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$
— $f(x, \mathfrak{a})$
— $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{\mid}} \left(\begin{matrix} \mathfrak{F}(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{matrix} \right.$
— $f(x, y)$

(90):

$c \mid f(x, y)$

$\vdash$ — $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$
— $f(x, y)$ (91.

Facciamo qui seguire la derivazione non simbolica della proposizioni (91).

Dalla proposizione

α) "Ogni risultato di un'applicazione del. procedimento f su x ha la proprietà $\mathfrak{F}$",

si può dedurre, qualunque sia $\mathfrak{F}$, che:

ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su x ha la proprietà $\mathfrak{F}$.[2]

Di conseguenza, dalla proposizione α) e dalla proposizione che la proprietà $\mathfrak{F}$ è ereditaria nella f-successione, si può dedurre, qualunque sia $\mathfrak{F}$:

ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su x ha la proprietà $\mathfrak{F}$.

Quindi, per la (90), vale la proposizione;

Ogni risultato di un'applicazione di un procedimento f su un oggetto x, segue questo x nella f-successione.

91

$\vdash$ — $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta)$
— $f(x, y)$

(53):

[1] Per quanto riguarda la cavità con $\mathfrak{F}$ si veda il paragrafo 11.

[2] [Va notato che la proposizione qui enunciata, solo *in apparenza* coincide con la precedente, ma se ne differenzia sostanzialmente, in quanto la proprietà in essa enunciata vale "per ogni $\mathfrak{F}$"; si può dire quindi che essa costituisce la chiusura universale, rispetto a $\mathfrak{F}$, della proposizione precedente.]

(53):

$f(A)$ | $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\ }}} f(A_\gamma, y_\beta)$; $f(x, y)$
c | x
d | z

⊢ $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\ }}} f(z_\gamma, y_\beta)$; $f(x, y)$; $(x \equiv z)$

(92.

60
$\mathfrak{a}$ | $\mathfrak{F}$
$f(\Gamma)$ | $\Gamma(y)$
$g(\Gamma)$ | $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{}} \left(\begin{matrix} \Gamma(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{matrix} \right.$
$h(\Gamma)$ | $\mathfrak{a}$ $\Gamma(\mathfrak{a})$; $f(x, \mathfrak{a})$
b | $\mathfrak{F}$

⊢ $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{F}(y)$; $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$; $f(x, \mathfrak{a})$; $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{}} \left(\begin{matrix} \mathfrak{F}(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{matrix} \right.$
$\mathfrak{F}$ $\mathfrak{F}(y)$; $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{}} \left(\begin{matrix} \mathfrak{F}(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{matrix} \right.$; $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$; $f(x, \mathfrak{a})$

(90):

c | $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{F}(y)$; $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{}} \left(\begin{matrix} \mathfrak{F}(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{matrix} \right.$; $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$; $f(x, \mathfrak{a})$

⊢ $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\ }}} f(x_\gamma, y_\beta)$; $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{F}(y)$; $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{}} \left(\begin{matrix} \mathfrak{F}(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{matrix} \right.$; $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$; $f(x, \mathfrak{a})$

(93.

93
y | z

⊢ $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\ }}} f(x_\gamma, z_\beta)$; $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{F}(z)$; $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{}} \left(\begin{matrix} \mathfrak{F}(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{matrix} \right.$; $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$; $f(x, \mathfrak{a})$

(7):

(7):

a | $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta)$
b | $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{F}(z)$; $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \big(\mathfrak{F}(\alpha), f(\delta, \alpha)$; $\mathfrak{a}$ — $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$; $f(x, \mathfrak{a})$
c | $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$
d | $f(y, z)$

$$\vdash \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta);\ f(y, z);\ \mathfrak{F}\ \mathfrak{F}(z);\ \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}}\big(\mathfrak{F}(\alpha), f(\delta, \alpha);\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a});\ f(x, \mathfrak{a});\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta);\ f(y, z)$$ (94.

(88)::
F | $\mathfrak{F}$

$$\vdash \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta);\ f(y, z)$$ (95.

(8):

a | $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta)$
b | $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$
d | $f(y, z)$

$$\vdash \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta);\ f(y, z);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$$ (96.

Ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su un oggetto che segue x nella f-successione, segue esso pure x nella f-successione.

96
z | $\mathfrak{a}$
y | $\mathfrak{d}$

$$\vdash \mathfrak{d}\ \mathfrak{a}\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, \mathfrak{a}_\beta);\ f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a});\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, \mathfrak{d}_\beta)$$

(75):

(57):

$$F(\Gamma) \Big| \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, \Gamma_\beta) \qquad \vdash \overset{\delta}{\underset{\alpha}{\smile}} \left(\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, \alpha_\beta) \atop f(\delta, \alpha) \right) \qquad (97.$$

La proprietà di seguire x nella f-successione è ereditaria nella f-successione.

97

$$\vdash \overset{\delta}{\underset{\alpha}{\smile}} \left(\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, \alpha_\beta) \atop f(\delta, \alpha) \right)$$

(84):

$$F(\Gamma) \Big| \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, \Gamma_\beta); \quad x \,|\, y; \quad y \,|\, z \qquad \vdash \begin{array}{l} \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta) \\ \frac{\gamma}{\beta} f(y_\gamma, z_\beta) \\ \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, y_\beta) \end{array} \qquad (98.$$

Se nella f-successione y segue x, e z segue y, allora z segue x.

29. "z APPARTIENE ALLA f-SUCCESSIONE CHE INIZIA CON x". SPIEGAZIONE E CONSEGUENZE

$$\Vdash \left[\left(\begin{array}{l} (z \equiv x) \\ \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \right) \equiv \frac{\gamma}{\bar{\bar{\beta}}} f(x_\gamma, z_\beta) \right] \qquad (99.$$

Rimando qui a quanto detto per le formule (69) e (76), circa l'introduzione di nuovi segni.

Il segno

$$\frac{\gamma}{\bar{\bar{\beta}}} f(x_\gamma, z_\beta)$$

può venir tradotto con "z appartiene alla f-successione che inizia con x",

oppure con "x appartiene alla f-successione che termina con z". Allora la (99), espressa in parole, suona cosí:

Se z coincide con x, oppure segue x, nella f-successione, diremo:

"z appartiene alla f-successione che inizia con x"; oppure: "x appartiene alla f-successione che termina con z".

$$99 \quad \vdash \left(\left[\begin{array}{l} z \equiv x \\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \right] \equiv \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\approx}} f(x_\gamma, z_\beta) \right)$$

(57):

$f(\Gamma)$	Γ
c	$(z \equiv x)$; $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta)$
d	$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\approx}} f(x_\gamma, z_\beta)$

$$\vdash \begin{array}{l} (z \equiv x) \\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\approx}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \qquad (100.$$

(48):

b	$(z \equiv x)$
c	$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta)$
d	$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\approx}} f(x_\gamma, z_\beta)$
a	$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, v_\beta)$; $f(z, v)$

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, v_\beta) \\ f(z, v) \\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\approx}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, v_\beta) \\ f(z, v) \\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, v_\beta) \\ f(z, v) \\ (z \equiv x) \end{array} \qquad (101.$$

(96, 92)::

(96, 92)::

y	z	x	z
z	v	z	x
		y	v

$$\vdash \; \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\;}}} f(x_\gamma, v_\beta)$$
$$f(z, v)$$
$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\;}}} f(x_\gamma, z_\beta) \qquad (102.\ [1])$$

Possiamo ora far seguire la derivazione della (102) a parole:

Se z coincide con x allora, per la (92), ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su z segue x nella f-successione. Se nella f-successione z segue x, allora, in base alla (96), ogni risultato di una applicazione di f su z, segue x nella f-successione.

Da queste due proposizioni segue, in base alla (100):

Se z appartiene alla f-successione che inizia con x, allora ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su z, segue x nella f-successione.

100

$$\vdash \; (z \equiv x)$$
$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\;}}} f(x_\gamma, z_\beta)$$
$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\;}}} f(x_\gamma, z_\beta)$$

(19):

b	$(z \equiv x)$
c	$\top \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\;}}} f(x_\gamma, z_\beta)$
d	$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\;}}} f(x_\gamma, z_\beta)$
a	$(x \equiv z)$

$$\vdash \; (x \equiv z)$$
$$\top \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\;}}} f(x_\gamma, z_\beta)$$
$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\;}}} f(x_\gamma, z_\beta)$$
$$\top (x \equiv z)$$
$$(z \equiv x) \qquad (103.$$

(55)::

d	x
c	z

$$\vdash \; (x \equiv z)$$
$$\top \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\;}}} f(x_\gamma, z_\beta)$$
$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\;}}} f(x_\gamma, z_\beta) \qquad (104.$$

[1] Riguardo l'ultima inferenza si veda il paragrafo 6.

30. Ulteriori conseguenze

99 $\vdash \left(\left[\begin{array}{l} (z \equiv x) \\ \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \right] \equiv \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\approx}} f(x_\gamma, z_\beta) \right)$

(52):

$f(\Gamma)$	Γ
c	$z \equiv x$; $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta)$
d	$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\approx}} f(x_\gamma, z_\beta)$

$\vdash$ $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\approx}} f(x_\gamma, z_\beta)$
— $(z \equiv x)$
— $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta)$ (105.

(37):

a	$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\approx}} f(x_\gamma, z_\beta)$
b	$(z \equiv x)$
c	$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta)$

$\vdash$ $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\approx}} f(x_\gamma, z_\beta)$
— $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta)$ (106.

Ciò che segue x nella f-successione appartiene alla f-successione che inizia con x.

106

x	z
z	v

$\vdash$ $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\approx}} f(z_\gamma, v_\beta)$
— $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}} f(z_\gamma, y_\beta)$

(7):

a	$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\approx}} f(z_\gamma, v_\beta)$
b	$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}} f(z_\gamma, v_\beta)$
c	$f(y, v)$
d	$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\approx}} f(z_\gamma, y_\beta)$

$\vdash$ $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\approx}} f(z_\gamma, v_\beta)$
— $f(y, v)$
— $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\approx}} f(z_\gamma, y_\beta)$
— $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}} f(z_\gamma, v_\beta)$
— — $f(y, v)$
— — $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\approx}} f(z_\gamma, y_\beta)$ (107.

(102)::

(102)::

x	z
z	y

$$\vdash \left[f(y, v) \rightarrow \left(\frac{\gamma}{\beta} f(z_\gamma, y_\beta) \rightarrow \frac{\gamma}{\beta} f(z_\gamma, v_\beta) \right) \right] \qquad (108.$$

Facciamo qui seguire la derivazione della (108) a parole.

Se y appartiene alla f-successione che inizia con z, allora, in base alla (102), ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su y segue z nella f-successione.

Ogni risultato di una applicazione del procedimento f su y appartiene allora, in base alla (106), alla f-successione che inizia con z.

Di conseguenza:

Se y appartiene alla f-successione che inizia con z, allora ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su y appartiene alla f-successione che inizia con z.

108

v	$\mathfrak{a}$
z	x
y	$\mathfrak{d}$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, \forall \mathfrak{a} \left[\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, \mathfrak{d}_\beta) \rightarrow \left(f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \rightarrow \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, \mathfrak{a}_\beta) \right) \right]$$

(75):

$F(\Gamma)$	$\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, \Gamma_\beta)$

$$\vdash \left| \begin{matrix} \delta \\ \alpha \end{matrix} \left(\begin{matrix} \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, \alpha_\beta) \\ f(\delta, \alpha) \end{matrix} \right. \right. \qquad (109.$$

La proprietà di appartenere alla f-successione che inizia con x è ereditaria nella f-successione.

109

$$\vdash \left| \begin{matrix} \delta \\ \alpha \end{matrix} \left(\begin{matrix} \frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, \alpha_\beta) \\ f(\delta, \alpha) \end{matrix} \right. \right.$$

(78):

(78):

$F(\Gamma)$	$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, \Gamma_\beta)$
x	y
y	m

$$\vdash \quad \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta) \;\; \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(y_\gamma, m_\beta) \;\; \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \;\; \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, \mathfrak{a}_\beta) \;\; f(y, \mathfrak{a})$$

(110.

108

$$\vdash \quad \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(z_\gamma, v_\beta) \;\; f(y, v) \;\; \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(z_\gamma, y_\beta)$$

(25):

a	$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(z_\gamma, v_\beta)$
c	$f(y, v)$
d	$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(z_\gamma, y_\beta)$
b	$\top \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(v_\gamma, z_\beta)$

$$\vdash \quad \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(z_\gamma, v_\beta) \;\; \top \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(v_\gamma, z_\beta) \;\; f(y, v) \;\; \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(z_\gamma, y_\beta)$$

(111.

Ecco ora la derivazione della (111) a parole.

Se y appartiene alla f-successione che inizia con z, allora, in base alla (108), ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su y appartiene alla f-successione che inizia con z.

Di conseguenza ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su y appartiene allora alla f-successione che inizia con z, oppure precede z nella f-successione.

Quindi:

Se y appartiene alla f-successione che inizia con z, allora ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su y appartiene alla f-succes-

sione che inizia con z oppure precede z nella f-successione.

105

$$\vdash \left[\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta) \;\text{ se } (z \equiv x) \text{ e } \neg \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta) \right]$$

(11):

a	$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta)$
b	$(z \equiv x)$
c	$\neg \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta)$

$$\vdash \left[\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta) \;\text{ se } (z \equiv x) \right] \tag{112}$$

(7):

a	$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta)$
b	$(z \equiv x)$
c	$\neg \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(z_\gamma, x_\beta)$
d	$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(z_\gamma, x_\beta)$

$$\vdash \left[\left[\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta) \text{ se } \neg \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(z_\gamma, x_\beta) \text{ se } \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(z_\gamma, x_\beta) \right] \text{ se } \left[(z \equiv x) \text{ se } \neg \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(z_\gamma, x_\beta) \text{ se } \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(z_\gamma, x_\beta) \right] \right] \tag{113}$$

(104)::

x	z
z	x

$$\vdash \left[\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta) \text{ se } \neg \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(z_\gamma, x_\beta) \text{ se } \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(z_\gamma, x_\beta) \right] \tag{114}$$

La derivazione a parole della (114) è la seguente:
x appartenga alla f-successione che inizia con z.

Allora, in base alla (104), z coincide con x; oppure x segue z nella f-successione.
Se z coincide con x, allora, in base alla (112), z appartiene alla f-successione che inizia con x.

Dalle due ultime proposizioni segue: z appartiene alla f-successione che inizia con x; oppure x segue z nella f-successione.
Di conseguenza:

Se x appartiene alla f-successione che inizia con z, allora z appartiene alla f-successione che inizia con x; oppure x segue z nella f-successione.

31. Univocità di un procedimento. Spiegazione e conseguenze

$$\Vdash \left[\left(\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\,\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\,\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} (\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{e}) \\ f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \\ f(\mathfrak{d}, \mathfrak{e}) \end{array} \right) \equiv \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}}\, f(\delta, \varepsilon) \right] \qquad (115.$$[1]

Traduco

$$\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}}\, f(\delta, \varepsilon)$$

con queste parole: "la circostanza che il procedimento f è univoco".
Allora la (115) può venire cosí rienunciata:

Se dalla circostanza che $\mathfrak{e}$ *risulta da un'applicazione del procedimento f su* $\mathfrak{d}$ *si può dedurre, qualunque sia* $\mathfrak{d}$, *che ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su* $\mathfrak{d}$ *coincide con* $\mathfrak{e}$,
allora dico:

"*il procedimento f è univoco*".

$$115 \qquad \vdash \left[\left(\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\,\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\,\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} (\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{e}) \\ f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \\ f(\mathfrak{d}, \mathfrak{e}) \end{array} \right) \equiv \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}}\, f(\delta, \varepsilon) \right]$$

(68): ———————————————

[1] Si confronti il paragrafo 24.

(68):

$f(\Gamma)$ | $\mathfrak{d}$ $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \equiv \Gamma)$, $f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$, $f(\mathfrak{d}, \Gamma)$
b | $\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{I}} f(\delta, \varepsilon)$
c | x
$\mathfrak{a}$ | $\mathfrak{e}$

$\vdash$ $\mathfrak{d}$ $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \equiv x)$
$f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$
$f(\mathfrak{d}, x)$
$\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{I}} f(\delta, \varepsilon)$ (116.

(9):

b | $\mathfrak{d}$ $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \equiv x)$, $f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$, $f(\mathfrak{d}, x)$
c | $\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{I}} f(\delta, \varepsilon)$
a | $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \equiv x)$, $f(y, \mathfrak{a})$, $f(y, x)$

$\vdash$ $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \equiv x)$
$f(y, \mathfrak{a})$
$f(y, x)$
$\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{I}} f(\delta, \varepsilon)$
$\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \equiv x)$
$f(y, \mathfrak{a})$
$f(y, x)$
$\mathfrak{d}$ $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \equiv x)$
$f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$
$f(\mathfrak{d}, x)$ (117.

(58)::

$\mathfrak{a}$ | $\mathfrak{d}$
$f(\Gamma)$ | $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \equiv x)$, $f(\Gamma, \mathfrak{a})$, $f(\Gamma, x)$
c | y

$\vdash$ $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \equiv x)$
$f(y, \mathfrak{a})$
$f(y, x)$
$\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{I}} f(\delta, \varepsilon)$ (118.

(19):

(19):

b | $\smile^{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a} \equiv x)$
  $f(y, \mathfrak{a})$
c | $f(y, x)$
d | $\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{I}} f(\delta, \varepsilon)$
a | $(a \equiv x)$
  $f(y, a)$

$\vdash$ $(a \equiv x)$
$f(y, a)$
$f(y, x)$
$\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{I}} f(\delta, \varepsilon)$
$(a \equiv x)$
$f(y, a)$
$\smile^{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a} \equiv x)$
$f(y, \mathfrak{a})$

(119.

(58)::

$f(\Gamma)$ | $(\Gamma \equiv x)$
  $f(y, \Gamma)$
c | a

$\vdash$ $(a \equiv x)$
$f(y, a)$
$f(y, x)$
$\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{I}} f(\delta, \varepsilon)$

(120.

(20):

b | $(a \equiv x)$
c | $f(y, a)$
d | $f(y, x)$
e | $\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{I}} f(\delta, \varepsilon)$
a | $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\widehat{\smile}}} (x_{\gamma}, a_{\beta})$

$\vdash$ $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\widehat{\smile}}} f(x_{\gamma}, a_{\beta})$
$f(y, a)$
$f(y, x)$
$\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{I}} f(\delta, \varepsilon)$
$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\widehat{\smile}}} f(x_{\gamma}, a_{\beta})$
$(a \equiv x)$

(121.

(112)::

(112)::

$z \mid a$

$\vdash$ $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\smile}}} f(x_\gamma, a_\beta)$

$f(y, a)$

$f(y, x)$

$\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$

(122.

122

$a \mid \mathfrak{a}$

$\vdash$ $\mathfrak{a}$ $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\smile}}} f(x_\gamma, \mathfrak{a}_\beta)$

$f(y, \mathfrak{a})$

$f(y, x)$

$\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$

(19):

b | $\mathfrak{a}$ $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\smile}}} f(x_\gamma, \mathfrak{a}_\beta)$

$f(y, \mathfrak{a})$

c | $f(y, x)$

d | $\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$

a | $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\smile}}} f(x_\gamma, m_\beta)$

$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(y_\gamma, m_\beta)$

$\vdash$ $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\smile}}} f(x_\gamma, m_\beta)$

$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(y_\gamma, m_\beta)$

$f(y, x)$

$\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$

$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, m_\beta)$

$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(y_\gamma, m_\beta)$

$\mathfrak{a}$ $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\widetilde{\smile}}} f(x_\gamma, \mathfrak{a}_\beta)$

$f(y, \mathfrak{a})$

(123.

(110)::

(110)::

$$\vdash \begin{cases} \mathop{\sim}\limits_{\beta}^{\gamma} f(x_\gamma, m_\beta) \\ \mathop{\sim}\limits_{\beta}^{\gamma} f(y_\gamma, m_\beta) \\ f(y, x) \\ \mathop{I}\limits_{\varepsilon}^{\delta} f(\delta, \varepsilon) \end{cases}$$

(124.

Facciamo seguire la derivazione a parole delle formule (122) e (124).

Sia x il risultato di un'applicazione del procedimento univoco f su y.

Allora, in base alla (120), ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su y coincide con x.

Perciò, in base alla (112), ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su y appartiene alla f-successione che inizia con x.

Quindi:

Se x è il risultato di un'applicazione del procedimento univoco f su y, allora ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su y appartiene alla f-successione che inizia con x (formula 122).

Supponiamo ora che m segua y nella f-successione. Allora risulta, dalla (110):

se ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su y appartiene alla f-successione che inizia con x, allora m appartiene alla f-successione che inizia con x.

Questo, collegato con la (122) mostra che

se x è il risultato di un'applicazione del procedimento univoco f su y, m appartiene alla f-successione che inizia con x.

Quindi:

Se x è il risultato di un'applicazione del procedimento univoco f su y, e se m segue y nella f-successione, allora m appartiene alla f-successione che inizia con x (formula 124).

124

$$\vdash \;\; \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta)$$
$$\quad \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(y_\gamma, m_\beta)$$
$$\quad f(y, x)$$
$$\quad \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$$

(20):

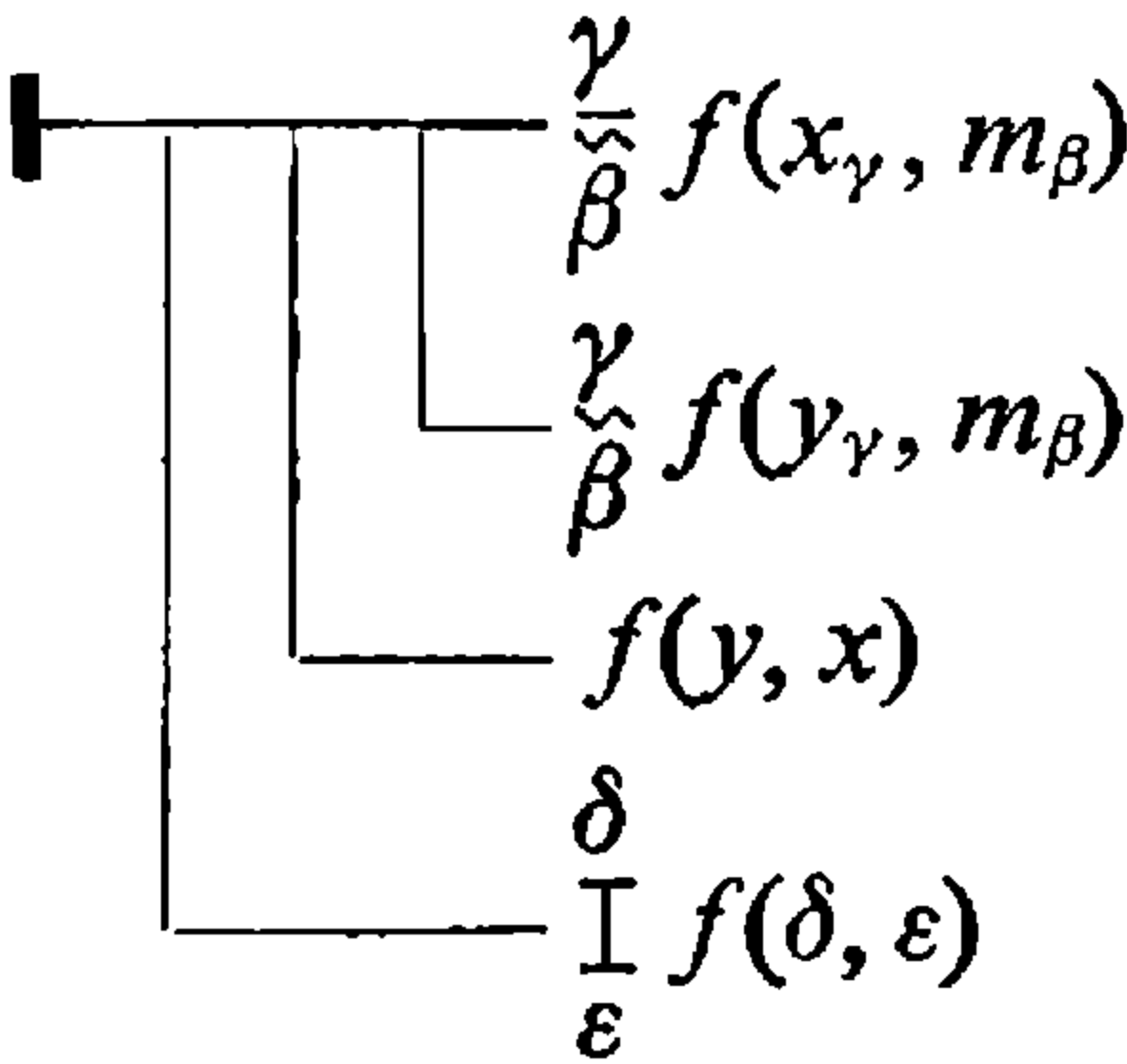
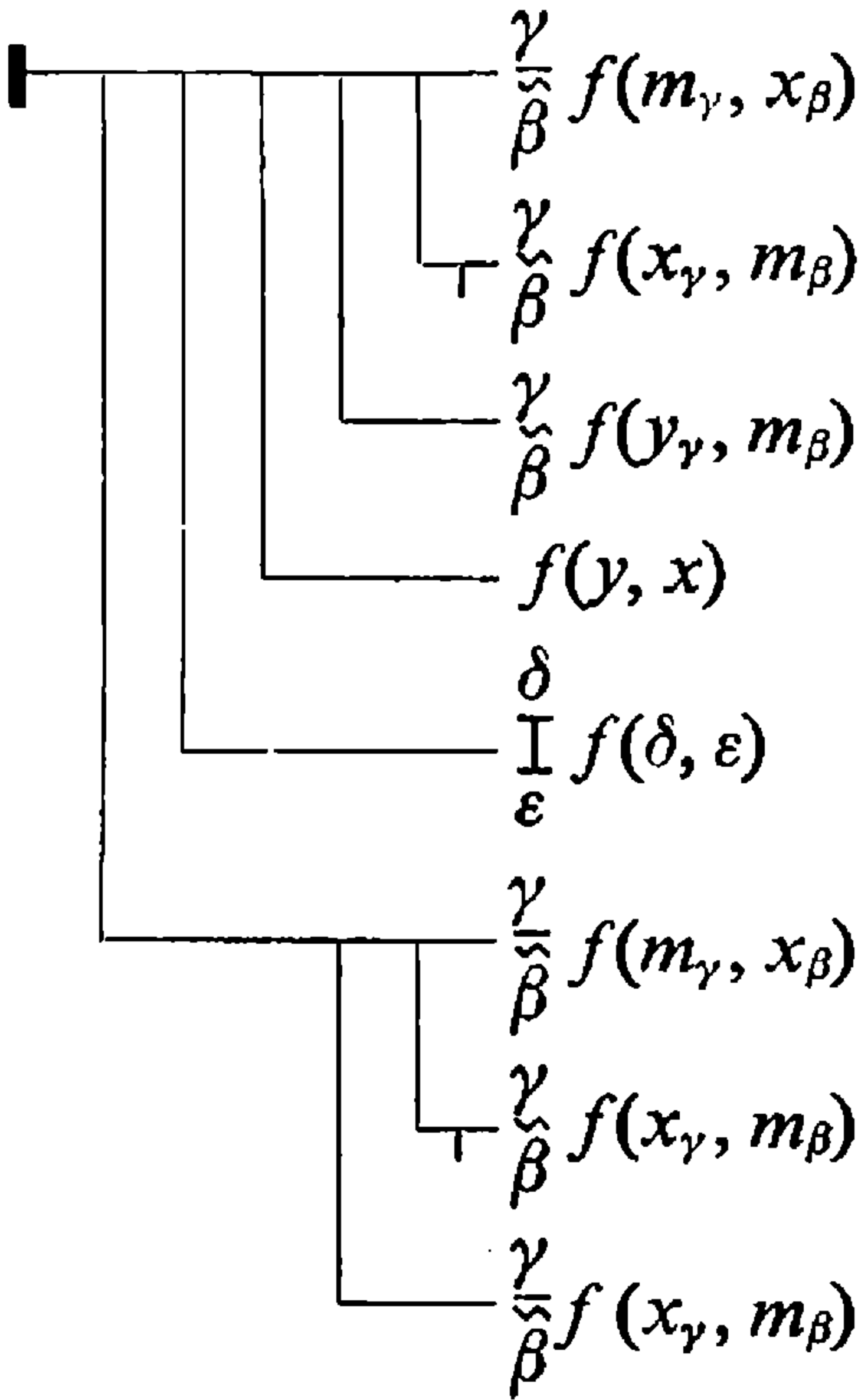
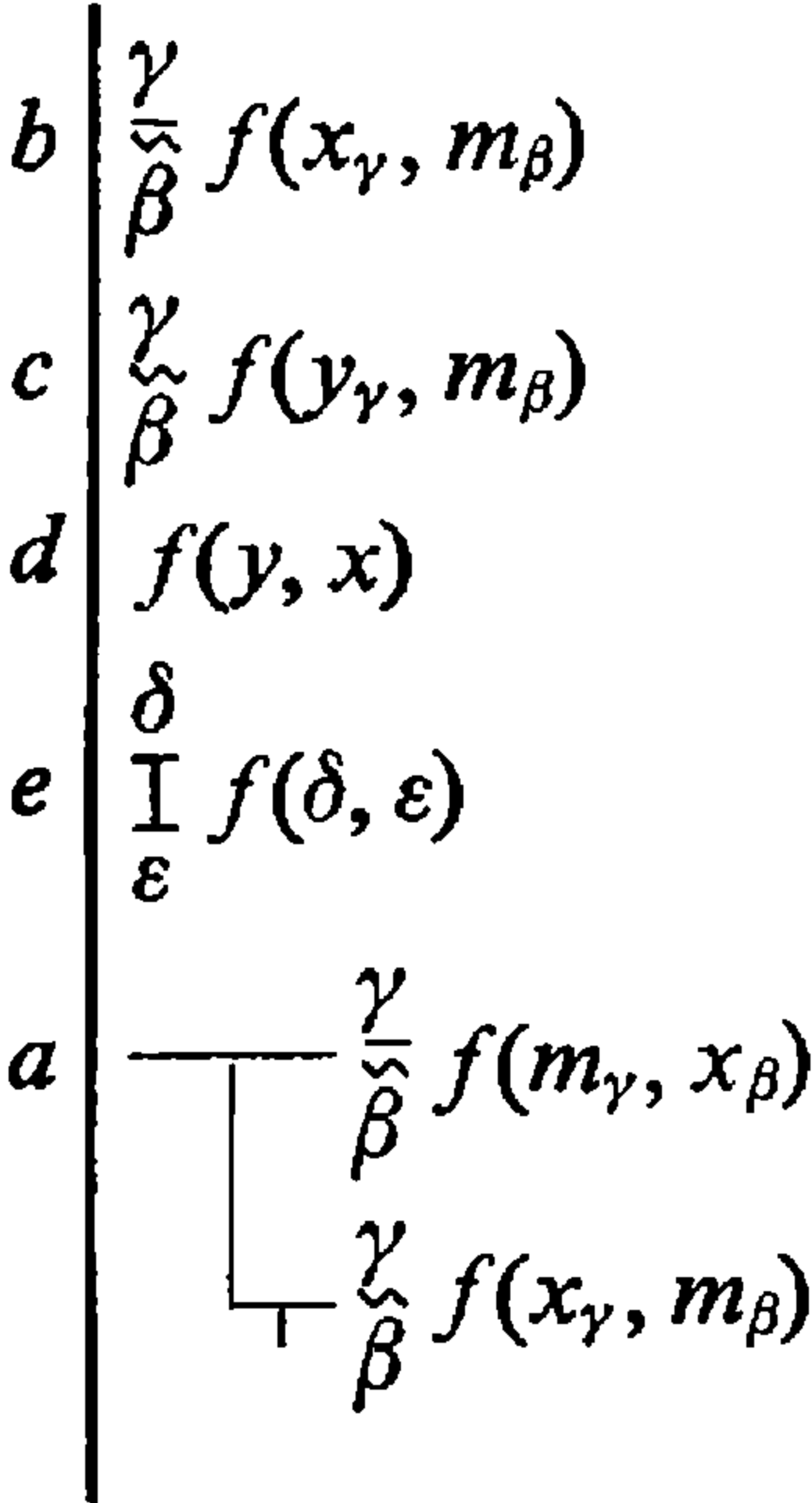
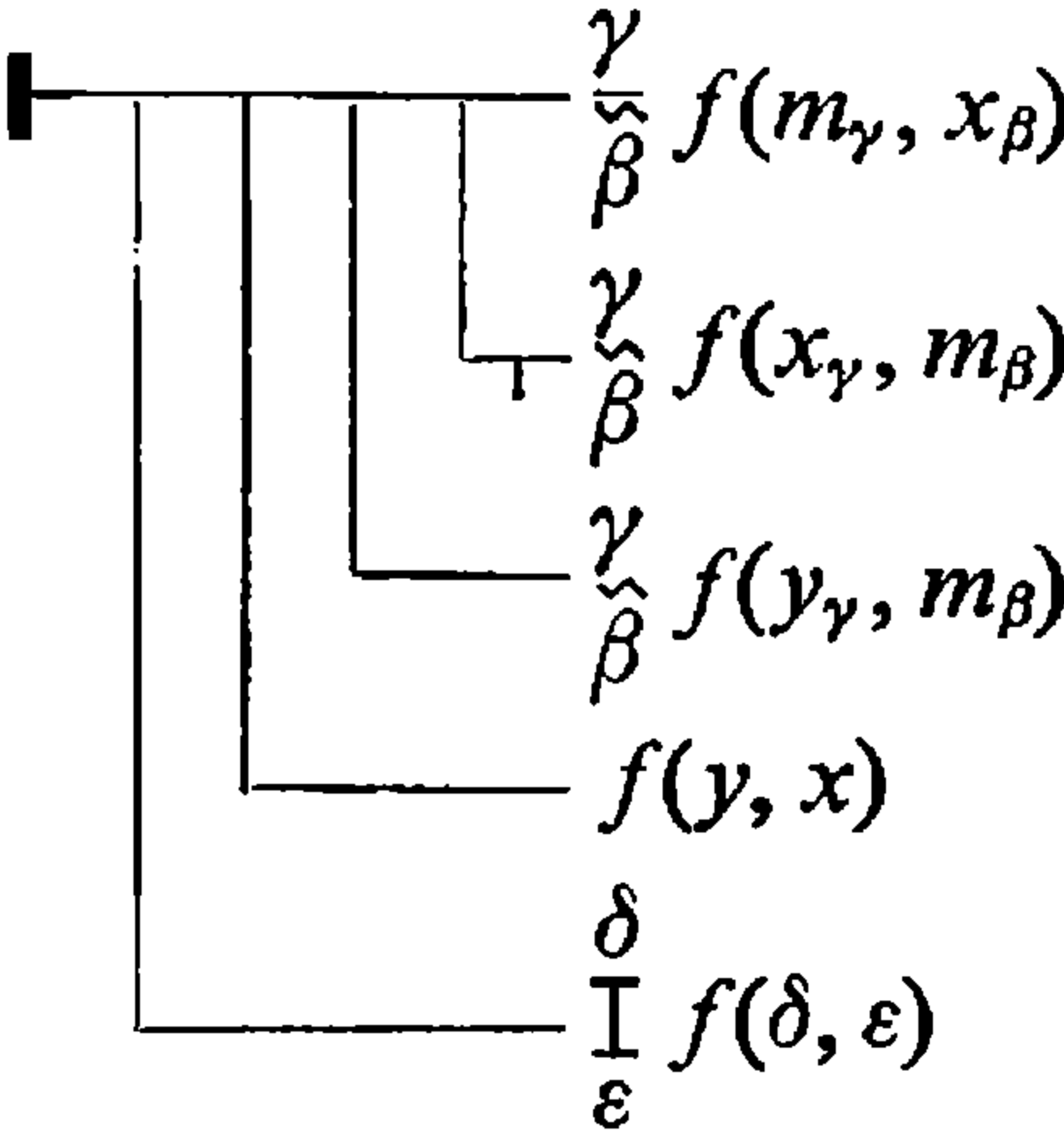
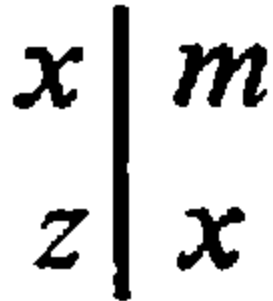
b	$\frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta)$
c	$\frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(y_\gamma, m_\beta)$
d	$f(y, x)$
e	$\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$
a	$\frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, x_\beta)$; $\top \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta)$

$$\vdash \;\; \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, x_\beta)$$
$$\quad \top \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta)$$
$$\quad \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(y_\gamma, m_\beta)$$
$$\quad f(y, x)$$
$$\quad \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$$
$$\quad \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, x_\beta)$$
$$\quad \top \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta)$$
$$\quad \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta)$$

(125.

(114)::

x	m
z	x

$$\vdash \;\; \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(m_\gamma, x_\beta)$$
$$\quad \top \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta)$$
$$\quad \frac{\gamma}{\widetilde{\beta}} f(y_\gamma, m_\beta)$$
$$\quad f(y, x)$$
$$\quad \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$$

(126.

Diamo qui di seguito la derivazione a parole di questa formula.

Sia x il risultato di un'applicazione del procedimento univoco f su y; m segua y nella f-successione.

Allora, in base alla (124), m appartiene alla f-successione che inizia con x. Di conseguenza, in base alla (114), x appartiene alla f-successione che inizia con m; oppure m segue x nella f-successione.

Questo si può anche esprimere dicendo:

x appartiene alla f-successione che inizia con m, oppure precede m nella f-successione.

Ne discende:

Se m segue y nella f-successione, e se il procedimento f è univoco, allora ogni risultato di un'applicazione del procedimento f su y appartiene alla f-successione che inizia con m, oppure precede m nella f-successione.

126

$$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\widetilde{\smile}}} f(m_\gamma, x_\beta)$$
$$\top\ \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, m_\beta)$$
$$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(y_\gamma, m_\beta)$$
$$f(y, x)$$
$$\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$$

(12): ——————

a $$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\widetilde{\smile}}} f(m_\gamma, x_\beta) \quad \top\ \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, m_\beta)$$
b $$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(y_\gamma, m_\beta)$$
c $$f(y, x)$$
d $$\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$$

$$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\widetilde{\smile}}} f(m_\gamma, x_\beta)$$
$$\top\ \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_\gamma, m_\beta)$$
$$f(y, x)$$
$$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(y_\gamma, m_\beta)$$
$$\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$$

(127.

(51): ——————

(51):

a | $\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(m_\gamma, x_\beta)$; $\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta)$; $f(y, x)$

c | $\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(y_\gamma, m_\beta)$

d | $\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$

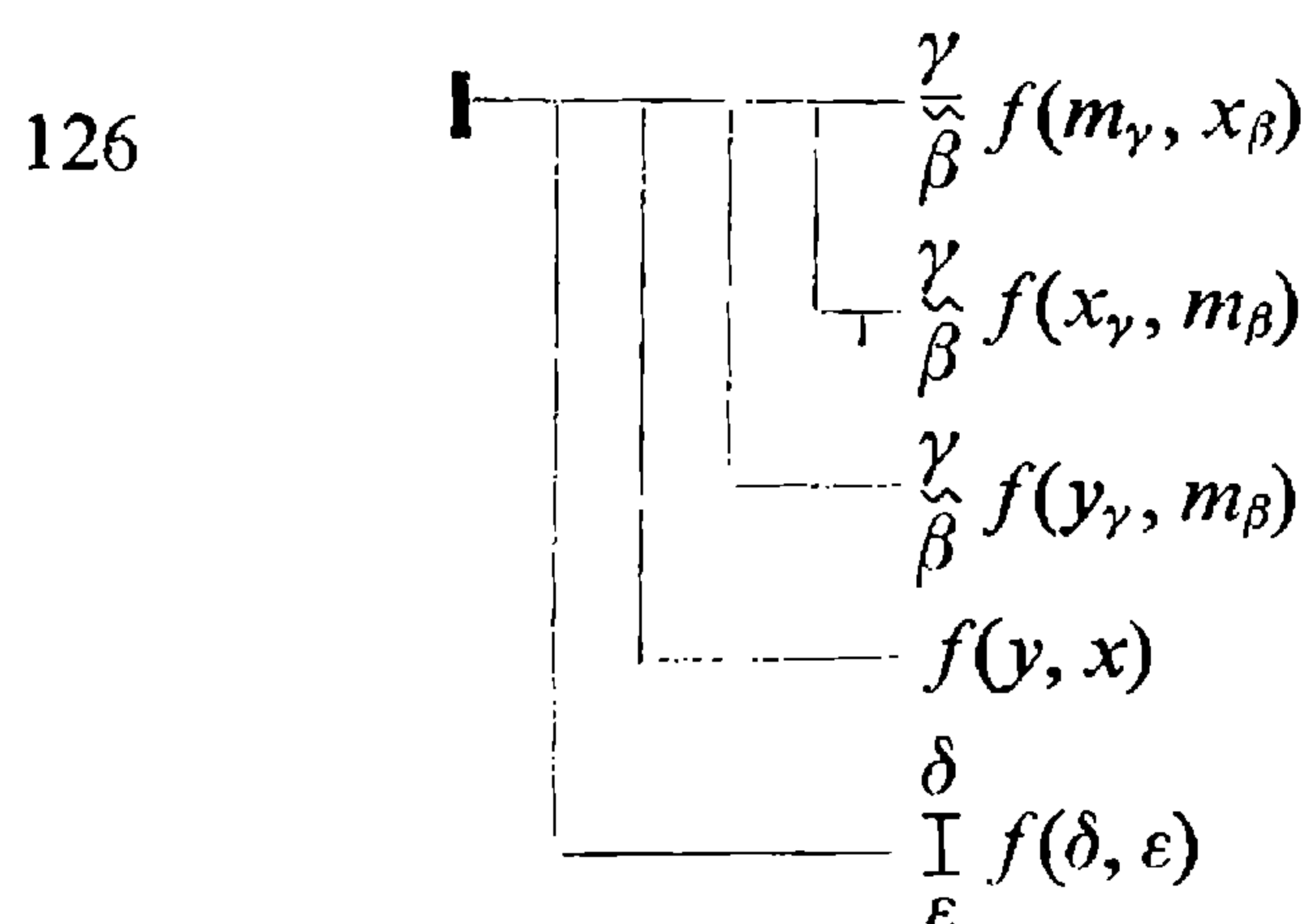
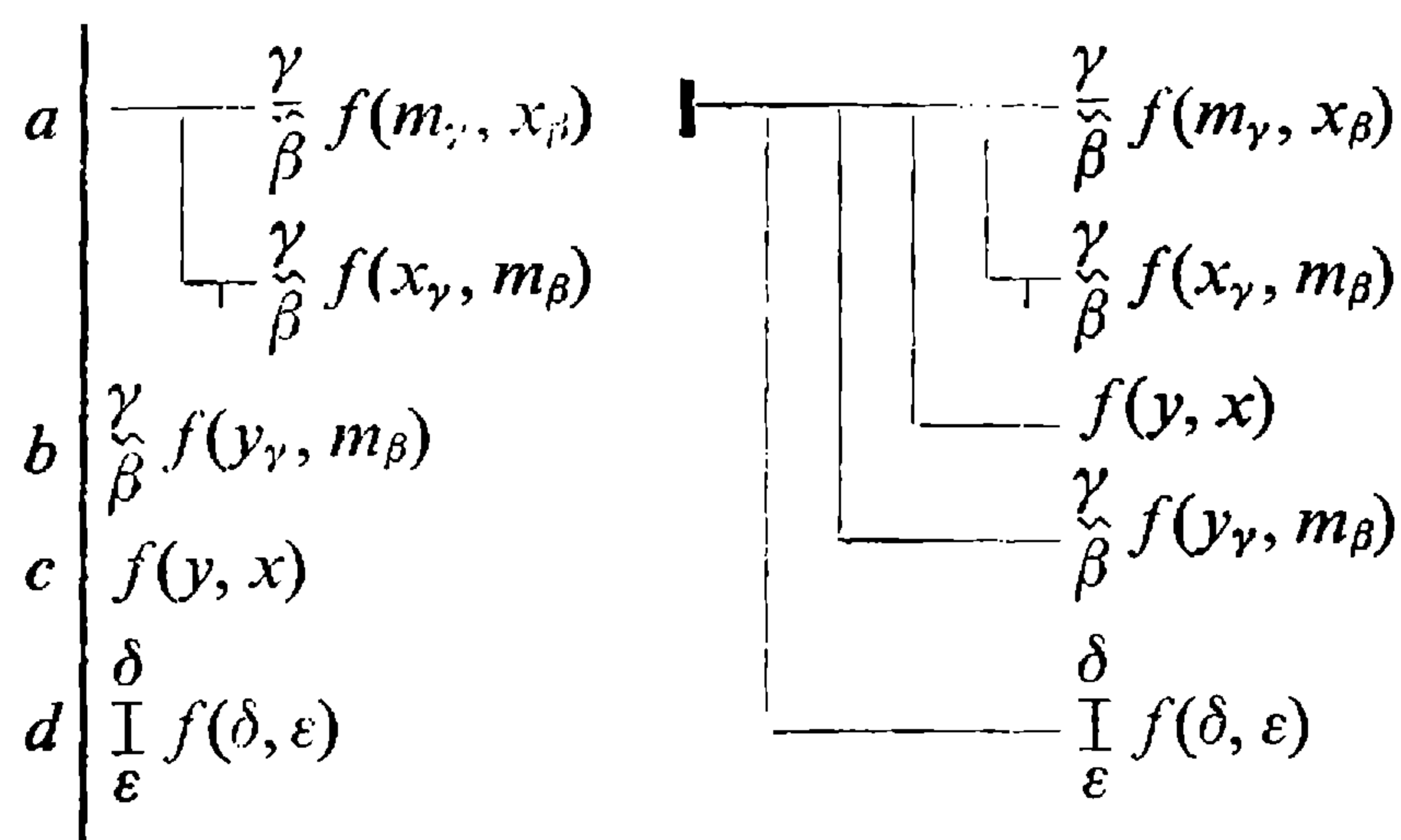
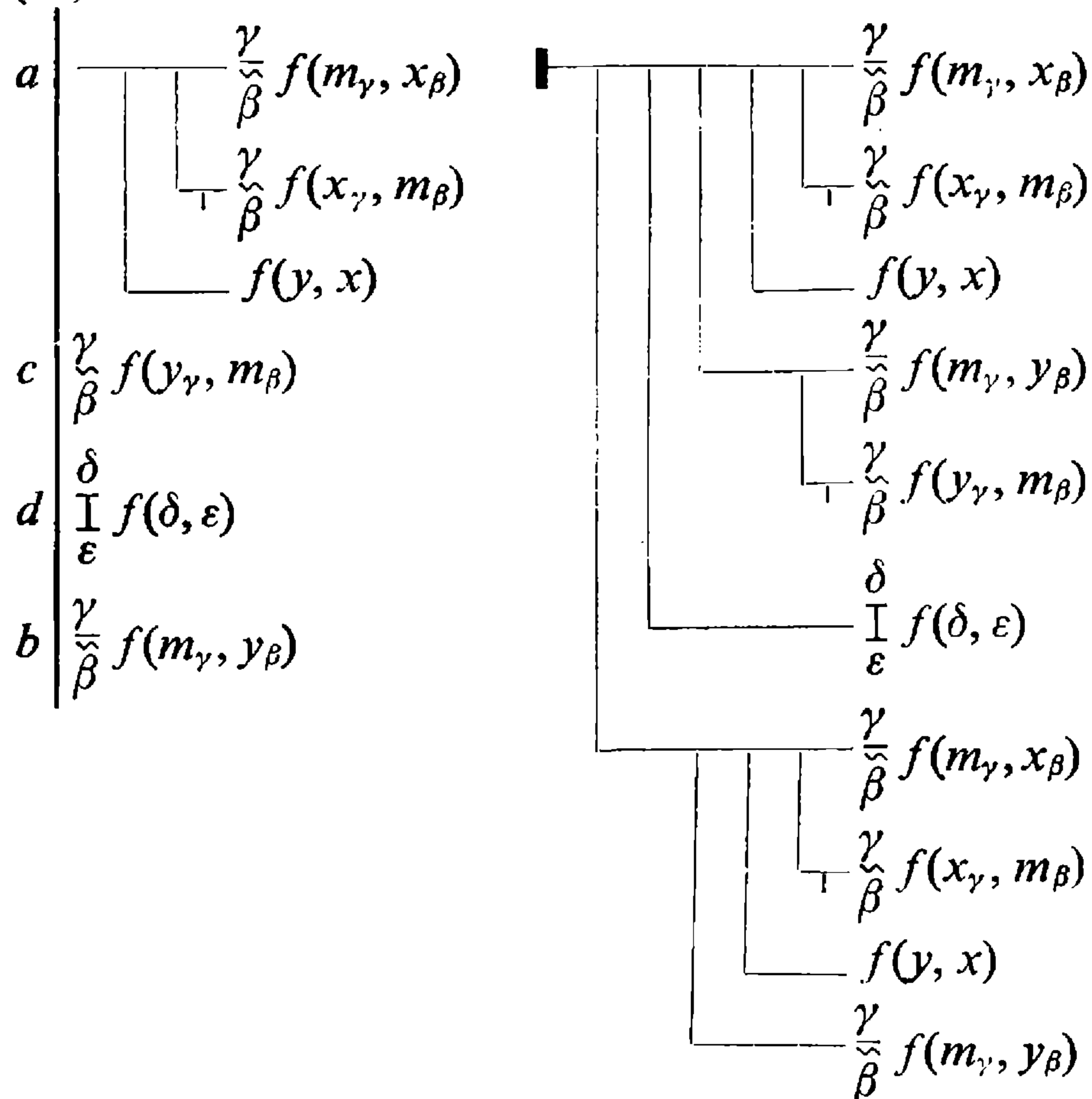
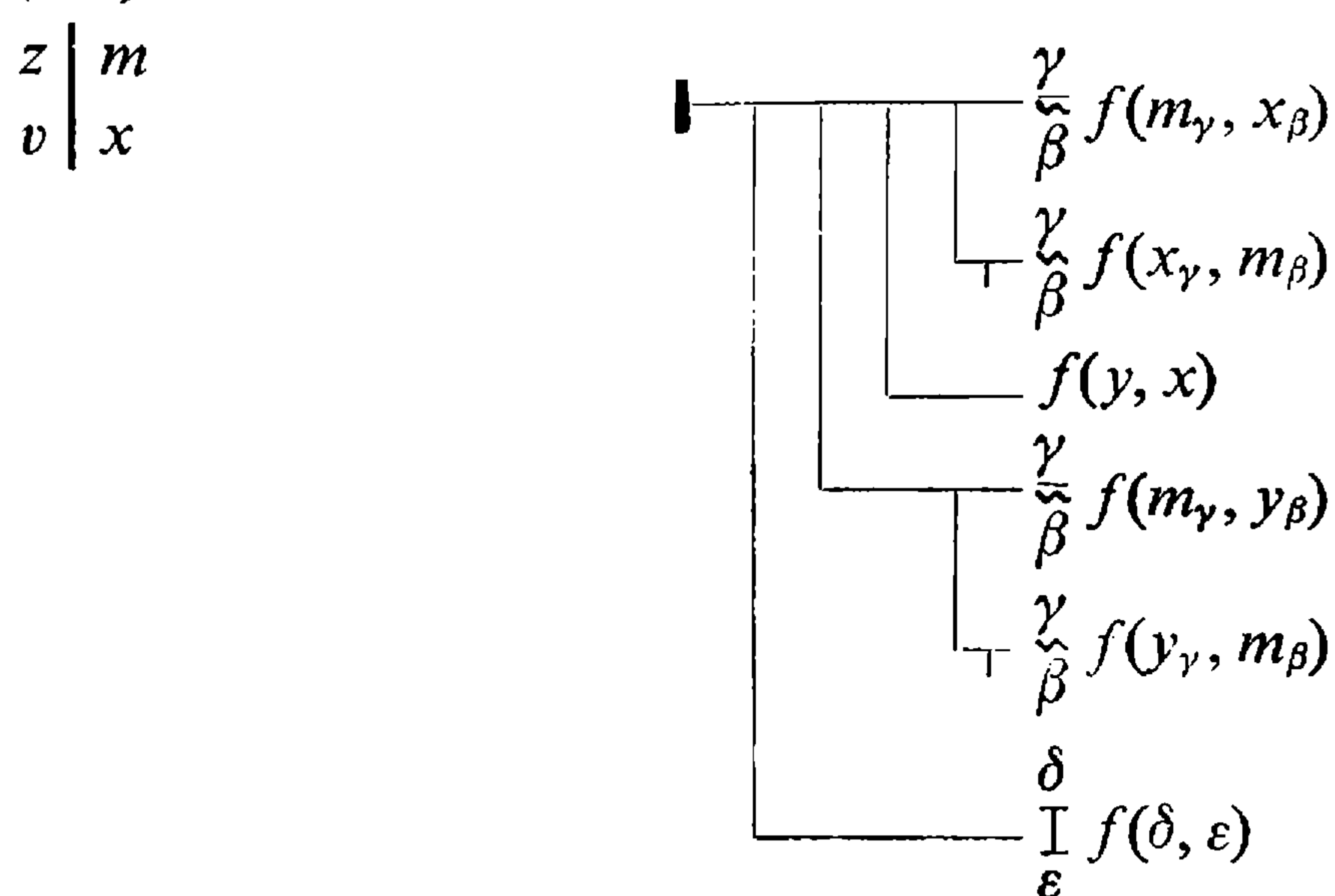
b | $\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(m_\gamma, y_\beta)$

$\vdash$ $\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(m_\gamma, x_\beta)$
$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta)$
$f(y, x)$
$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(m_\gamma, y_\beta)$
$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(y_\gamma, m_\beta)$
$\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$
$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(m_\gamma, x_\beta)$
$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta)$
$f(y, x)$
$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(m_\gamma, y_\beta)$

(128.

(111)::

z	m
v	x

$\vdash$ $\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(m_\gamma, x_\beta)$
$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, m_\beta)$
$f(y, x)$
$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(m_\gamma, y_\beta)$
$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(y_\gamma, m_\beta)$
$\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$

(129.

La (129), espressa in parole, suona cosí:

Se il procedimento f è univoco, e se y appartiene alla f-successione che inizia con m, oppure precede m nella f-successione, allora ogni risultato dell'applicazione del procedimento f su y appartiene alla f-successione che inizia con m, oppure precede m nella f-successione.

129

x	$\mathfrak{a}$
y	$\mathfrak{d}$

$\mathfrak{d}$ $\mathfrak{a}$

$\frac{\gamma}{\beta} f(m_\gamma, \mathfrak{a}_\beta)$

$\frac{\gamma}{\beta} f(\mathfrak{a}_\gamma, m_\beta)$

$f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$

$\frac{\gamma}{\beta} f(m_\gamma, \mathfrak{d}_\beta)$

$\frac{\gamma}{\beta} f(\mathfrak{d}_\gamma, m_\beta)$

$\frac{\delta}{\varepsilon} f(\delta, \varepsilon)$

(9):

b | $\mathfrak{d}$ $\mathfrak{a}$ $\frac{\gamma}{\beta} f(m_\gamma, \mathfrak{a}_\beta)$; $\frac{\gamma}{\beta} f(\mathfrak{a}_\gamma, m_\beta)$; $f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$; $\frac{\gamma}{\beta} f(m_\gamma, \mathfrak{d}_\beta)$; $\frac{\gamma}{\beta} f(\mathfrak{d}_\gamma, m_\beta)$

c | $\frac{\delta}{\varepsilon} f(\delta, \varepsilon)$

a | $\frac{\delta}{\alpha}$ ($\frac{\gamma}{\beta} f(m_\gamma, \alpha_\beta)$; $\frac{\gamma}{\beta} f(\alpha_\gamma, m_\beta)$; $f(\delta, \alpha)$)

$\frac{\delta}{\alpha}$ ($\frac{\gamma}{\beta} f(m_\gamma, \alpha_\beta)$; $\frac{\gamma}{\beta} f(\alpha_\gamma, m_\beta)$; $f(\delta, \alpha)$)

$\frac{\delta}{\varepsilon} f(\delta, \varepsilon)$

$\frac{\delta}{\alpha}$ ($\frac{\gamma}{\beta} f(m_\gamma, \alpha_\beta)$; $\frac{\gamma}{\beta} f(\alpha_\gamma, m_\beta)$; $f(\delta, \alpha)$)

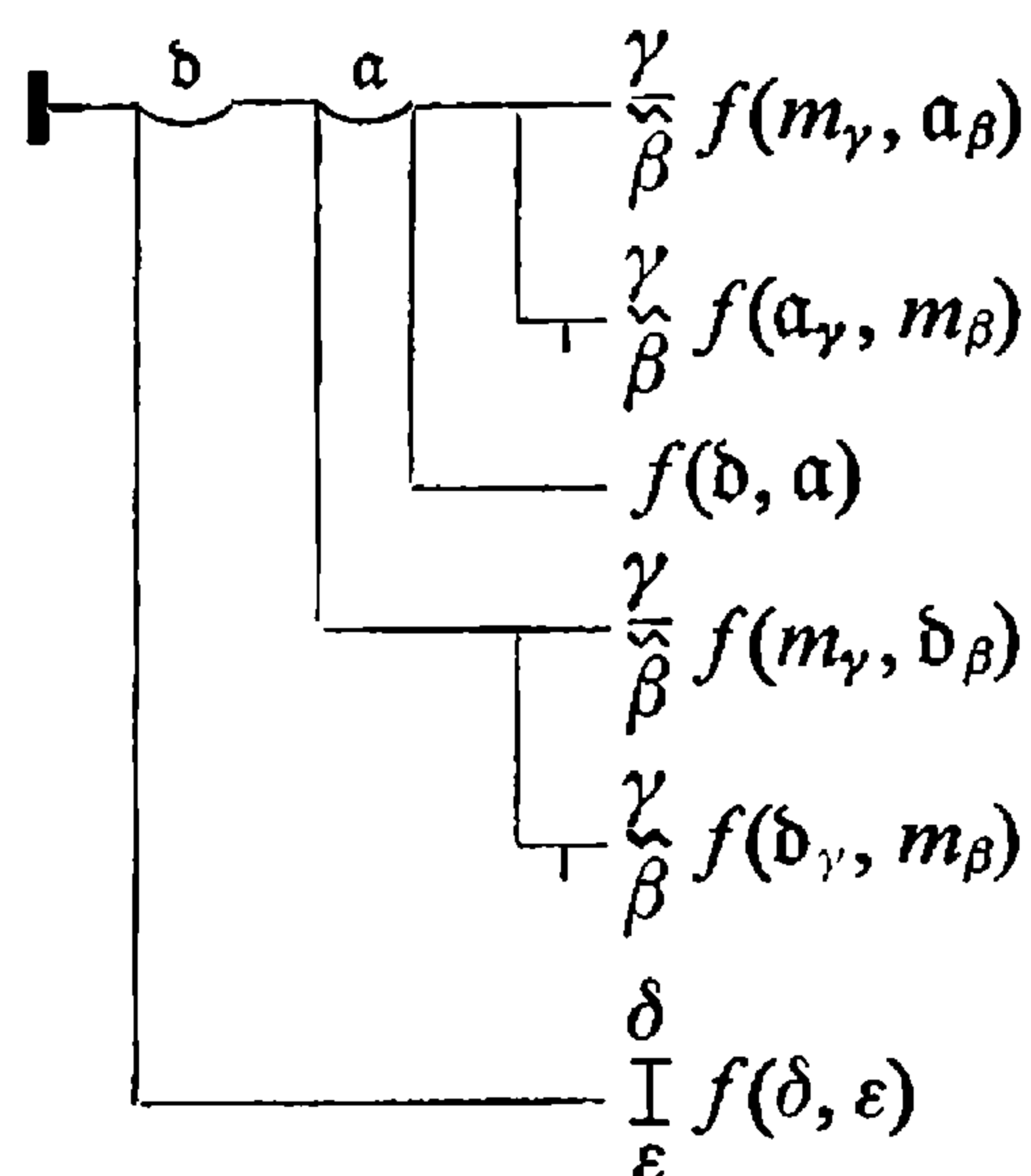
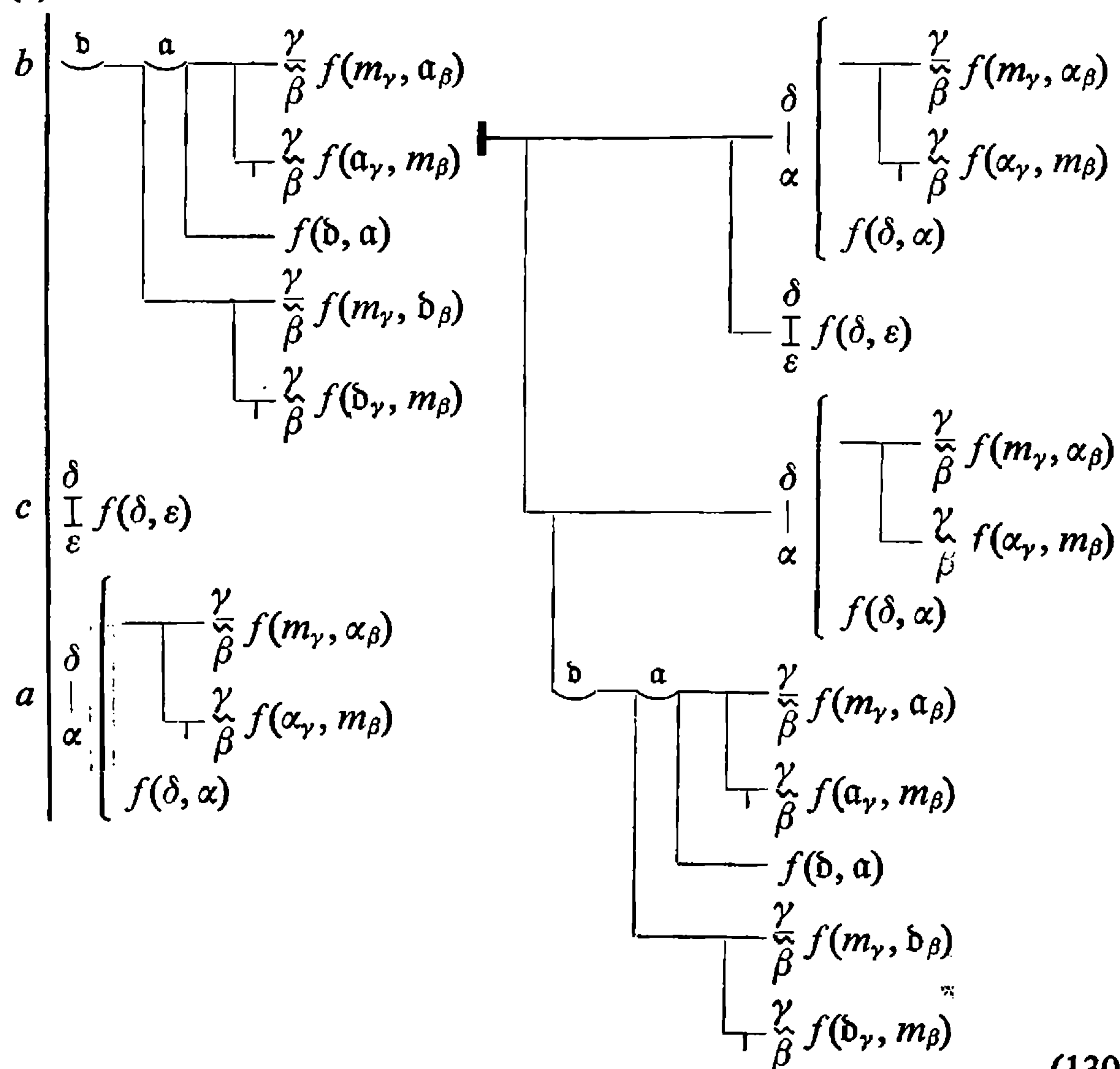
$\mathfrak{d}$ $\mathfrak{a}$

$\frac{\gamma}{\beta} f(m_\gamma, \mathfrak{a}_\beta)$

$\frac{\gamma}{\beta} f(\mathfrak{a}_\gamma, m_\beta)$

$f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$

$\frac{\gamma}{\beta} f(m_\gamma, \mathfrak{d}_\beta)$

$\frac{\gamma}{\beta} f(\mathfrak{d}_\gamma, m_\beta)$

(130.

(75)::

(75)::

$$
F(\Gamma)\left|\begin{array}{l}
\frac{\gamma}{\beta} f(m_{\gamma}, \Gamma_{\beta}) \\
\frac{\gamma}{\beta} f(\Gamma_{\gamma}, m_{\beta})
\end{array}\right.
\qquad
\vdash \begin{array}{l}
\overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}}\left|\begin{array}{l}
\frac{\gamma}{\beta} f(m_{\gamma}, \alpha_{\beta}) \\
\frac{\gamma}{\beta} f(\alpha_{\gamma}, m_{\beta}) \\
f(\delta, \alpha)
\end{array}\right. \\
\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{I}} f(\delta, \varepsilon)
\end{array}
$$

(131.

ossia, a parole:

Se il procedimento f è univoco, allora la proprietà di appartenere alla f-successione che inizia con m o di precedere m nella f-successione, è ereditaria nella f-successione.

131

$$
\vdash \begin{array}{l}
\overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}}\left|\begin{array}{l}
\frac{\gamma}{\beta} f(m_{\gamma}, \alpha_{\beta}) \\
\frac{\gamma}{\beta} f(\alpha_{\gamma}, m_{\beta}) \\
f(\delta, \alpha)
\end{array}\right. \\
\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{I}} f(\delta, \varepsilon)
\end{array}
$$

(9):

(9):

$$b \mid \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left[\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(m_\gamma, \alpha_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(\alpha_\gamma, m_\beta);\ f(\delta, \alpha) \right]$$

$$c \mid \overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{I}} f(\delta, \varepsilon)$$

$$a \mid \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(m_\gamma, y_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(y_\gamma, m_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, m_\beta)$$

$$\vdash \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(m_\gamma, y_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(y_\gamma, m_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, m_\beta);\ \overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{I}} f(\delta, \varepsilon);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(m_\gamma, y_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(y_\gamma, m_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, m_\beta);\ \overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}} \left[\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(m_\gamma, \alpha_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(\alpha_\gamma, m_\beta);\ f(\delta, \alpha) \right]$$

(132.

(83)::

$$g(\Gamma) \mid \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(m_\gamma, \Gamma_\beta)$$

$$h(\Gamma) \mid \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(\Gamma_\gamma, m_\beta)$$

$$\vdash \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(m_\gamma, y_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(y_\gamma, m_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta);\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, m_\beta);\ \overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{I}} f(\delta, \varepsilon)$$

(133.

A parole questa proposizione suona:

Se il procedimento f è univoco e se m e y seguono x nella f-successione, allora y appartiene alla f-successione che inizia con m oppure precede m nella f-successione.

Faccio seguire una tavola dalla quale si può vedere in quali occorrenze si è fatto uso di una determinata formula per derivarne un'altra. Ci si può servire di essa per riscontrare i modi di applicazione di una formula. Da essa si può anche riconoscere la frequenza di applicazione di una formula.

A destra della riga sta sempre il numero della formula per la cui derivazione è impiegata quella indicata a sinistra.

1	3	5	80	9	61	18	51	32	33	52	57
1	5	5	90	9	117	18	64	33	34	52	89
1	11	6	7	9	130	18	82	33	46	52	105
1	24	7	32	9	132	19	20	34	35	53	55
1	26	7	67	10	30	19	21	34	36	53	75
1	27	7	94	11	112	19	71	35	40	53	92
1	36	7	107	12	13	19	86	36	37	54	55
2	3	7	113	12	15	19	103	36	38	55	56
2	4	8	9	12	16	19	119	36	83	55	104
2	39	8	10	12	24	19	123	37	106	56	57
2	73	8	12	12	35	20	121	38	39	57	68
2	79	8	17	12	49	20	125	39	40	57	100
3	4	8	26	12	60	21	44	40	43	58	59
4	5	8	38	12	85	21	47	41	42	58	60
5	6	8	53	12	127	22	23	42	43	58	61
5	7	8	62	13	14	23	48	43	44	58	62
5	9	8	66	14	15	24	25	44	45	58	67
5	12	8	74	15	88	24	63	45	46	58	72
5	14	8	84	16	17	25	111	46	47	58	118
5	16	8	96	16	18	26	27	47	47	58	120
5	18	9	10	16	22	27	42	47	49	59	—
5	22	9	11	17	50	28	29	48	101	60	93
5	25	9	19	17	78	28	33	49	50	61	65
5	29	9	21	18	19	29	30	50	51	62	63
5	34	9	37	18	20	30	59	51	128	62	64
5	45	9	56	18	23	31	32	52	53	63	91

64	65	75	97	84	98	97	98	108	111	122	123
65	66	75	109	85	86	98	—	109	110	123	124
66	—	75	131	86	87	99	100	110	124	124	125
67	68	76	77	87	88	99	105	111	129	125	126
68	70	76	89	88	95	100	101	112	113	126	127
68	77	77	78	89	90	100	103	112	122	127	128
68	116	77	85	90	91	101	102	113	114	128	129
69	70	78	79	90	93	102	108	114	126	129	130
69	75	78	110	91	92	103	104	115	116	130	131
70	71	79	80	92	102	104	114	116	117	131	132
71	72	80	81	93	94	105	106	117	118	132	133
72	73	81	82	94	95	105	112	118	119	133	—
72	74	81	84	95	96	106	107	119	120		
73	87	82	83	96	97	107	108	120	121		
74	81	83	133	96	102	108	109	121	122		

PARTE SECONDA

I fondamenti dell'aritmetica

Una ricerca logico-matematica sul concetto di numero

1884

[La fredda accoglienza riservata dagli ambienti scientifici tedeschi all'*Ideografia* indusse Frege — dopo cinque anni impegnati soprattutto nel tentativo, rivelatosi infruttuoso, di diffondere la sua ideografia — a pubblicare le sue vedute fondamentali sull'aritmetica, esponendole in forma non simbolica nell'opera che costituisce la seconda parte del nostro volume. Neppur essa tuttavia riuscí a suscitare quell'interesse che il suo autore si riprometteva, se Frege scriverà nove anni piú tardi, nel primo volume dei *Princípi*: "Nello 'Jahresbericht über die Fortschritte der Mathematik' si cercherebbero invano i miei *Fondamenti dell'aritmetica*. Scienziati impegnati in ricerche consimili, come Dedekind, Stolz, Helmholtz, ignorano i miei lavori; né Kronecker li cita nei suoi articoli sul concetto di numero". Oggi la situazione è completamente mutata; già nel 1932 Zermelo, a proposito di questo breve opuscolo, affermava che esso è "quanto di piú bello e di piú chiaro sia stato finora pubblicato sul concetto di numero". E, dopo Zermelo, tutti i piú autorevoli studiosi di questi argomenti hanno riconosciuto nei *Fondamenti* un vero e proprio capolavoro di filosofia della scienza. Mentre infatti lo scopo precipuo dell'*Ideografia* — cioè la presentazione dell'ideografia — aveva fatto sí che i motivi piú propriamente filosofici del pensiero di Frege venissero in quell'opera sommariamente accennati nella prefazione, nei *Fondamenti* al contrario, accanto a un'ampia prospettiva storica, il momento filosofico della concezione freghiana dell'aritmetica si sviluppa parallelamente a quello piú specificamente matematico, e questo in realtà non prescinde mai da quello, sicché è impossibile tracciare fra essi una netta linea di demarcazione.

Purtuttavia, e a scopo puramente orientativo, si può pensare l'opera come composta da due parti, nella prima delle quali — estendentesi fino al paragrafo 44 — la componente storico-filosofica è in evidenza rispetto a quella matematica, mentre nella seconda — che occupa i successivi paragrafi fino all'86 — prevale una trattazione essenzialmente matematica. La suddivisione or ora accennata corrisponde altresí a un carattere "distruttivo" della prima parte, nella quale vengono discusse e confutate numerose interpretazioni delle leggi aritmetiche — particolarmente efficaci e interessanti l'opposizione all'empirismo matematico di John Stuart Mill e la critica all'interpretazione kantiana dei giudizi aritmetici come sintetici a priori — cui fa riscontro, nella seconda parte, il momento "costruttivo" dell'opera: in esso Frege, sulla scorta delle critiche precedenti, ribadisce la sua concezione del numero

quale ente essenzialmente oggettivo, interpreta l'attribuzione numerica come contenente un'affermazione intorno a un concetto (§ 46) e, delineata la sua teoria del concetto (§ 53), passa a definire il numero naturale come estensione (§ 68); introdotte quindi alcune definizioni particolari (§§ 75, 76, 77) enuncia infine (§ 78) sei proposizioni aritmetiche le quali, malgrado la loro apparente immediatezza, risultano ora suscettibili di una rigorosa dimostrazione logica.

Le pagine conclusive dell'opera, oltre a offrirci un rapido panorama delle discussioni e dei risultati precedenti, chiariscono il significato della fondazione freghiana dell'aritmetica, insistono sulla necessità di una lingua simbolica e sulla sua funzione, e contengono infine alcuni paragrafi nei quali si ha una prima formulazione della polemica contro gli indirizzi formali dell'aritmetica.

Queste nostre indicazioni schematiche verranno integrate dai chiarimenti orientativi conservati dalla prima edizione e premessi a ogni singolo capitolo dell'opera. Qui ci limitiamo a sottolineare come per il numero e l'importanza degli argomenti trattati, per il modo sereno ed equilibrato col quale sono condotte le critiche e per la limpida esposizione di aspetti fondamentali del sistema freghiano, i *Fondamenti* occupino una posizione affatto particolare nella pur copiosa produzione scientifica del logico tedesco; e in effetti tutte le opere piú significative del Frege posteriori ai *Fondamenti* — escluso forse il fondamentale studio *Senso e significato* — approfondiscono e sviluppano autonomamente argomenti almeno già delineati in modo sintetico nella sobria organicità di questa composizione.]

Introduzione

[Affiorano fin da queste prime pagine gli argomenti che saranno poi fondamentali in tutta l'opera: opposizione alle correnti psicologistiche, opposizione al formalismo puro di certi matematici, distinzione tra verità e pensiero, affermazione di una parentela molto stretta fra logica, filosofia e matematica. Per quanto riguarda il metodo seguito da Frege nello svolgimento della sua ricerca, sono importanti i tre canoni, esposti verso la fine della presente introduzione, in ispecie il secondo.]

Alla domanda, che cosa sia il numero uno, o che significhi il simbolo 1, riceviamo il piú delle volte questa risposta: "è una cosa". Se poi facciamo osservare che l'asserto

"Il numero uno è una cosa"

non può costituire una definizione, contenendo da una parte l'articolo determinato e dall'altra invece quello indeterminato, e inoltre facciamo osservare che esso ci enuncia soltanto l'appartenenza del numero uno al mondo delle cose, senza dirci che cosa effettivamente sia, è facile che ci sentiamo invitati dal nostro interlocutore a scegliere ad arbitrio un oggetto qualunque intorno a noi, e a dare senz'altro a esso il nome di "uno".

Sorge però una difficoltà: se ciascuno di noi avesse davvero il diritto di intendere sotto questo nome ciò che egli vuole, in tal caso le medesime proposizioni sull'unità avrebbero significati diversi per le diverse persone; non vi sarebbe cioè per esse alcun contenuto comune.

Taluni respingeranno forse la presente obiezione, osservando che, allo stesso modo, anche il significato della lettera *a* non può venir precisato nell'aritmetica; e che, se si cerca di spiegarlo dicendo "*a* significa un numero", si potrebbe rinvenire qui il medesimo errore che poco fa noi abbiamo preteso di trovare nella definizione "uno è una cosa".

Rispondiamo che è perfettamente giusto respingere l'anzidetta obiezione quando la si voglia riferire alla lettera *a*: questa lettera infatti non denota alcun numero determinato assegnabile, ma serve soltanto ad esprimere la generalità delle proposizioni. Se nella formula $a+a-a=a$, si sostituisce ad *a* un numero qualunque, purché sempre il medesimo, si ottiene in ogni caso un'uguaglianza vera. Proprio questo è il senso della lettera *a*. Ma per il termine uno le cose stanno in maniera totalmente diversa. E invero, è forse possibile, nell'uguaglianza $1+1=2$, sostituire ambe le volte ad 1 lo stesso oggetto, per esempio la luna? No certamente; qui pare invece necessario sostituire al primo 1 qualche oggetto diverso che al secondo. Da cosa dipende dunque, che nel caso presente si debba proprio fare ciò che, nel caso della lettera *a*, sarebbe stato un errore? Altra osservazione: nell'aritmetica non basta la sola lettera *a* per esprimere in generale i rapporti fra i diversi numeri; com'è noto, essa deve infatti usarne ancora altre, *b*, *c*, ecc., con funzioni e proprietà analoghe a quelle di *a*. Se dunque il numero 1 non avesse altro compito che quello di procurare generalità alle nostre proposizioni, anch'esso dovrebbe mostrarsi, proprio come *a*, non sufficiente al suo scopo. Sta invece il fatto, che il numero 1 si presenta come un oggetto perfettamente determinato, cui possiamo assegnare certe proprietà specifiche [1]: quella, per esempio, di rimanere immutato se lo si moltiplica per sé stesso. È impossibile indicare qualche proprietà di *a* che valga in questo medesimo senso. Infatti: ciò che si enuncia di *a* è una proprietà comune a tutti i numeri, mentre ciò che si enuncia del numero 1 — poniamo, $1^2=1$ — non denota alcuna proprietà di tutti gli oggetti; non ci dice nulla, per esempio, né della luna, né del sole, né del Sahara, né del Picco della Teneriffa (qual senso potrebbe invero possedere un tal enunciato, se riferito a questi oggetti?).

È certo che anche la maggioranza dei matematici non ha pronta alcuna risposta soddisfacente a questo tipo di domande. Eppure, non è vergognoso per la scienza di essere tanto all'oscuro su di un oggetto che le sta cosí vicino e che pare cosí semplice? Né vi è da farsi illusioni: non sapendo definire il numero uno, tanto meno si saprà dire che cosa sia un intero in generale. Orbene, se un concetto, che sta alla base di

[1] [Queste proprietà distinguono 1 dagli altri numeri 2, 3, ecc., mentre non esistono proprietà che, in aritmetica, possano distinguere la lettera *a* da *b*, *c*, ecc.]

una grande scienza come l'aritmetica, presenta in sé tante difficoltà, va certo considerato nostro imprescindibile dovere quello di fare tutto il possibile per esaminarlo con maggior precisione e dirimere queste difficoltà. Tanto piú che riuscirà ben difficile spiegare con perfetta chiarezza i numeri negativi, i frazionari e i complessi, se non si è fatta luce completa sul fondamento stesso dell'intero edificio aritmetico.

Molti penseranno che non valga la pena di accingersi a questo studio. Il concetto di numero intero si trova già, secondo essi, sufficientemente spiegato nei trattati elementari, e ivi risolto una volta per sempre. Chi potrebbe credere, infatti, di poter imparare ancora qualcosa di nuovo intorno a un oggetto cosí semplice? In realtà lo si ritiene cosí privo di difficoltà, che si pensa di poterlo esporre agli stessi fanciulli in forma scientificamente esauriente, e si pensa che chiunque sia in grado di raggiungere una conoscenza perfetta e definitiva di esso, senza bisogno di ulteriori ricerche e senza chiedersi che ne pensino gli altri. Cosí viene a mancare la prima condizione per poter imparare: vale a dire "sapere di non sapere". Il risultato è che ci si accontenta ancor oggi di una concezione assai grossolana del numero intero, sebbene già Herbart ne abbia insegnata una piú esatta.[1]

È desolante e scoraggiante che, in questo modo, minacci di andar nuovamente perduta una conoscenza a cui si era già pervenuti, e sembri diventare infruttuoso un non piccolo lavoro, solo perché, per effetto di una illusoria ricchezza, si ritiene di poter fare a meno dei suoi risultati. Anche il presente studio, io me ne rendo ben conto, è esposto al medesimo pericolo. Ne ostacola la comprensione quella rozza concezione che vede nel contare una forma di pensiero associativo e meccanico.[2] Io pongo in dubbio che possa esistere, in generale, una forma siffatta di pensiero. Si potrebbe forse ammettere con minor difficoltà una rappresentazione associativa; ma essa risulta priva di significato per il contare. Il pensiero è ovunque essenzialmente lo stesso: non si può parlare di leggi diverse del pensiero a seconda dell'oggetto pensato. Le differenze consistono soltanto nella maggiore o minore purezza,

[1] J. F. HERBART, *Umriss pädagogischer Vorlesungen* [Compendio di lezioni di pedagogia] (1835), § 252: "Due non denota due cose, ma denota il raddoppiamento, ecc."

[2] K. FISCHER, *System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre* [Sistema della logica e della metafisica ossia teoria della scienza], § 94.

nella maggiore o minore indipendenza dagli influssi psicologici e dagli strumenti esterni del pensiero (come lingua, segni numerici, ecc.), e infine nella finezza della costruzione dei concetti; ma proprio sotto questo riguardo, non sembra che la matematica possa venir superata da alcuna scienza, nemmeno dalla stessa filosofia.

Il presente studio mostrerà che anche un ragionamento come quello per passare da n a $n+1$, in apparenza caratteristico per la matematica, riposa su leggi logiche generali e non necessita di alcuna legge speciale del pensiero associativo. Senza dubbio è possibile fare un uso meccanico dei segni numerici, come è possibile parlare come un pappagallo; ma ciò non può venir chiamato pensiero. È possibile invece un'altra cosa e cioè che, una volta costruita da un essere pensante la lingua simbolica della matematica, essa — come suol dirsi — pensi per noi. Ciò non prova tuttavia che i numeri risultino formati in modo particolarmente meccanico, come i mucchi di sabbia sono formati da granelli di quarzo. Io penso che sia nell'interesse dei matematici opporsi a questo modo di intendere, che mira a denigrare uno fra gli oggetti principali della loro scienza e quindi a svalutare la loro scienza stessa. Il fatto è, però, che anche fra i matematici si incontrano spesso opinioni siffatte. Al contrario, noi mostreremo la necessità di attribuire al concetto di numero una struttura piú fine che alla maggior parte dei concetti delle altre scienze, sebbene si tratti pur sempre di uno dei concetti aritmetici piú semplici.

Per distruggere l'illusione che non si nasconda propriamente alcuna difficoltà nel concetto di numero intero positivo, e che si abbia quindi rispetto a esso un accordo generale, ho creduto bene discutere anzitutto alcune opinioni di filosofi e di matematici sui problemi che dovrò poi trattare nel presente studio. Si vedrà in tal modo come si possa assai raramente parlare di un accordo, e si incontrino invece, il piú delle volte, opinioni affatto contrarie le une alle altre. Vi è per esempio chi afferma che le unità sono tutte eguali fra loro, mentre altri le ritiene diverse, e sia questo che quello adducono, a sostegno della propria affermazione, dei motivi che non possono venir facilmente confutati. Con tale confronto di opinioni, io cerco di far sentire la necessità di una ricerca piú accurata. Contemporaneamente voglio, facendo precedere alla mia teoria l'esposizione di quelle altrui, spianare il terreno alla mia conce-

zione, e dimostrare che le altre non conducono allo scopo voluto, sicché la mia non potrà apparire come una fra le tante opinioni, tutte ugualmente giustificabili. Cosí spero di portare una soluzione definitiva al problema, almeno nei punti fondamentali.

Senza dubbio il mio studio diventerà, in tal modo, assai piú filosofico di quanto possa sembrare opportuno a molti matematici; ma una ricerca profonda del concetto di numero dovrà sempre risultare qualcosa di filosofico. Essa costituisce un compito comune alla matematica e alla filosofia.

Se, malgrado alcuni tentativi dalle due parti, una collaborazione fra matematica e filosofia non è ancora cosí feconda come sarebbe desiderabile e certo anche possibile, ciò dipende, a mio parere, dal sopravvento preso dai metodi psicologici nella filosofia e dal loro infiltrarsi anche nella logica. È chiaro che la matematica non può avere alcun punto di contatto con questo indirizzo; e quindi si spiega facilmente l'avversione di molti matematici per le trattazioni filosofiche. Allorché per esempio uno Stricker [1] afferma che le rappresentazioni dei numeri sono rappresentazioni di movimento, ossia dipendono dalle sensazioni muscolari, è ovvio che il matematico non possa riconoscere in esse i numeri dei quali si occupa la sua scienza, né si trovi in grado di far iniziare alcuna teoria matematica da siffatta proposizione. Un'aritmetica, che si basasse sulle sensazioni muscolari, risulterebbe certamente molto espressiva, ma vaga e confusa come la sua base. No; l'aritmetica non ha nulla a che vedere con le sensazioni, e altrettanto poco con le immagini interne, in cui confluiscono i residui di varie precedenti sensazioni. Il fluttuante e l'indeterminato, insito in tutte queste formazioni, si trova in totale contrasto con la determinatezza e l'immutabilità degli enti e dei concetti matematici. Può certo essere utile studiare il flusso delle rappresentazioni che accompagnano il pensiero matematico; non si illuda però la psicologia di poter contribuire con ciò alla fondazione dell'aritmetica. Per il matematico in quanto tale queste immagini interne, la loro formazione e il loro sviluppo sono indifferenti. Stricker afferma, per esempio, che col termine "cento" egli non si rappresenta null'altro che il segno 100; altri possono invece rappresentare la lettera *c*, o ancora

[1] R. STRICKER, *Studien über Association der Vorstellungen* [Studi intorno alla associazione delle rappresentazioni] (Vienna 1883).

qualcosa di diverso. Non ricaveremo da ciò che queste immagini interne sono, nel nostro caso, affatto indifferenti e casuali, tanto casuali quanto il gessetto e la lavagna a cui ricorriamo per scrivere il numero considerato, sicché non meritano per nulla di chiamarsi rappresentazioni del cento? Non si cerchi, dunque, di vedere in esse l'essenza del numero. Non si prenda come definizione matematica la semplice descrizione del modo con cui si forma in noi una certa rappresentazione, né come dimostrazione di un teorema il resoconto delle condizioni fisiche e psichiche che devono trovarsi in noi soddisfatte perché ne possiamo comprendere l'enunciato. Non si confonda la verità di una proposizione con il suo venir pensata! Occorre evidentemente ricordarsi bene di ciò: che una proposizione non cessa di essere vera, allorché io non la penso piú, come il sole non cessa di esistere allorché io chiudo gli occhi. Altrimenti si giunge a concludere che, nella dimostrazione del teorema di Pitagora, è necessario menzionare la quantità di fosforo, di cui abbisogna il cervello per compiere questa dimostrazione; o si giunge ad aver timore, in studi come l'astronomia, di estendere le proprie affermazioni a tempi troppo lontani, per paura che qualcuno opponga "Tu calcoli $2 \times 2 = 4$; ma non sai che questa rappresentazione numerica si è trasformata col trascorrere dei secoli, che possiede tutta una storia? Si può invero dubitare che essa abbia raggiunto già da molto il grado di sviluppo che ha ora. Chi ti assicura dunque che essa fosse vera, fin da quei lontani tempi ai quali ti riferisci? Non potrebbe darsi invece, che gli esseri allora viventi avessero in mente $2 \times 2 = 5$, e da questa loro rappresentazione sia poi sorta, solo lentamente, attraverso una faticosa selezione naturale nella lotta per l'esistenza, l'affermazione attuale $2 \times 2 = 4$, che a sua volta potrebbe essere destinata a trasformarsi nell'altra $2 \times 2 = 3$?" "Est modus in rebus, sunt certi denique fines." Il metodo storico, che vuol afferrare le cose nel loro divenire, e scoprirne in questo modo l'essenza profonda avrà senza dubbio la sua ragione d'essere ma ha pure i suoi limiti. Se nel flusso ininterrotto di tutte le cose non esistesse proprio nulla di immobile, di eterno, allora cesserebbe la conoscibilità del mondo e tutto precipiterebbe in una grande confusione.

Qualcuno pensa — a quanto pare — che i concetti germoglino nelle anime, come le foglie sulle piante, e pensa che debba esser possibile

cogliere la loro essenza cercando proprio di seguire questo modo di formarsi e cercando di spiegarlo psicologicamente per mezzo della natura dell'anima umana. Ma una tal concezione trascina tutto nel soggettivo, e finisce, se sviluppata nelle sue ultime conseguenze, col sopprimere la verità. Ciò che suol chiamarsi storia dei concetti, non può essere altro che una storia della nostra conoscenza dei concetti, o una storia del significato delle parole. Accade non di rado che solo attraverso un un lungo lavorio spirituale, per cui sono necessari forse dei secoli, si riesca a cogliere un concetto in tutta la sua purezza, liberandolo dagli inviluppi estranei, che ne celavano la visione al nostro intelletto. Che dovremo dire se qualcuno anziché proseguire una tale opera dove essa non appare ancora completa, non si cura affatto di essa, e si ferma invece a studiare il nascere dei concetti nelle menti infantili, o si sforza di riandare i piú remoti gradi dello sviluppo umano, per scoprirvi a mo' d'esempio, come fa John Stuart Mill, un'aritmetica dei granelli di pepe o dei sassolini? Non mancherebbe altro che attribuire anche al gusto dei pasticcini, coi quali il maestro spiega l'aritmetica ai fanciulli, uno speciale significato per il concetto di numero.

Questo è proprio il contrario di un procedere razionale; è il metodo piú antimatematico che si possa immaginare. Nessuna meraviglia quindi che i matematici non vogliano sentirne parlare. Anziché rinvenire una maggiore purezza dei concetti, là ove ci sembra di essere piú vicini alla loro origine, troviamo invece tutto vago e impreciso, come se lo vedessimo attraverso una nebbia. Non piú irrazionalmente procederebbe colui, che, per conoscere l'America, cercasse di trasportarsi nello stato d'animo di Colombo, allorché intravide i primi lontani contorni della presunta India. Senza dubbio questo paragone non prova nulla; spero però che riesca abbastanza bene a chiarire il mio pensiero. Può darsi che, in vari casi, la storia delle scoperte si riveli utile come avviamento ad altre ricerche; in nessun caso però può sostituirle.

Rispetto al matematico, non sarebbe stato forse necessario che io mi fermassi a combattere un tal tipo di concezioni; ma volendo far comprendere queste controversie possibilmente anche ai filosofi, fui costretto ad occuparmi un po' anche di psicologia, non fosse altro che per combattere le sue intromissioni nella matematica.

Del resto compaiono qua e là, anche nei trattati di matematica, delle

espressioni di carattere psicologico. Per esempio, allorché si intuisce che sarebbe necessario dare una definizione, ma non si è in grado di farlo, si cerca almeno di descrivere il processo psicologico col quale si giunge all'oggetto o concetto in questione. Un tal modo di procedere è facilmente riconoscibile, perché non si torna mai piú, nel corso ulteriore della teoria, alla spiegazione cosí ottenuta. Non nego che una introduzione siffatta possa riuscire utile a scopi didattici; dico soltanto che bisognerebbe distinguerla sempre, ben chiaramente, dalla definizione rigorosa. Accade invece, purtroppo, che anche i matematici confondano talvolta le basi logiche del ragionamento con le condizioni interne o esterne del modo con cui è stato condotto; ce ne dà un bell'esempio Ernst Schröder[1] quando, sotto il titolo di *Assioma unico*, scrive: "Il principio qui pensato potrebbe ben chiamarsi assioma di inerenza dei segni. Esso ci procura la certezza che, in tutti i nostri sviluppi e in tutte le nostre deduzioni, i segni restano fissi nella nostra memoria — ma piú fissi ancora nella carta", ecc.

Quanto piú la matematica deve astenersi da qualsiasi ricorso a considerazioni psicologiche, tanto meno può negare, invece, i suoi stretti rapporti con la logica. Io mi trovo veramente d'accordo con coloro, i quali ritengono impossibile tracciare una precisa linea divisoria fra le due. Chiunque mi concederà infatti, che ogni ricerca sulla connessione di una catena deduttiva, o sulla giustificazione di una deduzione, deve essere necessariamente logica; e d'altra parte è chiaro che questo tipo di ricerche non possono venire escluse dalla matematica, poiché soltanto risolvendo simili problemi si riesce a raggiungere la necessaria sicurezza.

Anche in questa direzione, è fuori dubbio che io mi spingo un po' oltre l'usuale. La maggioranza dei matematici si accontenta, in questo genere di ricerche, di aver soddisfatto le esigenze piú immediate. Quando una definizione si presta spontaneamente a costituire la base dei nostri ragionamenti, senza condurre mai ad alcuna contraddizione, quando per mezzo di essa riusciamo a stabilire dei rapporti fra cose apparentemente remote e raggiungiamo quindi un insieme di leggi e un ordine superiori, allora si è soliti riguardarla come sufficientemente giusti-

[1] E. Schröder, *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* [Trattato di aritmetica e algebra] (Teubner, Lipsia 1873).

ficata, né si indaga oltre sulla sua costituzione logica. Questa maniera di procedere ha comunque il vantaggio che, accontentandosi di essa, è difficile non si pervenga in qualche modo all'intento voluto. Orbene, anch'io ritengo che le definizioni vadano giustificate per la loro fecondità, e cioè per la possibilità di ricavare da esse qualche dimostrazione. Penso tuttavia non si debba dimenticare che il rigore di una dimostrastrazione resta una pura parvenza, anche se la catena dei ragionamenti si rivela priva di lacune, quando le definizioni iniziali si trovano giustificate soltanto a posteriori, dal non dar luogo ad alcuna contraddizione. In questo modo si finisce per raggiungere, sempre, unicamente una certezza empirica, e si deve in ogni caso essere pronti a incontrare da un momento all'altro qualche contraddizione che mandi in rovina l'intero edificio. È perciò che ho stimato di dover spingere la mia ricerca sulle basi logiche dell'aritmetica alquanto piú in là di quel che non ritenga necessario la maggior parte dei matematici.

Nella mia indagine ho tenuto come fondamentali i seguenti canoni:
a) separare nettamente il psicologico dal logico, il soggettivo dall'oggettivo;
b) cercare il significato delle parole, considerandole non isolatamente ma nei loro nessi reciproci;[1]
c) tenere presente in ogni caso la differenza fra oggetto e concetto.

Per soddisfare alla prima regola, ho sempre usato la parola "rappresentazione" in senso psicologico, tenendo ben distinte le rappresentazioni dai concetti e dagli oggetti.

Quanto al secondo canone, chi non si attenga a esso si trova, per cosí dire, costretto ad assumere delle pure immagini interne, o degli atti delle singole coscienze, come significato delle parole, e quindi a venir meno contemporaneamente anche al primo canone.

Per ciò che riguarda il terzo, è soltanto un'illusione ritenere che si possa fare di un concetto un oggetto, senza con ciò alterarlo. È da quest'ultima regola che si ricava l'insostenibilità delle teorie formali, assai diffuse fra i matematici, delle frazioni, dei numeri negativi, ecc. Come io concepisca la purificazione logica di siffatte teorie, potrà nel presente scritto venire solamente accennato. L'idea centrale, che userò

[1] [Sull'importanza di questo principio della logica moderna si veda § 60, n. 1.]

a tale scopo, è che in tutti questi casi, come per gli interi positivi, si debba per prima cosa stabilire con esattezza il senso di un'eguaglianza.

Ritengo che i risultati qui raggiunti incontreranno, almeno per le cose essenziali, l'approvazione di quei matematici che si prenderanno la pena di riflettere sui fondamenti da me proposti. Questo genere di fondamenti mi sembra già nell'aria, e, singolarmente, essi vennero forse già enunciati tutti, almeno in forma approssimata; in quel nesso reciproco, in cui li presento io, potrebbero tuttavia risultare nuovi. Mi sono non di rado stupito che varie esposizioni, le quali in certi punti sembrano cosí vicine al mio modo di concepire, in altri invece se ne distanzino tanto.

L'accoglienza tra i filosofi sarà diversa, secondi i diversi punti di vista; a ogni modo sarà certamente pessima fra quegli empiristi, i quali pretendono riconoscere come unico tipo originario di ragionamento l'induzione, e interpretano anche questa non tanto come un vero e proprio metodo di ragionamento, quanto piuttosto come un'abitudine mentale. Forse l'uno o l'altro di essi trarrà occasione dalla presente lettura per sottoporre ad un nuovo esame le basi della sua teoria della conoscenza. Se poi qualcuno accusasse le mie definizioni di essere innaturali, gli risponderei invitandolo a riflettere che il problema centrale non è, qui, se le definizioni da me trovate risultino naturali o meno, ma se colgano il nocciolo delle cose e siano logicamente impeccabili.

Nutro la speranza che, ad un esame non preconcetto, anche i filosofi troveranno nel presente scritto qualcosa di utile.

1.

Ragioni e compito dell'opera [1]

[Di particolare interesse l'ultimo capoverso del paragrafo 2, che mette in luce il vero scopo, cui tende la ricerca di un assoluto rigore nelle dimostrazioni matematiche; e il paragrafo 3 che determina, con precisione logica, i concetti filosofici di "analitico" e "sintetico", "a priori" e "a posteriori".]

1. NELLA MATEMATICA DEI TEMPI RECENTI È RICONOSCIBILE UNA NETTA TENDENZA VERSO IL RIGORE DELLE DIMOSTRAZIONI E L'ESATTA DETERMINAZIONE DEI CONCETTI Dopo essersi allontanata per lungo tempo dal rigore euclideo, la matematica è ora tornata a esso e tende anzi a superarlo. Nell'aritmetica, già in conseguenza dell'origine indiana di molti fra i suoi metodi e concetti, era tradizionale un modo di procedere meno preciso di quello in uso nella geometria, elaborata in forma cosí perfetta dai Greci. Esso si accentuò ancora maggiormente dopo la scoperta dell'analisi superiore; da un lato infatti parvero elevarsi difficoltà gravi, quasi insormontabili, contro ogni tentativo di esporre l'analisi in forma rigorosa, dall'altro parve che il loro superamento non dovesse dar luogo a risultati capaci di ricompensare gli sforzi compiuti. Tuttavia gli sviluppi ulteriori mostrarono in modo sempre piú chiaro che in matematica non è sufficiente una pura e semplice persuasione morale, fondata sul gran numero di applicazioni riuscite. Oggi si richiede pertanto una dimostrazione per molte proprietà che prima erano ritenute evidenti; anzi, solo questo fu il modo di scoprire, in molti casi, i limiti della loro validità. I concetti di funzione, di continuità, di limite, di infinito, rivelarono la necessità di una piú precisa determinazione; il numero negativo e l'irrazionale, già da lungo tempo

[1] [Nell'originale questa premessa non ha titolo. Ci è parso utile darne uno, per maggiore chiarezza].

entrati a far parte della matematica, dovettero essere sottoposti a un piú preciso esame della loro giustificazione.

Cosí si incontra ovunque la tendenza a dare dimostrazioni rigorose, a tracciare con esattezza i limiti di validità dei diversi teoremi, e, per poter raggiungere questo scopo, a determinare con precisione i concetti.

2. L'ESAME DEVE ESTENDERSI, FINALMENTE, ANCHE AL CONCETTO DI NUMERO NATURALE. SCOPO DELLE DIMOSTRAZIONI Sviluppandosi ulteriormente, questa via deve condurci infine al concetto di numero naturale,[1] e alle piú semplici proposizioni sugli interi positivi, proposizioni che costituiscono il fondamento di tutta l'aritmetica. È certo che formule numeriche come $5+7=12$, e leggi come quella associativa per l'addizione, trovano cosí innumerevoli conferme in infinite applicazioni giornaliere, che può quasi sembrare ridicolo elevare qualche dubbio su di esse coll'esigere una dimostrazione. Ma è nell'essenza stessa della matematica che, ovunque sia possibile una dimostrazione, la si ritenga preferibile a una semplice verifica induttiva. Euclide dimostra molte cose che chiunque ammetterebbe come immediate. Nei tempi recenti, per non essersi piú accontentati nemmeno del rigore euclideo, si fu condotti alle famose ricerche connesse al postulato delle parallele.

Cosí è accaduto che la tendenza verso un rigore sempre piú perfetto oltrepassò varie volte le esigenze primieramente sentite e andò crescendo di continuo in forza ed estensione.

In realtà il processo dimostrativo non ha esclusivamente lo scopo di elevare al di sopra di qualsiasi dubbio la verità dei singoli teoremi, ma anche di farci comprendere la dipendenza di queste verità le une dalle altre. Una volta convinti dell'immobilità di una roccia per aver tentato invano di spostarla, ci si può chiedere, inoltre, che cosa la sostenga con tanta saldezza. Quanto piú si proseguono queste ricerche, tanto piú piccolo risulta il numero delle verità-base a cui viene ricondotto l'intero edificio; e questa semplificazione è, già per sé stessa, uno scopo assai degno delle nostre ricerche. Forse, portando a consapevolezza ciò che gli uomini hanno istintivamente compiuto nei casi piú semplici

[1] [Frege usa il termine *Anzahl* per indicare i numeri naturali 0, 1, 2, 3...; e invece il termine *Zahl* per indicare il numero in generale, che potrà essere — secondo i casi — positivo o negativo, intero, fratto, irrazionale, ecc.]

e ponendo in rilievo ciò che possiede una validità generale, si rinvigorisce anche la speranza di poter raggiungere un giorno metodi generali per la formazione dei concetti o la loro fondazione, che risultino pure applicabili in casi piú complessi.

3. RAGIONI FILOSOFICHE DI TALE RICERCA: IL PROBLEMA SE LE LEGGI DEI NUMERI SIANO VERITÀ ANALITICHE O SINTETICHE, A PRIORI O A POSTERIORI. SENSO DI QUESTE ESPRESSIONI A questo genere di ricerche mi hanno determinato anche delle ragioni filosofiche. Dovrà qui, infatti, venir trovata una risposta ai problemi circa la natura a priori o a posteriori, sintetica o analitica, delle verità aritmetiche. Ché, se a rigore questi concetti appartengono alla filosofia, non credo però che i problemi accennati possano risolversi senza l'aiuto della matematica. Una tale possibilità dipende senza dubbio dal senso che si attribuisce a quei problemi.

Accade non di rado che prima si afferri il contenuto di una proposizione per una via, e poi per un'altra piú difficile se ne svolga la dimostrazione rigorosa, attraverso cui si vengono pure a riconoscere con maggiore esattezza le sue condizioni di validità. Bisogna pertanto scindere in generale le due questioni: come giungiamo al contenuto di un giudizio; e: donde ricaviamo la giustificazione del nostro asserto.

Orbene, le anzidette distinzioni di a priori e a posteriori, di sintetico e analitico, riguardano, a mio parere,[1] non il contenuto del giudizio, ma la sua giustificazione. Dove manca quest'ultima, cade infatti la possibilità stessa di una tale suddivisione. Un errore a priori risulta un non-ente, proprio come lo sarebbe per esempio un concetto azzurro. Se si afferma, nel mio senso, che una proposizione è analitica oppure che è a posteriori, non si pronuncia con ciò alcun giudizio sulle circostanze psichiche, fisiche o fisiologiche le quali permisero che si formasse in una certa coscienza il contenuto della proposizione in esame, e nemmeno sul modo con cui altre coscienze pervennero — per via giusta o erronea — a ritenere vera questa proposizione, ma si giudica la base ultima su cui è fondata la sua verità.

Risulta pertanto sottratto al campo della psicologia e assegnato a quello della matematica il problema se una certa proposizione costi-

[1] Con ciò, naturalmente, non intendo introdurre un senso nuovo per tali termini, ma cogliere con esattezza il pensiero di altri autori, in ispecie di Kant.

tuisca o no una verità matematica. Per risolverlo, la prima cosa importante è di trovare una dimostrazione di essa, che la riconduca alle verità-base. Allorquando, nel percorrere questa via, si fa esclusivamente uso delle leggi logiche generali e di qualche definizione precisa, diremo che si tratta di una verità analitica (dove presupponiamo di tener conto, insieme con le altre, anche delle proposizioni che servono eventualmente a provare l'ammissibilità di una definizione). Quando invece non si può svolgere per intero la dimostrazione senza far appello a qualche verità, che risulti non di natura logica generale, ma dipendente da un campo particolare della scienza, allora diremo che si tratta di una proposizione sintetica.

Perché una proposizione debba dirsi a posteriori, è necessario che risulti impossibile dimostrarla senza far appello a fatti (cioè a verità indimostrabili, prive di generalità, enuncianti qualche asserto su determinati oggetti). Se, al contrario, riesce possibile svolgere per intero la dimostrazione partendo da leggi universali, che a loro volta non siano dimostrabili né richiedano alcuna dimostrazione, allora parleremo di una verità a priori.[1]

4. Compito della presente opera Partendo da questi problemi filosofici, ci troviamo costretti a porre la stessa richiesta che, per vie affatto diverse, si è pure venuta affermando nel campo della matematica: la richiesta, cioè, di dimostrare col massimo rigore — posto che ciò sia possibile — le proposizioni fondamentali dell'aritmetica. Ed invero: soltanto se si è riusciti ad evitare qualsiasi lacuna nella catena dei ragionamenti, è possibile dire con esattezza su quali verità-base si fondano le dimostrazioni dell'aritmetica; e soltanto se si conoscono queste verità, è possibile trovare una risposta ai suddetti problemi.

Orbene, quando si cerca di assecondare la richiesta ora accennata, si perviene ben presto a proposizioni, che risultano dimostrabili unica-

[1] Quando si ammette in genere l'esistenza di verità universali, bisogna anche ammettere l'esistenza di leggi-base del tipo qui accennato, perché da soli fatti singoli non segue nulla, fuorché sul fondamento di una legge. Lo stesso ragionamento per induzione riposa sul principio generale che il procedimento induttivo sia in grado di provare la verità delle nostre leggi scientifiche, o per lo meno di provare una certa loro probabilità. Per chi neghi questo principio, l'induzione non risulta nulla più che un semplice fenomeno psicologico, una via per mezzo della quale gli uomini giungono a credere nella verità di certe proposizioni, senza che la loro fede sia comunque fondata.

mente se si riesce a scindere i concetti — dei quali esse si servono — in altri concetti piú semplici, o se si riesce a ricondurli a qualcosa di piú generale. Su questa via si incontra, prima di tutti gli altri, il concetto di numero naturale, che dovrà quindi, o venir definito, o venir riconosciuto come indefinibile. L'esame del concetto di numero naturale costituirà, per l'appunto, il compito del presente libro.[1] Dal modo di risolverlo dipenderà il verdetto sulla natura delle leggi aritmetiche.

Prima però di iniziare direttamente la discussione di questi problemi, voglio far precedere qualche notizia, capace di offrirci opportune indicazione per il nostro assunto. E infatti, se da altri punti di vista si ricavano degli argomenti per ritenere che le proposizioni fondamentali dell'aritmetica siano analitiche, questi potranno pure venir utilizzati in favore della loro dimostrabilità e quindi della possibilità di definire il concetto di numero naturale. Effetto contrario avranno invece gli argomenti, che contribuiscono a far ritenere a posteriori le anzidette proposizioni. Ritengo perciò opportuno, prima di esaminare il concetto di numero, sottoporre a un esame preliminare questi problemi collaterali.

[1] D'ora in poi nel presente studio non si parlerà dunque — salvo esplicito avvertimento contrario — di alcun altro numero, fuorché degli interi positivi, cioè di quei numeri che rispondono alla domanda: "quanti?".

2.

Opinioni di alcuni scrittori sulla natura delle proposizioni aritmetiche

[Il presente capitolo mira sopra tutto a provarci l'infondatezza delle teorie che vorrebbero presentare le verità aritmetiche come proposizioni sintetiche a posteriori oppure come proposizioni sintetiche a priori; con ciò viene spianato il terreno alla tesi di Frege, secondo cui tali verità sono analitiche. Di particolare interesse le obiezioni mosse a Kant (§§ 5 e 12), e la critica molto serrata della filosofia delle matematiche di Mill (§§ 7, 8 e 9). Chiara la precisazione delle profonde differenze fra leggi aritmetiche e leggi naturali (fine del § 9); piú chiara ancora e piú importante, l'analisi delle differenze fra leggi aritmetiche e leggi geometriche (§ 14) e la messa a punto del carattere logico delle prime, che non possono venire negate come gli ordinari postulati scientifici.]

Le formule numeriche sono dimostrabili?

5. KANT LO NEGA, MA LA SUA OPINIONE È GIUSTAMENTE DEFINITA PARADOSSALE DA HANKEL Si devono distinguere le formule numeriche, come $2+3=5$, le quali trattano di determinati numeri, dalle leggi generali, che valgono invece per tutti i numeri.

Alcuni filosofi [1] ritengono che le formule del tipo anzidetto siano indimostrabili e immediatamente chiare come gli assiomi. Kant [2] le considera quali proposizioni indimostrabili e sintetiche; prova tuttavia una certa ripugnanza a chiamarle assiomi, da un lato perché non sono generali, e dall'altro perché il loro numero è infinito. Ben a ragione Hankel [3] qualifica come inadeguata e paradossale questa ipotesi di

[1] Hobbes, Locke, Newton. Si veda J. BAUMANN, *Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik* [Le teorie di tempo, spazio e matematica] (Reiner, Berlino 1868) pp. 241 sg., 365 sgg., 475.

[2] I. KANT, *Kritik der reinen Vernunft* [Critica della ragion pura], ed. Hartenstein, vol. 3, p. 157.

[3] H. HANKEL, *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihren Funktionen* [Lezioni sui numeri complessi e sulle loro funzioni] (Lipsia 1867) p. 55.

infinite verità originarie indimostrabili. Essa infatti è in contraddizione con l'esigenza, sentita dalla nostra ragione, di una completa perspicuità dei primi fondamenti delle scienze. E, del resto: possiamo davvero affermare che risulta immediatamente chiara l'uguaglianza

$$135664+37863=173527?$$

No. Eppure Kant vorrebbe proprio appellarsi a questa pretesa evidenza, per provare la natura sintetica delle proposizioni anzidette. Tutto parla, invece, contro l'affermazione che si tratti di proposizioni indimostrabili; per qual altra via, infatti, se non dimostrandole, possiamo renderci conto della loro verità, dato che esse non sono immediatamente evidenti? Kant vorrebbe qui invocare in aiuto l'intuizione delle dita delle nostre mani o l'intuizione dei punti; ma con questo rischia di far involontariamente apparire come empiriche le proposizioni in esame, poiché l'intuizione di 37863 dita non può certo dirsi un'intuizione pura. Il termine "intuizione" non mi sembra, del resto, molto appropriato al nostro caso, poiché già 10 dita possono produrre in noi diverse intuizioni, a seconda della loro posizione reciproca. Ma possiamo asserire davvero di possedere una intuizione di 135664 dita o punti? Se ciò rispondesse a verità, e se avessimo pure una intuizione di 37863 e di 173527 dita, l'esattezza della nostra eguaglianza di poco fa dovrebbe, almeno per le dita, rilucere immediatamente, essendo indimostrabile. In realtà però non si verifica affatto questo caso.

È chiaro invece che Kant ha tenuto conto soltanto dei numeri piccoli. Ne segue che quelle formule, le quali risultano evidenti per i numeri piccoli, dovrebbero essere dimostrabili per i grandi. Una distinzione sistematica fra i numeri piccoli e grandi presenta però non pochi dubbi, soprattutto perché non sarebbe facile tracciare fra essi una precisa linea di demarcazione. Posto, per esempio, che fossero dimostrabili le formule dal 10 in poi, sorgerebbe spontanea la domanda: perché proprio dal 10, e non piuttosto dal 5, o addirittura dal 2, dall'1 in poi?

6. LA DIMOSTRAZIONE, DATA DA LEIBNIZ, DELL'UGUAGLIANZA $2+2=4$ PRESENTA UNA LACUNA. LA DEFINIZIONE, DOVUTA A GRASSMANN, DELLA SOMMA $a+b$ È ERRONEA Altri filosofi e matematici hanno invece

sostenuto che è possibile dimostrare le formule numeriche. Per esempio Leibniz [1] scrive:

"Che due piú due dia quattro, non costituisce una verità immediata, supposto che 4 denoti 3 piú 1. Lo si può invece dimostrare; e precisamente col seguente ragionamento:

Definizioni: 1) 2 è 1 piú 1

2) 3 è 2 piú 1

3) 4 è 3 piú 1

Assioma: un'uguaglianza continua a sussistere sostituendovi un termine con un altro uguale.

Dimostrazione:

$$2+2=2+1+1=3+1=4$$

Dunque, in base all'assioma si conclude:

$$2+2=4."$$

A prima vista questa dimostrazione sembra fondata esclusivamente su definizioni, oltreché sull'assioma ivi riferito. Quest'ultimo potrebbe poi venir trasformato esso pure in una definizione, come fece lo stesso Leibniz in un altro scritto.[2] Pare dunque che, per dimostrare l'uguaglianza in esame, non si abbia bisogno di sapere altro, intorno ai numeri 1, 2, 3, 4, fuorché quanto è detto nelle precedenti definizioni. Però. a un esame piú accurato, si scopre nel ragionamento di Leibniz una lacuna che ci era finora sfuggita per aver tralasciato le parentesi. A rigore si sarebbe dovuto scrivere

$$2+2=2+(1+1)$$

$$(2+1)+1=3+1=4\,,$$

ove è palese che manca la proposizione

$$2+(1+1)=(2+1)+1\,,$$

[1] G. W. Leibniz, *Nouveaux essais sur l'entendement humain* [Nuovi saggi sull'intelletto umano] (1704), IV, § 10; ed. B. Erdmann, p. 363.

[2] G. W. Leibniz, *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis*; ed. Erdmann, p. 94.

che costituisce un caso particolare della formula

$$a+(b+c)=(a+b)+c\ .$$

Una volta presupposta questa legge, si vede facilmente che ogni formula riguardante l'aggiunta di un'unità risulta dimostrabile; e in tal caso ogni numero può venir definito a partire dai precedenti. Di fatto io non vedo altro metodo capace di farci comprendere, meglio di quello ora esposto di Leibniz, che cosa sia il numero 437986. Esso ce lo fa ottenere, anche senza la necessità di averne una precisa rappresentazione. La serie infinita dei numeri viene cosí ricondotta all'unità e all'addizione di unità, e ognuna delle infinite formule numeriche risulta in tal modo dimostrabile a partire da alcune proposizioni generali.

Questa è anche il parere di Grassmann e di Hankel. Il primo di essi cerca di farci raggiungere, per mezzo di una definizione, la legge

$$a+(b+1)=(a+b)+1\ ,$$

e scrive a tale scopo [1]

"Se a e b sono termini qualunque della serie numerica fondamentale, intenderemo per somma $a+b$ quel termine di essa per cui è vera la formula

$$a+(b+e)=(a+b)+e\ ,$$

dove e denota l'unità positiva."

Contro un tal modo di procedere si possono però elevare due obiezioni. In primo luogo, che esso pretende spiegare la somma per mezzo di sé medesima. Se ancora non è noto che significhi $a+b$, tanto meno si saprà che significato possegga $a+(b+e)$. Quest'obiezione, però, potrebbe forse venir eliminata, osservando che lo scopo di Grassmann non è propriamente di definire la somma, come ci dice il testo letterale del suo scritto, quanto piuttosto l'operazione del sommare. In secondo luogo si può muovere l'obiezione che il segno $a+b$ risulterebbe vuoto, qualora non esistesse alcun termine della serie naturale con la pro-

[1] H. GRASSMANN, *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten* [Trattato di matematica per Istituti Superiori] (Stettino 1860) parte prima: "Aritmetica", p. 4.

prietà assegnata. Grassmann suppone che tale termine esista: non dimostra però la sua ipotesi, e quindi l'intero ragionamento perde l'apparente rigore.

7. Infondatezza della opinione di Mill, secondo cui le definizioni dei singoli numeri enunciano fatti osservati dai quali possono ricavarsi i calcoli Parrebbe naturale ritenere che le formule numeriche risultino sintetiche o analitiche, a posteriori o a priori, secondo che siano dell'uno o dell'altro tipo le leggi generali su cui trovasi fondata la loro dimostrazione. Non è questo però il parere di John Stuart Mill.

In un primo momento egli sembra voler fondare,[1] come Leibniz, la scienza su pure definizioni; spiega infatti allo stesso modo di Leibniz che cosa siano i singoli numeri. A corrompere questo giusto pensiero interviene però immediatamente il suo solito pregiudizio circa il carattere empirico di tutto il sapere. Aggiunge infatti [2] che quelle definizioni non vanno intese in senso puramente logico, e cioè che non devono soltanto stabilire il significato di un'espressione, ma per di piú enunciare un fatto osservato. Dove trovare però, in tutto il mondo, il fatto osservato o — come anche dice Mill — il fatto fisico che dovrebbe venir enunciato nella definizione del numero 777864? Di tutti gli innumerevoli fatti fisici, che troviamo innanzi a noi, Mill ce ne ricorda soltanto uno, che verrebbe secondo lui enunciato nella definizione del numero 3. Questo fatto è, secondo lui, il seguente: che esistono gruppi di oggetti i quali, mentre producono in noi l'impressione suscitata dal disegno $^{0}{}_{0}{}^{0}$, possono però venir scomposti in due parti come $^{00\;0}$. Per fortuna, dunque — aggiungeremo noi — non tutti gli oggetti del mondo sono fissi né sono immobili le parti che li costituiscono. Perché, se cosí fosse, non potremmo spostare, come vuole Mill, gli oggetti del gruppo considerato, e quindi, non saremmo in grado di capire l'anzidetta scomposizione, sicché il numero 3 non sarebbe piú 2+1. Peccato che Mill non abbia riferito i fatti fisici sui quali si basa la spiegazione dello 0 e dell'1!

[1] J. S. Mill, *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive* [Sistema di logica deduttiva e induttiva], lb. 3, cap. 24, § 5.

[2] Mill, *op. cit.*, lb. 2, cap. 6, § 2.

Mill prosegue: "Una volta concessa questa proposizione, chiameremo poi 3 tutti i gruppi siffatti." Allora però è necessario riconoscere che, a voler esser rigorosi, non si può parlare di tre colpi, quando l'orologio batte le tre, né dire che dolce, salato e amaro sono tre sensazioni di gusto, né usare la locuzione "tre modi di risolvere un'equazione"; nessuno di questi casi infatti produce in noi un'impressione sensoriale analoga a quella prodotta dal gruppo $^{0}{}_{0}{}^{0}$.

Mill afferma: "I calcoli non provengono dalla definizione stessa ma dal fatto osservato." Noi gli domandiano però: a che punto, nella dimostrazione su riferita dell'uguaglianza $2+2=4$, avrebbe dovuto Leibniz richiamarsi al fatto fisico menzionato? Mill tralascia di indicarci in che consista, secondo lui, questa pretesa lacuna, sebbene ci dia una dimostrazione dell'uguaglianza $2+5=7$ completamente analoga a quella di Leibniz.[1] In realtà non si accorge, proprio come non se n'è accorto Leibniz, che la vera lacuna è dovuta all'aver tralasciato le parentesi.

Se effettivamente la definizione di ogni singolo numero enunciasse uno speciale fatto fisico, non si potrebbe mai ammirare abbastanza, per l'ampiezza delle sue conoscenze fisiche, chi sa calcolare con numeri di nove cifre. Forse — obietterà qualcuno — il pensiero di Mill non giunge fino a dire che tutti questi fatti debbono venir osservati singolarmente; secondo lui basta aver ricavato per induzione una legge generale, in cui i diversi fatti risultino inclusi nella loro totalità. Però, si cerchi di formulare questa legge, e si vedrà subito che essa è impossibile. Qui non basta dire: vi sono dei gruppi molto ampi di oggetti, che possono venire scomposti; questo, infatti, non ci dice ancora che ve ne siano di quelli cosí grandi e di tipo cosí fatto, come si richiede per la costruzione del numero 1 000 000; né tanto meno ci dà il modo esatto di scomporli. La concezione di Mill richiede proprio che a ogni numero corrisponda l'osservazione di un fatto specifico, perché in una legge generale si perderebbe per l'appunto quel che vi è di caratteristico nel numero 1 000 000 che deve per necessità entrare nella definizione di esso. Secondo Mill sarebbe, invero, impossibile porre $1\,000\,000 = 999\,999+1$ se non si fosse osservato, per il gruppo di oggetti fisici

[1] MILL, *op. cit.*, lb. 3, cap. 24, § 5.

corrispondente, questo speciale modo di scomposizione che è diverso da quello relativo a qualunque altro numero.

8. L'OSSERVAZIONE DI QUEI FATTI FISICI NON È NECESSARIA PER LA GIUSTIFICAZIONE DI QUESTE DEFINIZIONI Mill sembra ritenere che le definizioni $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, $4 = 3+1$, ecc., non risulterebbero possibili, se non fossero precedute dall'osservazione dei fatti fisici da lui citati. E in realtà non sarebbe possibile definire il 3 come $(2+1)$ se non si collegasse alcun senso al segno $(2+1)$. Il problema è però un altro: e cioè se, per attribuirgli un senso, risulti proprio necessario osservare quel gruppo (ad esempio $^{0}{}_{0}{}^{0}$) e quella scomposizione poco fa accennata ($^{00}\ ^{0}$). Se cosí fosse, il numero zero risulterebbe un vero indovinello, poiché nessuno finora ha visto né toccato zero ciottoli. Mill ne dovrebbe concludere che lo zero è qualcosa di privo di senso, una semplice locuzione; i calcoli con lo zero sarebbero un puro gioco di parole, e riuscirebbe strano che in essi si possa ottenere qualcosa di razionale. Dato invece che questi calcoli hanno — come tutti sappiamo — un significato serio, si deve riconoscere che anche il segno zero non può essere privo di senso.

Si intravede cosí la possibilità che, analogamente allo zero, pure il segno $2+1$ riesca ad avere un senso anche se non gli facciamo precedere l'osservazione riferita da Mill. In realtà, nessuno potrà dire che il fatto fisico — implicato, secondo Mill, nella definizione di un numero di diciotto cifre — sia stato mai osservato in pratica da qualcuno. Eppure non si potrà negare che tale numero possiede un suo senso ben preciso, malgrado la mancanza dell'anzidetta osservazione.

Forse si ritiene che l'osservazione dei fatti fisici entri in gioco soltanto nel definire i numeri piú piccoli — per esempio fino al 10 — mentre gli altri possono ricavarsi da questi. Tuttavia, se è possibile formare in base a pure definizioni il numero 11 dal 10 e dall'1, non vi è motivo perché non si possa allo stesso modo ricavare il 2 dall'1 e dall'1. Se i calcoli che operano con l'11 non richiedono alcun fatto fisico specifico su cui fondarsi, come mai accadrà che i calcoli col 2 debbano necessariamente appoggiarsi sull'osservazione di un certo gruppo di oggetti e sulla possibilità di scinderlo in un certo modo piuttosto che in un altro?

Qualcuno domanderà forse in che modo potremmo costruire l'aritmetica, se i nostri sensi non riuscissero a distingure alcun oggetto dagli

altri o ne distinguessero soltanto tre. Senza dubbio questo stato di cose renderebbe assai problematica la nostra conoscenza delle proposizioni aritmetiche e delle loro applicazioni; dobbiamo dire però che renderebbe dubbia anche la loro verità? Se chiamiamo empirica una proposizione, solo perché dobbiamo ricorrere a osservazioni sensoriali per venirla a conoscere, allora diamo al termine "empirico" un senso che non è per nulla opposto a quello del termine "a priori". In tal caso infatti, col termine "empirico" facciamo esclusivamente un'affermazione di carattere psicologico, che riguarda soltanto il contenuto della proposizione considerata e non la sua verità. In questo senso, però, anche tutte le storie del barone di Münchhausen dovrebbero dirsi empiriche, risultando certo impossibile inventarle, se non si è fatta in precedenza qualche osservazione sensoriale.

Le leggi dell'aritmetica sono verità induttive?

9. LA LEGGE NATURALE SECONDO MILL. CHIAMANDO LEGGI NATURALI LE LEGGI ARITMETICHE, MILL CONFONDE QUESTE ULTIME CON LE LORO APPLICAZIONI Le precedenti discussioni rendono probabile che le formule numeriche possano dedursi — mediante l'applicazione di alcune leggi generali — dalle definizioni dei singoli numeri, e che queste definizioni non enuncino fatti d'osservazione né, per essere legittime, li presuppongano. È dunque importante passare ora all'esame delle leggi generali anzidette.

Per la dimostrazione, poco fa accennata, della formula $5+2=7$, Mill vuole servirsi della proposizione: "Ciò che è composto di parti può anche venire composto dalle parti di queste parti", proposizione in cui egli vede espresso in maniera caratteristica ciò che solitamente si enuncia con le parole: "Somme di quantità uguali sono uguali." A essa dà il nome di verità induttiva e di legge naturale dell'ordine piú elevato. È poi caratteristico del modo impreciso di esporre di Mill, che egli non la invochi nel punto della dimostrazione ove essa sarebbe secondo lui indispensabile; pare infatti che la sua verità induttiva debba tenere il posto dell'assioma di Leibniz: "Ogni uguaglianza continua a sussistere sostituendovi un termine con un altro uguale." Osserviamo però che, per poter attribuire il nome di leggi naturali alle verità aritme-

tiche, Mill attribuisce loro un senso che in realtà non hanno. Ritiene per esempio [1] che l'uguaglianza $1=1$ possa risultare falsa per il fatto che due pezzi di una pesiera, segnanti entrambi una libbra, non hanno sempre l'identico peso. Il fatto è però che l'uguaglianza $1=1$ non asserisce per nulla tale identità di peso.

Mill interpreta il segno $+$ come se esprimesse il rapporto fra le parti e il tutto in un oggetto fisico o in un mucchio di oggetti; questo però non è il senso di tale segno. L'uguaglianza $5+2=7$ non significa che, aggiungendo due volumi di liquido in un recipiente il quale ne conteneva già cinque, se ne ottengano sette: ciò costituisce unicamente un'applicazione di tale formula; applicazione che cessa di valere se, mescolando i due liquidi interviene una variazione di volume dovuta, per esempio, a qualche reazione chimica. Mill confonde sempre la pura proposizione aritmetica con le applicazioni che se ne possono fare, le quali sono spesso di ordine fisico e si riferiscono a fatti osservati. In molte applicazioni può sembrare davvero che il segno $+$ corrisponda alla formazione di un mucchio; ma questo non è il suo vero significato, poiché in altre applicazioni non si può far parola né di mucchi, né di aggregati, né di rapporto fra le parti e il tutto in un corpo fisico: ciò per esempio quando si applica il calcolo agli eventi. Anche in questo caso, volendolo, è possibile parlare di parti; allora però si usa un tale termine, non in senso fisico o geometrico, ma in senso logico, come si fa per esempio allorché si dice che gli assassíni dei capi di stato costituiscono una parte degli assassíni in generale. Qui vi è evidentemente una pura subordinazione logica.

Dunque l'addizione in generale non corrisponde a un rapporto fisico, e perciò le sue leggi non possono essere leggi naturali.

10. Ragioni per le quali è impossibile che le leggi dell'addizione siano verità induttive: inomogeneità dei numeri; la loro semplice definizione non ci procura, di per sé, una serie di proprietà comuni a tutti i numeri. È invece probabile che sia proprio l'aritmetica a fondare l'induzione Forse le leggi dei numeri, pur non essendo leggi naturali, possono ciò malgrado risultare verità induttive. In che

[1] Mill, *op. cit.*, lb. 2, cap. 6, § 3.

senso? Da quali fatti occorre qui partire per raggiungere il generale? Poiché è chiaro che le formule numeriche non possono essere altro che generali.

Innanzitutto osserviamo che una tale ipotesi ci farebbe, certamente, perdere di nuovo il vantaggio conseguito col dare una definizione particolare per ogni singolo numero, e ci costringerebbe a cercare qualche altra via per giustificare le formule numeriche.

Inoltre facciamo presente che, a un'analisi non superficiale, il terreno aritmetico si mostra tutt'altro che favorevole all'induzione. Manca qui, infatti, quella uniformità che in altri casi può rendere molto ammissibile un tal metodo. Già Leibniz,[1] all'affermazione di Filalete:

"I diversi modi del numero non possono differire fra loro se non perché l'uno è piú grande e l'altro piú piccolo; e quindi sono modi semplici come quelli dello spazio", fa rispondere:

"Questo può venir detto del tempo e dei segmenti rettilinei, ma non delle figure e ancor meno dei numeri, i quali risultano non soltanto diversi fra loro per grandezza, ma pure dissimili. Infatti un numero pari è divisibile per due, mentre non lo è uno dispari; 3 e 6 sono numeri triangolari; 4 e 9 sono quadrati; 8 è un cubo, ecc.; e ciò ha luogo ancor piú per i numeri che per le figure, dato che due figure disuguali possono essere totalmente simili, mentre ciò non accade mai per due numeri."

Senza dubbio noi ci siamo abituati a considerare i numeri come enti sotto molti rispetti omogenei; ma ciò proviene soltanto dal fatto che noi conosciamo una gran quantità di teoremi generali che valgono per tutti i numeri. Qui però dobbiamo porci dal punto di vista di chi non conosce ancora alcuno di tali teoremi. Allora ci sarebbe difficile trovare un esempio di ragionamento induttivo che facesse al caso nostro. Si afferma spesso che ogni luogo dello spazio e ogni punto del tempo equivale, in sé e per sé, a un altro qualunque. Un evento deve verificarsi altrettanto bene in un posto come nell'altro, in un istante come nell'altro, purché le condizioni restino le stesse. Questo è vero per i numeri, perché essi sono fuori del tempo e dello spazio. Non altrettanto indifferente è però il posto che essi occupano nella successione numerica.

Nemmeno sarebbe lecito paragonare i numeri agli individui di una

[1] BAUMANN, *op. cit.*, vol. 2, p. 39; LEIBNIZ, ed. Erdmann, p. 243.

stessa specie animale; essi hanno infatti, per loro natura, un ordinamento fisso, ognuno è formato in un modo suo proprio e possiede le sue particolari caratteristiche (questo risulta specialmente chiaro per i tre numeri 0, 1, 2). Allorché, in altri casi, si dimostra per induzione un asserto che si riferisce a un intero genere, già si possiede in precedenza una serie completa di proprietà, delle quali si sa che sono comuni a tutti gli individui del genere considerato, e lo sono proprio in base alla definizione stessa del concetto di questo genere. Qui invece sarebbe assai difficile trovarne sia pure una sola, che valga per definizione e non richieda, già essa, di venir dimostrata.

Il paragone piú appropriato potrebbe essere il seguente. Supponiamo di aver scavato un pozzo, e di aver osservato che in esso la temperatura cresce proporzionalmente alla profondità. Si siano inoltre incontrati, nello scavo, strati pietrosi assai diversi. In questa ipotesi è evidente che, dalle osservazioni finora compiute, è impossibile ricavare alcunché circa le le proprietà degli strati ulteriori e che non si sa se si conserverà ancora la precedente regolarità nella distribuzione delle temperature. Senza dubbio, tanto quello che venne finora osservato, quanto ciò che giace piú in fondo, cadono entrambi sotto il concetto generico di "ciò che si incontra proseguendo lo scavo del pozzo"; una tal subordinazione logica giova però, nel nostro caso, assai poco. Altrettanto poco ci gioverà, nel caso dei numeri, il fatto che essi cadono tutti sotto il concetto generico di "ciò che si ottiene proseguendo ad aumentare di una unità".

Qualcuno obietterà forse che fra i due casi sussiste una notevole diversità: gli strati successivi del terreno vengono, nello scavo del pozzo, soltanto incontrati; i numeri invece vengono proprio creati, determinati in tutto il loro essere, dall'aggiunta di una unità. Rispondiamo: questo può significare soltanto che è possibile dedurre tutte le proprietà di un numero, per esempio di 8, dal modo con cui esso è formato dall'aggiunta di successive unità. Ma con ciò si viene proprio a concedere quanto volevamo, cioè che le proprietà dei numeri derivano dalle loro definizioni; e questo apre la possibilità di dimostrare le leggi generali dei numeri dal metodo di produrli comune a tutti, mentre le proprietà speciali di ciascuno di essi dovrebbero ricavarsi dal modo speciale con cui ogni singolo numero si origina per l'aggiunta di successive unità.

In maniera analoga è possibile dedurre, senza ricorrere alla induzione, quelle proprietà dei successivi strati di terreno che sono determinate dalla sola profondità, cioè dai loro rapporti di posizione; mentre non è possibile prevedere, né con l'induzione né senza, quel che non è determinato da tali rapporti.

È presumibile che il metodo induttivo stesso, se non lo si interpreta come una pura abitudine, possa venir giustificato soltanto per mezzo dei teoremi generali dell'aritmetica. L'abitudine infatti non è per certo in grado di garantire la verità. Accade invero che la ricerca scientifica sperimentale ora ritenga sufficiente un'unica prova a fondare una forte probabilità, e ora invece stimi senza valore il ripetersi di un evento per migliaia di volte; al contrario, l'abitudine viene determinata soltanto dal numero e dalla forza delle impressioni e dei loro legami soggettivi, cose tutte che non hanno alcun diritto di influire sul giudizio. L'induzione deve appoggiarsi sulla teoria della probabilità, non potendo mai rendere una proposizione altro che probabile. Non si vede però come la teoria della probabilità possa svilupparsi, senza presupporre la validità delle leggi aritmetiche.[1]

11. L' "INNATO" DI LEIBNIZ Leibniz[2] ritiene invece che le verità necessarie, sul tipo di quelle trovate in aritmetica, debbano ricondursi a princípi che non si possono dimostrare per mezzo di esempi né, quindi, avvalendosi della testimonianza dei sensi, sebbene senza questi ultimi non sarebbe venuto in mente a nessuno di pensarli. "Tutta l'aritmetica è innata nella nostra mente, e si trova virtualmente in noi." Spiega poi

[1] [L'analisi dei rapporti fra induzione e calcolo delle probabilità può dirsi uno dei problemi di massima attualità della logica moderna, problema a cui forniscono uno speciale interesse le larghe applicazioni del calcolo delle probabilità nelle recenti teorie della fisica atomica. Una discussione assai accurata di esso venne compiuta da Hans Reichenbach (si veda per esempio *Wahrscheinlichkeitslehre*, Leida 1935): questa discussione portò Reichenbach, in pieno accordo con le vedute di Frege, a ripudiare integralmente l'interpretazione psicologistica del metodo induttivo (interpretazione che vorrebbe ridurre tale metodo al rango di semplice consuetudine mentale). I rapporti fra induzione e probabilità risultano però — secondo Reichenbach — piú complessi di quanto non fosse stato previsto da Frege; essi possono venire cosí schematizzati: una formulazione criticamente esatta della regola di induzione presuppone la conoscenza di alcuni concetti-base del calcolo delle probabilità e in genere dell'Analisi (in ispecie la conoscenza del concetto di limite); viceversa un giudizio di probabilità, giudizio effettivo su una data serie illimitata di eventi, implica sempre un ragionamento per induzione. La possibilità, contro cui polemizza Frege, di fondare le leggi matematiche sull'induzione, resta comunque esclusa; si può dire che essa è ormai completamente fuori discussione.]

[2] BAUMANN, *op. cit.*, vol. 2, pp. 13 sg.; LEIBNIZ, ed. Erdmann, pp. 135, 208 sg.

in un altro passo come debba intendersi il termine "innato": "È falso che tutto ciò che si impara non possa essere innato in noi. Le verità dei numeri sono in noi, e ciò malgrado le impariamo, sia perché le facciamo scaturire dalla loro sorgente quando le impariamo con metodo dimostrativo (il che prova per l'appunto che sono innate) sia..."[1]

Le leggi dell'aritmetica sono sintetiche a priori oppure analitiche?

12. KANT, BAUMANN, LIPSCHITZ, HANKEL. L'INTUIZIONE INTERNA COME BASE DELLA CONOSCENZA Tenendo conto, oltreché dell'antitesi a priori - a posteriori, anche di quella analitico-sintetico, si ottengono quattro combinazioni possibili, una delle quali però

analitico a posteriori

si esclude di per sé. Quanto alla combinazione

sintetico a posteriori,

essa viene eliminata dalla precedente discussione della teoria di Mill. Ora non ci rimangono dunque da studiare che due possibilità

sintetico a priori

e

analitico.

In favore della prima si è pronunciato Kant. Scegliendo questa via non ci rimane altro che invocare, quale ultimo fondamento della conoscenza, un'intuizione pura, sebbene sia poi difficile dire se questa risulti spaziale o temporale, o, in caso contrario, di qual altro genere possa essere.[2]

[1] BAUMANN, *op. cit.*, vol. 2, p. 38; LEIBNIZ, ed. Erdmann, p. 212.

[2] [La critica della filosofia delle matematiche di Kant, accennata nei paragrafi 5 e 12 del presente capitolo verrà ripresa, in forma più sistematica, nei paragrafi 88 e 89 del capitolo 6. Il motivo centrale di essa è l'accusa, mossa da Frege a Kant, di non aver capito la vera natura e importanza dei giudizi analitici, e di aver quindi interpretato le proposizioni aritmetiche come giudizi sintetici a priori, introducendo cosí qualcosa di non razionale (l'intuizione) in ciò che è, a rigore, puramente razionale. L'argomento venne riesaminato, non molti anni or sono, con notevole profondità, da un eminente kantiano della scuola di Marburg, Paul Natorp. Egli riconosce il valore delle obiezioni di Frege, ma oppone che Frege interpreta il testo di Kant in senso troppo letterale, lasciandosi sfuggire il carattere di "funzione originaria del pensiero" che, secondo la scuola di Marburg, spetta alla sintesi a priori di Kant. Inoltre ciò cui Frege dà il nome di giudizio analitico è in realtà, secondo Natorp, sintetico, poiché risulta qual-

Baumann [1] si rivela d'accordo con Kant, per quanto faccia appello a una base un po' diversa.

Anche secondo Lipschitz [2] le proposizioni che affermano l'indipendenza del numero di un gruppo dal modo di contarne gli individui, e le proprietà commutativa e associativa degli addendi di una somma, traggono origine dall'intuizione interna.

Hankel [3] fonda la teoria dei numeri reali su tre proposizioni-base, cui attribuisce il carattere di nozioni comuni: "Esse possono venir spiegate in modo da risultare completamente evidenti; sono valide per tutti i campi di grandezze, secondo quel che ci dice la intuizione pura della grandezza; possono, senza perdere i loro caratteri, venir trasformate in definizioni, dicendo: per addizione di grandezze si intende un'operazione su di esse, che rende soddisfatte quelle tre proposizioni."

Quest'ultimo asserto nasconde però qualcosa di oscuro. Forse è possibile costruire la definizione voluta da Hankel; essa tuttavia non può certamente tenere il posto di quelle tre proposizioni. Infatti, al momento di applicarla ci si dovrebbe sempre domandare: sono o non sono i numeri delle grandezze? È o non è, ciò che suol chiamarsi addizione fra numeri, un'addizione nel nuovo senso definito da Hankel? E per rispondere occorrerebbe proprio sapere già in precedenza se quelle proposizioni valgano o no per i numeri.

Va inoltre osservato che l'espressione "intuizione pura della grandezza" non può soddisfarci. Se consideriamo tutto ciò che suol chiamarsi grandezza — numeri, lunghezze, aree, volumi, angoli, curvature, masse, velocità, forze, intensità di luce, intensità di corrente elettrica, ecc. — non troviamo certo difficoltà a comprendere come mai si possano subordinare queste varie entità al concetto di grandezza; malgrado questo ci è impossibile riconoscere per esatta l'espressione "intuizione

cosa di essenzialmente fecondo, come afferma con insistenza lo stesso Frege. Se ne conclude che l'opposizione fra Kant e Frege, almeno per quanto riguarda la parte generale delle loro teorie, deve dirsi — secondo Natorp — piú apparente che effettiva. Invece per quanto riguarda gli sviluppi particolari dell'aritmetica, e in ispecie le definizioni dello 0, dell'1 e del 2, Natorp ritiene inaccettabile la via proposta da Frege. Si veda: *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften* [I fondamenti logici delle scienze esatte] (Teubner, Lipsia 1910) cap. 4, §§ 4 e 5.

[1] BAUMANN, *op. cit.*, vol. 2, p. 669.

[2] R. O. S. LIPSCHITZ, *Lehrbuch der Analysis* [Trattato di analisi] (Cohen, Bonn 1877) vol. 1, p. 1.

[3] H. HANKEL, *Theorie der complexen Zahlensysteme* [Teoria dei sistemi numerici complessi] (Voss, Lipsia 1867) pp. 54 sg.

di grandezza" e tanto meno l'altra "intuizione pura di grandezza". Io non riesco proprio ad ammettere un'intuizione del numero 100 000, e ancor meno un'intuizione del numero in generale o della grandezza in generale.

È troppo facile appellarsi all'intuizione interna ogniqualvolta non si può trovare alcun altro fondamento per le proprie affermazioni. In tutti questi casi, però, si dovrebbe porre la massima cura onde non perder d'occhio il senso preciso del termine "intuizione".

Kant lo definisce nella sua *Logica* [1] con le seguenti parole:

"L'intuizione è una rappresentazione particolare (*repraesentatio singularis*), mentre il concetto è una rappresentazione generale (*repraesentatio per notas communes*) o rappresentazione riflessa (*repraesentatio discursiva*)."

Qui non si fa parola di alcun rapporto con la sensibilità; esso viene invece aggiunto nell'estetica trascendentale, poiché senza questo rapporto l'intuizione non potrebbe servire di base conoscitiva per i giudizi sintetici a priori. Nella *Critica della ragion pura* sta scritto infatti: [2]

"Gli oggetti ci sono dunque dati per mezzo della sensibilità, ed essa sola ci fornisce intuizioni."

Ne concludiamo che il senso del nostro termine è anzi piú ampio nella *Logica* di Kant che non nella sua *Estetica trascendentale.* Stando al primo, sarebbe forse possibile attribuire il nome di intuizione al numero 100 000, poiché questo numero non è certamente un concetto generale. Si vede però subito che, cosí intesa, l'intuizione non può in alcun modo servire di fondamento alle leggi aritmetiche.

13. Differenza fra aritmetica e geometria In genere, sarà opportuno non esagerare l'affinità fra aritmetica e geometria. Contro questa tendenza ho già citato un brano di Leibniz.[3]

Un punto geometrico, considerato in sé stesso, non ha nulla che lo distingua dagli altri; né diversamente accade per le rette e i piani. È possibile distinguere fra loro piú punti, piú rette o piú piani, soltanto quando essi vengono colti simultaneamente in una medesima intui-

[1] I. Kant, *Logik*; ed. Hartenstein, vol. 8, p. 88.

[2] I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*; ed. Hartenstein, vol. 3, p. 55.

[3] [Si veda § 10.]

zione. Che in geometria si ricavino dei teoremi generali dall'intuizione, lo si spiega facilmente perché i punti, le rette e i piani intuiti non hanno alcuna speciale particolarità e quindi possono valere come rappresentanti del loro intero genere.

Ben diversamente sta invece la cosa coi numeri, dato che ognuno di essi ha la sua particolarità caratteristica. E non è facile stabilire senza ulteriori indagini fin dove un determinato numero possa rappresentare gli altri, e dove invece si facciano valere le sue proprietà individuali.

14. CONFRONTO DELLE VERITÀ PRENDENDO COME TERMINE DI PARAGONE IL RISPETTIVO CAMPO DI VALIDITÀ Anche il confronto fra le verità aritmetiche, geometriche, ecc., prendendo come termine di paragone il rispettivo campo di validità, parla contro l'ipotesi che le leggi aritmetiche siano di natura empirica e sintetica.

Le proposizioni di carattere sperimentale sono valide nel campo del fisico e del psichico; le verità geometriche possono venir applicate a tutto ciò che è spazialmente intuibile, sia esso reale, o sia il prodotto della nostra immaginazione. Le piú stravaganti fantasie prodotte dalla febbre, le piú ardite costruzioni del mito e dei poeti (che fanno parlare gli animali e restar ferme le stelle, che fanno nascere gli uomini dalle pietre e le piante dagli uomini, che insegnano come ci si possa sollevare dal pantano afferrandosi ai propri capelli) soddisfano tutte però, fin quando rimangono intuibili, agli assiomi della geometria. Soltanto il pensiero per concetti può in certo modo liberarsi da essi, ammettendo per esempio uno spazio a quattro dimensioni, o uno spazio a curvatura positiva. Le teorie cosí costruite non sono affatto inutili, ma certo abbandonano completamente il terreno dell'intuizione. Ché, se talvolta ricorre anche in esse qualche elemento intuitivo, si tratta però sempre di intuizioni dello spazio euclideo, di quell'unico spazio di cui riusciamo a vedere le figure. Con questa sola differenza: che, nelle geometrie anzidette, la figura non viene considerata per ciò che effettivamente è, ma come simbolo per qualcosa di diverso; per esempio si dà il nome di retta o di piano a ciò che di fatto viene intuito come curvo. Tutt'al contrario, il pensiero per concetti può ammettere l'opposto di ciò che viene asserito da questo o quell'assioma geometrico, senza cadere per ciò in contraddizione, purché sappia trarre tutte le conseguenze logiche

dalle ipotesi ammesse. Una tale possibilità mostra che gli assiomi geometrici sono indipendenti fra loro e dalle leggi logiche fondamentali, per la qual cosa risultano sintetici.[1]

Orbene: si può ripetere lo stesso per le leggi fondamentali dell'aritmetica? La negazione di una di esse non trascinerà con sé la confusione piú generale? Sarebbe ancora possibile il pensiero, allorché si volesse persistere in tal negazione?[2] La base ultima dell'aritmetica non risiede piú a fondo che quella delle nozioni empiriche, piú a fondo che quella della stessa geometria?

Le verità aritmetiche sono valide nel campo di ciò che è numerabile; e questo è il campo piú vasto che possa venir immaginato, poiché comprende in sé, non solamente tutto il reale, non solamente tutto l'intuibile, ma tutto il pensabile. Non saremo costretti a concluderne che le leggi dei numeri debbono trovarsi nel piú intimo rapporto con le leggi del pensiero?

15. Opinioni di Leibniz e di Jevons Dato che, secondo Leibniz, l'a priori coincide con l'analitico, è prevedibile che egli si esprima in favore della natura analitica delle leggi numeriche. In un punto infatti[3] egli sostiene che i vantaggi dell'algebra provengono da un'arte molto superiore, la vera logica. In un altro[4] stabilisce un paragone fra le verità necessarie e quelle casuali da un lato, e le grandezze commensurabili e incommen-

[1] [Mentre l'esame dell'aritmetica compiuto da Frege è straordinariamente moderno, il suo esame della geometria non esce dalla vecchia mentalità; rispetto ad essa, infatti, Frege si mantiene fedele alla lettera del kantismo tradizionale, come riconoscerà esplicitamente egli stesso nel paragrafo 89, parlando dei meriti di Kant verso la matematica. Col cercar di fondare la geometria euclidea sull'intuizione, Frege non si accorge che, a rigore, non si trovano soddisfatti, nello spazio intuito, né i postulati di Euclide né quelli di alcuna altra geometria; egli non si accorge cioè che tale spazio risulta non una costruzione logico-scientifica, ma qualcosa di tutt'altra natura. La critica moderna dimostra invece, che, a voler essere precisi, non si può nemmeno parlare dello spazio intuito come se fosse qualcosa di unico, essendovi, di fatto, molti spazi intuiti diversi fra loro. Si veda per esempio M. Schlick, *Allgemeine Erkenntnislehre* [Teoria generale della conoscenza], 2ª ed. (Springer, Berlino 1925) § 38].

[2] [L'impostazione di queste domande è perfettamente giusta; però la risposta, che oggi si dà a esse, è molto diversa da quella che Frege aveva in mente. Senza dubbio tutto il nostro pensiero, cioè il nostro linguaggio, la nostra logica, è inscindibilmente legato all'aritmetica, nel senso che è impossibile mutare l'una senza mutare anche l'altro. Però questo non implica che l'aritmetica risulti davvero immutabile; infatti lo stesso nostro linguaggio, la stessa nostra logica, non sono assoluti, ma sono qualcosa che può venir posta nell'uno o nell'altro modo. La confusione nascerebbe dal voler mutare le sole regole aritmetiche.]

[3] Baumann, *op. cit.*, vol. 2, p. 56; Leibniz, ed. Erdmann, p. 424.

[4] Baumann, *op. cit.*, vol. 2, p. 57; Leibniz, ed. Erdmann, p. 83.

surabili dall'altro, esprimendo il parere che, per le verità necessarie, risulti sempre possibile una dimostrazione o una riduzione a identità. Questi asserti perdono tuttavia un po' d'importanza, se si pensa che Leibniz tende a riguardare tutte le verità come dimostrabili:[1] "...ogni verità possiede la sua dimostrazione a priori, ricavabile dal concetto dei termini che la compongono, sebbene non sia sempre in nostro potere pervenire a questa analisi". Però il paragone con le grandezze commensurabili e incommensurabili torna senza dubbio ad elevare una barriera, insuperabile almeno per noi, fra verità necessarie e verità casuali.

A favore della natura analitica delle leggi numeriche si esprime, in forma molto decisa, W. Stanley Jevons:[2] "Il numero — egli dice — è soltanto una differenziazione logica, e l'algebra non è che una logica altamente sviluppata."

16. MILL SVALUTA IL RICORSO ALL' "ABILE USO DELLA LINGUA". RISPOSTA: I SEGNI NON RISULTANO VACUI PER IL SOLO FATTO CHE NON DENOTANO NULLA DI SENSIBILE Anche la teoria ora esposta presenta però alcune difficoltà. Questa costruzione della scienza dei numeri, cosí elevata, cosí complessa e ancora sempre in continuo sviluppo, dovrà proprio avere le sue radici in pure identità? Per quale via possono riuscire le forme vuote della logica a ricavare da sé stesse un tal contenuto?

Mill pensa: "La teoria secondo cui è possibile, con un abile uso della lingua, scoprire dei fatti che sono in grado di svelarci i segreti processi della natura, è cosí contraria al sano intelletto umano, che occorre una lunga elaborazione filosofica per poterla ritenere vera."

L'obiezione sarebbe giustissima, se, mentre si usa cosí abilmente la lingua, non si pensasse a nulla. Il fatto è però che ben pochi condividono questo formalismo, contro cui si scaglia Mill. Chiunque fa uso di parole o segni matematici, pretende che essi significhino qualcosa, e nessuno si attende che da segni vacui scaturisca alcunché fornito di significato. È senza dubbio possibile che un matematico esegua dei calcoli assai

[1] BAUMANN, *op. cit.*, vol. 2, p. 57; LEIBNIZ, ed. Pertz, vol. 2, p. 55.

[2] W. S. JEVONS, *The Principles of Science* [I princípi della scienza], 3ª ed. (Macmillan, Londra 1879) p. 156.

lunghi, senza vedere nei suoi segni nulla di intuibile, nulla di percepibile coi sensi. Questo però non ci prova ancora che tali segni risultino privi di significato; è infatti possibile stabilire una netta distinzione fra i segni e il loro contenuto, anche se questo non è esprimibile altrimenti che per mezzo di tali segni. È sufficiente, a tale scopo, sapere che si sarebbero potuti scegliere altri segni per denotare la stessa cosa. È sufficiente sapere come si debba operare logicamente con il contenuto, espresso da quei segni, e sapere — quando se ne vogliano fare delle applicazioni fisiche — come debba avvenire il trapasso dai segni ai fenomeni. Ma non in tali applicazioni va cercato il vero e proprio senso delle proposizioni; in esse infatti si perde sempre una notevole parte della loro generalità; in ogni applicazione vi è sempre qualcosa di particolare, che, in un'altra applicazione, può venire sostituito da alcunché di diverso.

17. Insufficienza dell'induzione. Si prospetta la possibilità che le leggi aritmetiche siano giudizi analitici. Quale sarebbe allora la loro utilità. Valore dei giudizi analitici Malgrado tutte le critiche alla deduzione, è impossibile negare che le leggi fondate con puro metodo induttivo non bastano. Si tratta infatti di ricavare da esse delle nuove proposizioni, non contenute in alcuna di tali leggi singolarmente prese. Né ci salva l'ipotesi che le nuove proposizioni si trovino in qualche modo nascoste nelle leggi anzidette, se considerate nel loro insieme; essa infatti non ci dispensa dalla fatica di trar fuori da questo insieme ognuna di quelle proposizioni e di enunciarla di per sé.

Si apre pertanto la seguente possibilità: invece di collegare direttamente una serie di ragionamenti a un fatto, è possibile lasciare indecisa l'esistenza di questo fatto, e inserire il suo contenuto in quei ragionamenti come la loro condizione. Se in tal modo si sostituiscono, in una serie di ragionamenti, tutti i fatti con delle condizioni, si giunge al risultato che una conseguenza è fatta dipendere soltanto da una serie di condizioni. La verità cosí ottenuta si troverebbe dunque fondata per mezzo del solo pensiero o — per esprimerci con Mill — per mezzo di un abile uso della lingua.

Non è impossibile che le leggi numeriche siano di questo genere. Esse risulterebbero allora giudizi analitici, senza che ciò significhi che esse

siano state scoperte per mezzo del solo pensiero. Qui invero non si fa questione del modo di scoprirle, ma del modo di fondarle; ovvero, come Leibniz scrive: [1] "Si tratta, non della storia delle nostre scoperte, che è diversa nei diversi individui, ma dei nessi e dell'ordine naturale delle verità, che è sempre il medesimo." All'osservazione rimarrebbe allora il solo compito finale di decidere se le condizioni contenute nelle leggi cosí fondate si trovini o no soddisfatte nell'esperienza.

Questo modo di procedere condurrebbe dunque, in conclusione, allo stesso punto cui saremmo pervenuti collegando direttamente la serie dei nostri ragionamenti ai fatti osservati. In molti casi però esso risulta preferibile, perché ci conduce a una proposizione generale, che può riuscire applicabile anche al di là dei fatti specificatamente considerati.

Nell'ipotesi qui prospettata, le verità dell'aritmetica si comporterebbero, rispetto a quelle della logica, press'a poco come si comportano i teoremi rispetto agli assiomi della geometria. Ognuna dovrebbe contenere, riassunta in sé, una intera serie di ragionamenti da usarsi in future applicazioni; la sua utilità consisterebbe in ciò, che non è piú necessario rifare a uno a uno quei singoli ragionamenti, ma è possibile enunciare d'un tratto il risultato dell'intera serie.[2] Avuto riguardo al poderoso sviluppo delle teorie aritmetiche e alle loro molteplici applicazioni, non sarebbe piú dunque possibile continuare a svalutare, come molti fanno, i giudizi analitici, né mantenere in vita la leggenda dell'infecondità della logica pura.

Otterremo, a mio parere, un risultato di non scarsa importanza, se riusciremo a sviluppare in tutti i suoi particolari l'opinione ora appena accennata, portandovi tanto rigore da non dar piú luogo al benché minimo dubbio.

[1] LEIBNIZ, *Nouveaux essais* cit.; ed. Erdmann, p. 360.

[2] È sorprendente che anche Mill sembri, in qualche passo, di questa medesima opinione (*op. cit.*, lb. 2, cap. 6, § 4). Il suo buon senso riesce talvolta a fargli abbandonare i soliti pregiudizi in favore dell'empirico. Questi però tornano ben presto a rimettere tutto in confusione, poiché gli fanno scambiare le applicazioni dell'aritmetica con l'aritmetica stessa. Egli sembra non rendersi conto che un giudizio ipotetico può essere vero, anche allorché la sua condizione non è soddisfatta.

3.

Opinioni di alcuni scrittori sul concetto di numero naturale

[L'analisi compiuta da Frege nel presente capitolo ci porta a concludere che il numero naturale non è qualcosa di spaziale o fisico, né qualcosa di soggettivo come le rappresentazioni, ma è essenzialmente oggettivo, e che la base di questa sua oggettività risiede nella ragione. Segnaliamo per il suo acume e la sua precisione il paragrafo 22, in cui sono poste in luce le differenze che corrono fra l'attribuire agli oggetti una qualità fisica (colore, peso, ecc.) e l'attribuir loro un qualche numero. Queste osservazioni preparano la teoria, che sarà poi svolta in altri capitoli, secondo cui il numero può venire riferito esclusivamente ai concetti, non agli oggetti. Molto importante, per il pensiero generale di Frege, il paragrafo 26, in cui viene discusso e determinato il concetto filosofico di oggettività.]

18. NECESSITÀ DI SOTTOPORRE A UN ESAME RIGOROSO IL CONCETTO GENERALE DI NUMERO NATURALE Volgendoci ora a esaminare gli oggetti primi dell'aritmetica, dobbiamo subito distinguere i singoli numeri 3, 4, ecc. dal concetto generale di numero naturale. Già constatammo che il miglior modo di ottenere i singoli numeri è di ricavarli, seguendo il metodo di Leibniz, Mill, Grassmann e altri, dall'unità aumentata via via di altre unità. Abbiamo visto però che tali definizioni rimangono incomplete, fin quando non si chiarisca che cosa intendiamo per unità e per aumento di una unità. Abbiamo riconosciuto inoltre che, per dedurre le formule numeriche dalle anzidette definizioni, sono indispensabili certe proposizioni generali; ed è chiaro che queste, proprio per la loro generalità, non possono ricavarsi dalle definizioni dei singoli numeri, ma soltanto dal concetto generale di numero naturale. Nel presente capitolo vogliamo per l'appunto sottoporre questo concetto a un esame piú rigoroso.

A tale scopo dovremo probabilmente discutere anche il concetto di unità e di aumento di un'unità, sicché pure le definizioni dei singoli numeri subiranno qualche ritocco.

19. La definizione di numero naturale non può essere di carattere geometrico   Prima di tutto voglio oppormi al tentativo di definire il numero come rapporto fra grandezze geometriche (lunghezze o superfici). È ovvio che si è fatto ricorso a esso, sperando di facilitare in tal modo le molte applicazioni dell'aritmetica alla geometria; cosí si riusciva a porre nel piú intimo rapporto gli inizi stessi delle due scienze.

Newton [1] vuole che si intenda per numero, non tanto un insieme di unità, quanto il rapporto esatto fra una qualsiasi grandezza e un'altra della stessa specie, presa come unità di misura. Orbene: si può concedere che per questa via riusciremmo a spiegare il numero in un senso generale, entro cui rientrano pure le frazioni e i numeri irrazionali; va osservato però che essa presuppone come già conosciuti i concetti di grandezza e di rapporto fra grandezze. Ma è noto che Euclide ha proprio bisogno del concetto di equimultipli per definire l'uguaglianza di due rapporti fra grandezze, e che questo concetto discende a sua volta da quello di uguaglianza fra numeri naturali. Se ne conclude dunque, che la spiegazione precisa del concetto di numero naturale risulta tutt'altro che superflua.

Potrebbe darsi — obietterà qualcuno — che l'uguaglianza di due rapporti fra grandezze geometriche fosse definibile anche in modo diverso da quello di Euclide, epperò indipendentemente dal concetto di numero naturale. Ma allora resterebbe dubbio in quale relazione si trovi il numero cosí definito per via geometrica con il numero di cui si fa uso nella vita comune. Quest'ultimo resterebbe quindi completamente scisso dalla scienza. Eppure sembra ben lecito pretendere che l'aritmetica debba riannodarsi in qualche modo a qualsiasi applicazione del numero, anche se l'applicazione in sé non è precisamente affar suo. Lo stesso conteggio comune deve trovare nella scienza la base del suo modo di procedere. Né meno grave è la domanda se il concetto geometrico di numero possa bastare alla stessa aritmetica,

[1] Baumann, *op. cit.*, vol. I, p. 475.

intesa come scienza, quando essa si trova a parlare del numero di radici di un'equazione, o del numero degli interi che sono primi con un intero dato e minori di esso, o di questioni analoghe. Si vede subito, viceversa, che il numero, che risponde alla domanda "quanti?", è pure in grado di determinare quante unità di lunghezza sono contenute in una lunghezza assegnata. E anche il calcolo coi numeri negativi, fratti, e irrazionali si riconduce al calcolo coi numeri naturali.

Ma Newton, definendo il numero come rapporto fra grandezze, voleva forse intendere per grandezze, non soltanto quelle geometriche, bensí anche gli insiemi. Allora però la sua spiegazione diventa inefficace, perché, fra le due espressioni "numero degli elementi di un insieme" e "rapporto fra l'insieme e una delle unità che lo compongono", l'ultima non è affatto piú chiara della prima.

20. È IL NUMERO DEFINIBILE? HANKEL, LEIBNIZ Il primo problema sarà, se il numero sia definibile. Hankel è di parere contrario:[1] "Ciò che suol esprimersi col dire che pensiamo, o poniamo, un oggetto una volta, due volte, tre volte, ecc. è qualcosa di indefinibile per la semplicità che spetta, di principio, al concetto del porre." Rispondiamo però che qui non si tratta del concetto del porre, quanto del porre una volta, due volte, ecc. Se potesse venir definito quest'ultimo, poco ci turberebbe la indefinibilità del primo.

Leibniz propende a considerare il numero, almeno approssimatamente, come idea "adeguata", cioè come idea cosí chiara, che tutto quanto fa parte di essa è pure chiaro.

Se in genere vi è la tendenza a considerare il numero naturale come indefinibile, ciò dipende però, non tanto da motivi insiti nella cosa stessa, quanto dalla cattiva riuscita dei tentativi rivolti a tale scopo.

I numeri naturali costituiscono una proprietà delle cose esterne?

21. OPINIONI DI MORITZ CANTOR E DI ERNST SCHRÖDER Cerchiamo per lo meno di caratterizzare la posizione che il concetto di numero naturale ha fra gli altri concetti. Nella lingua i numeri compaiono per

[1] HANKEL, *op. cit.*, p. 1.

lo piú sotto forma di aggettivi e funzionano da attributi, allo stesso modo che i termini "duro, pesante, rosso", che denotano proprietà degli oggetti esterni. Sorge quindi naturale la domanda, se occorra concepire cosí anche i numeri, sicché il concetto di numero naturale vada posto sullo stesso piano per esempio del concetto di colore.

Tale sembra l'opinione di Moritz Cantor,[1] allorché dice che la matematica è una scienza empirica, traendo inizio dallo studio di oggetti del mondo esterno. Soltanto con l'astrazione si otterrebbe, secondo lui, il numero.

Ernst Schröder ritiene [2] che il numero riproduca la realtà, sia ricavato da essa, in quanto le unità dell'aritmetica starebbero a rappresentare gli oggetti unitari. Questa rappresentazione degli oggetti per mezzo delle unità, è ciò che egli chiama astrazione. In essa le unità ritrarrebbero gli oggetti solo rispetto alla loro frequenza, separando questa dalle altre proprietà delle cose (dal colore, dalla forma, ecc.). In questa spiegazione il termine frequenza è soltanto un sinonimo del termine "numero intero". Schröder pone dunque la frequenza, cioè il numero, sullo stesso piano del colore e della forma, considerandola essa pure come una proprietà delle cose.

22. OPINIONE CONTRARIA DI BAUMANN: SECONDO LUI GLI OGGETTI ESTERNI NON RAPPRESENTANO DELLE VERE UNITÀ. IL NUMERO CHE SPETTA A UN OGGETTO DIPENDE PALESEMENTE DAL NOSTRO MODO DI CONCEPIRE

Baumann [3] respinge l'opinione che i numeri siano concetti ricavati dalle cose esterne: "Infatti le cose esterne non presentano alcuna proprietà rigorosa; esse ci danno gruppi separati o punti sensibili, ma questi gruppi e punti possono a loro volta venire considerati come delle nuove molteplicità." In realtà, mentre nessuno è in grado di modificare sia pure minimamente il colore o la durezza di un oggetto, mutando solo il proprio modo di concepirlo, è invece possibile concepire l'*Iliade* vuoi come un unico poema, vuoi come ventiquattro canti, vuoi come un gran numero di versi.

[1] M. CANTOR, *Grundzüge einer Elementarmathematik* [Lineamenti di matematica elementare], p. 2, § 4. Similmente si esprime LIPSCHITZ, *op. cit.*, p. 1.

[2] SCHRÖDER, *op. cit.*, pp. 6, 10 sg.

[3] BAUMANN, *op. cit.*, vol. 2, p. 669.

Non si parla in senso completamente diverso quando si dice che le foglie di un albero sono 1000 e quando si dice che sono verdi? Il colore verde è da noi attribuito ad ogni singola foglia, mentre cosí non si può dire del numero 1000. Né la cosa si chiarisce, raggruppando tutte le foglie dell'albero sotto l'unico nome di fogliame: anche questo è verde ma non è 1000. A chi spetta dunque, a rigor di termini, la proprietà 1000? Si direbbe quasi che non spetta né a ogni singola foglia né alla totalità delle foglie; forse non spetta proprio ad alcun oggetto del mondo esterno?

Se consegno a una persona una pietra, e le dico "determinane il peso", le ho specificato con queste mie parole tutto l'oggetto della sua ricerca. Se invece le dò in mano un mazzo di carte da gioco, e le dico "contalo", non è chiaro se voglio sapere il numero delle carte che compongono il mazzo, o dei giochi interi di carte in esso contenuti, ovvero quanto valgano queste carte contandone i punti in base alle regole di qualcuno dei giochi piú in uso. Dandole in mano il mazzo di carte, non le ho ancora specificato esattamente l'oggetto della sua ricerca; devo aggiungere a tale scopo una parola, "carte", "giochi" o "punti". Nemmeno è possibile asserire che i diversi numeri stiano qui l'uno accanto all'altro come i diversi colori. Si può infatti additare una superficie colorata, senza aver bisogno di aggiungere alcuna parola per distinguerla dalle altre; invece, per indicare un numero, occorre proprio parlare.

Se un medesimo oggetto può, a pari diritto, venir chiamato verde o rosso, ciò prova nel miglior modo che esso non è, a rigor di termini, il vero portatore né dell'attributo verde né del rosso. L'attributo verde spetta soltanto a una superficie che sia esclusivamente verde. In modo analogo concluderemo che un oggetto, cui a pari diritto possono attribuirsi diversi numeri, non è il vero portatore di alcuno di essi.

C'è quindi una differenza essenziale fra colore e numero, poiché un dato colore, per esempio l'azzurro, spetta a una superficie indipendentemente dal nostro arbitrio. Il colore è una capacità di riflettere certi raggi luminosi e di assorbirne, in grado maggiore o minore, certi altri; in ciò il nostro modo di concepire non può mutare proprio nulla. Invece non si può affermare che al mazzo di carte da gioco poco fa considerato spetti, in sé stesso, il numero 1 o il 100, o un altro numero

qualsiasi; gliene spetterà l'uno o l'altro, secondo il nostro modo di concepirlo, e nessuno gli potrà venir attribuito come un vero predicato. È chiaro infatti che dipende da una convenzione, se un certo gruppo di carte debba chiamarsi gioco completo o no; e il mazzo da noi considerato non può sapere proprio nulla di essa. Tenuto conto di una certa convenzione, noi troveremo per esempio che quel mazzo contiene due giochi completi; ma chi non conoscesse la nostra convenzione, troverebbe forse in quel mazzo un altro numero qualunque piuttosto che proprio il due.

23. INSOSTENIBILITÀ DELL'OPINIONE DI MILL CHE IL NUMERO COSTITUISCA UNA PROPRIETÀ DEGLI AGGREGATI DI OGGETTI Il problema di specificare a chi il numero possa venir attribuito come proprietà, è cosí risolto da Mill: [1]

"Il nome di un numero denota una proprietà, spettante all'aggregato di oggetti, cui attribuiamo tale nome. Questa proprietà è il modo caratteristico secondo cui l'aggregato risulta riunito, o può venire scomposto in parti."

Qui bisogna osservare innanzi tutto che l'articolo determinativo premesso alle parole "modo caratteristico" è un errore; vi sono infatti diversi modi, nei quali può venire scomposto un aggregato, e non ve n'è alcuno piú caratteristico degli altri. Per esempio un fascio di paglia può venire scomposto: o tagliando in due tutti gli steli, o sciogliendo il fascio negli steli che lo costituiscono, o raggruppando questi steli in due fasci piú piccoli. Possiamo forse dire che un mucchio di 100 granelli di sabbia risulta riunito come un fascio di 100 steli di paglia? Eppure all'uno e all'altro viene attribuito il medesimo numero.

Nell'espressione "uno stelo di paglia" il numero uno non ci dice proprio nulla circa la composizione di questo stelo a base di cellule o di molecole. Un numero ancor maggiore di difficoltà sorge dallo zero.

Sarà proprio necessario, per contare gli steli di paglia, riunirli in un fascio? È proprio indispensabile, perché abbia senso l'espressione "il numero dei Tedeschi ciechi", raccogliere in un gruppo tutte le persone cieche esistenti in Germania? Dovremo dire che mille granelli

[1] MILL, *op. cit.*, lb. 3, cap. 24, § 5.

di segale, dopo che sono stati seminati, non sono piú mille? È noto che si enumerano, senza difficoltà, le varie dimostrazioni di un medesimo teorema, eppure non sembra possibile formare con esse un vero aggregato, nel senso preciso di questo termine. La stessa obiezione si può ripetere per gli eventi, e ciò malgrado essi vengono contati, tanto se sono simultanei, quanto se sono separati da migliaia di anni.

24. Vasta applicabilità del numero. Mill, Locke. Il numero come figura metafisica incorporea secondo Leibniz. Se il numero fosse qualcosa di sensibile, non potremmo applicarlo agli oggetti soprasensibili Nell'applicabilità molto piú vasta del numero, si può rinvenire un altro motivo per non porlo sullo stesso piano del colore e della durezza.

La verità che tutto quanto è composto di parti può anche venire costituito dalle parti di queste parti, è valida — secondo Mill [1] — per tutti i fenomeni naturali, perché tutti potrebbero venir contati. Ma sorge naturale la domanda: non esistono pure molte altre cose, le quali possono venir contate? Scrive Locke: [2] "Il numero può venir applicato alle persone umane, agli angeli, alle azioni, ai pensieri, a ogni oggetto che esista o che possa venir pensato." Leibniz [3] combatte l'opinione degli scolastici, secondo cui il numero non risulterebbe applicabile agli esseri incorporei, e afferma invece che esso è, per cosí dire, una figura incorporea, formata dalla riunione dei piú diversi oggetti; si origina, per esempio, il numero quattro, riunendo Dio, un angelo, un uomo e il movimento. Egli pensa, di conseguenza, che il numero sia qualcosa di assolutamente generale e rientri nella metafisica. In un altro passo scrive: [4] "Ciò che non ha forza e potenza, non può venir pesato; ciò che non ha parti, non può venir misurato; nulla esiste però che non possa venir contato. Il numero è quindi, per cosí dire, la figura metafisica."

Sarebbe senza dubbio molto strano che una proprietà, ricavata dagli oggetti esterni, potesse venir applicata, senza variazioni di senso, a

[1] *Ibid.*
[2] Baumann, *op. cit.*, vol. 1, p. 409.
[3] *Ibid.*, vol. 2, p. 56.
[4] *Ibid.*, vol. 2, p. 2.

eventi, a rappresentazioni e a concetti. Proprio come se si volesse parlare di un evento solubile, di una rappresentazione azzurra, di un concetto salato, di un giudizio viscoso.

È assurdo pretendere che valga per il soprasensibile ciò che per sua natura appartiene al mondo del sensibile.

Allorché guardiamo una superficie azzurra, riceviamo una ben precisa impressione, quella appunto che viene espressa dal termine "azzurro" e di nuovo l'abbiamo ogni qualvolta cade sotto i nostri occhi un'altra superficie azzurra. Volendo ammettere che, allorquando parliamo dei tre lati di un triangolo, si produce in noi in modo analogo qualcosa di sensibile, che corrisponde al termine "tre", si dovrà ammettere che lo stesso accade quando parliamo di tre concetti; dunque qualcosa di soprasensibile (un certo gruppo di concetti) dovrebbe contenere in sé qualcosa di sensibile (che corrisponde al termine "tre"). Si può certo ammettere che alla parola triangolo corrisponda una particolare impressione sensoriale; qui però la parola triangolo va presa nella sua interezza. In essa non vediamo immediatamente il tre; ma vediamo qualcosa, cui può connettersi una certa attività spirituale, che porta a un giudizio ove si parla del numero tre.

Con qual mezzo — tanto per fare un esempio — riusciamo ad assicurarci che tutte le possibili figure del sillogismo sono proprio tre, come propose Aristotele? Forse per mezzo degli occhi? No, certamente, perché noi vediamo tutt'al piú certi segni che rappresentano le varie figure del sillogismo, ma non vediamo i sillogismi in sé. Come possiamo dunque vedere il loro numero se essi sono invisibili? Forse si penserà che basta vedere i segni, poiché il loro numero è uguale a quello delle figure del sillogismo. Senonché, di dove si apprende una tale uguaglianza? Per poterla riconoscere, bisognerebbe già essere inizialmente in possesso di qualche altro metodo per determinare il numero delle figure del sillogismo. Oppure vorremo ammettere che l'espressione "Le figure del sillogismo sono quattro" non dice né piú né meno dell'espressione "I segni che denotano le figure del sillogismo sono quattro?" No. Intorno ai segni non vi è proprio nulla da dire; nessuno si interessa delle loro proprietà, se queste non esprimono altrettante proprietà degli oggetti designati. Nel nostro caso si osserverà in particolare: potendo la

stessa cosa venir denotata con segni diversi senza alcun errore logico, non è affatto necessario che il numero dei segni coincida con quello degli oggetti denotati.

25. DIFFERENZE FISICHE CHE, SECONDO MILL, INTERCORRONO FRA IL 2 E IL 3. SECONDO BERKELEY IL NUMERO NON ESISTE REALITER NELLE COSE, MA VIENE CREATO DALLO SPIRITO Mentre per Mill il numero è qualcosa di fisico, esso rappresenta per Locke e per Leibniz soltanto un'idea. In realtà, come dice Mill,[1] due mele sono fisicamente diverse da tre, due cavalli sono fisicamente diversi da un cavallo solo, costituiscono cioè senza dubbio fenomeni visibili e sensibili che non possono venir confusi uno con l'altro.[2] Ma basta davvero questo a farci concludere che il 2 e il 3 sono qualcosa di fisico? Si osservi che *un* paio di scarpe e *due* scarpe possono costituire lo stesso fenomeno visibile e sensibile; eppure "2" e "un paio" non sono per certo la stessa cosa, come Mill stranamente sembra credere. Ecco dunque l'esempio di una diversità di numeri a cui non corrisponde alcuna diversità fisica. D'altra parte: come è possibile sostenere che due concetti costituiscono qualcosa che si distingue fisicamente da tre concetti?

Ecco invece ciò che pensa Berkeley:[3] "Va osservato che il numero non è qualcosa di fisso e di determinato, che esista *realiter* nelle cose. Esso è esclusivamente una creazione dello spirito. È lo spirito infatti che prende in considerazione una idea in sé o una combinazione di idee, le dà un nome e in questo modo la fa valere come unità. Questa varia a seconda che lo spirito combina variamente le sue idee; e, come varia l'unità, cosí varia pure il numero, che è soltanto una riunione di unità. Cosí accade che risultino: una finestra = 1; una casa, in cui vi sono molte finestre, ancora = 1; una città, formata di molte case, sempre = 1."

[1] MILL, *op. cit.*, lb. 3, cap. 24, § 5.

[2] A rigor di termini bisognerebbe aggiungere: ciò accade ogniqualvolta essi costituiscono realmente *un* fenomeno. Ma se un tizio possiede un cavallo in Germania e un secondo in America (e non ne possiede altri), egli ha certamente due cavalli, eppure questi non costituiscono, presi insieme, un fenomeno; soltanto ciascuno dei due cavalli, preso di per sé, potrebbe venir detto un fenomeno.

[3] BAUMANN, *op. cit.*, vol. 2, p. 428.

Il numero è qualcosa di soggettivo?

26. La descrizione di Lipschitz, del modo in cui si formano i numeri non regge, e non può sostituire una determinazione del concetto di numero. Il numero non è un oggetto della psicologia, ma è qualcosa di oggettivo Sviluppando il corso di idee accennato nel paragrafo precedente, è facile che si giunga a considerare il numero come qualcosa di soggettivo. Sembra infatti che la descrizione del modo come esso sorge in noi, possa chiarirci qual è la sua essenza. Se si accetta questo punto di vista, la ricerca intorno al concetto di numero si trasforma in una indagine di carattere psicologico.

Caratteristiche, in questo senso, sono le espressioni di Lipschitz: [1] "Chi vuole ottenere una visione sintetica di un dato gruppo di oggetti, deve fissarsi inizialmente su uno determinato di essi, e passare poi ai rimanenti aggiungendoli via via uno dopo l'altro." Queste parole sembrano però assai piú adatte a descrivere come sorge in noi l'intuizione di un complesso di stelle, che non come si forma il concetto di numero. Lo scopo di ottenere una visione sintetica superiore è inessenziale; è infatti dubbio se si possa davvero sostenere che si afferra meglio un determinato gruppo quando si è riusciti a conoscere il numero degli oggetti che lo costituiscono.

Una descrizione dei processi mentali che precedono l'enunciazione di un giudizio numerico, non può mai, anche se esatta, sostituire una vera determinazione del concetto di numero. Non potremo mai invocarla per la dimostrazione di qualche teorema, né apprenderemo da essa alcuna proprietà dei numeri. Ed invero il numero non costituisce un oggetto della psicologia, né può considerarsi come un risultato di processi psichici, proprio come non può considerarsi tale, per esempio, il mare del Nord. È ovvio che l'oggettività di questo mare non risulta minimamente scossa, per il fatto che è in nostro arbitrio tracciare i limiti di quella parte di superficie acquea del globo, cui si vuole attribuire il nome di mare del Nord. Tale arbitrarietà non è un motivo perché si debba studiare il mare del Nord per via psicologica. Cosí anche il numero è qualcosa di oggettivo. Se qualcuno afferma "il mare

[1] Lipschitz, *op. cit.*, p. 1. Io ritengo che Lipschitz voglia qui riferirsi a un processo mentale.

del Nord ha la superficie di 10000 miglia quadrate", non intende certo enunciare alcunché di psicologico, né col termine "mare del Nord" né col termine "10000"; ciò che egli afferma è qualcosa di oggettivo, di indipendente dalle nostre rappresentazioni e in genere dai processi della nostra mente. Se un'altra volta convenissimo di tracciare un po' diversamente i confini del mare del Nord, o di intendere qualcosa d'altro col numero 10000, non diventerebbe per ciò falso quel che prima era vero; in seguito alla nostra decisione, un nuovo contenuto, forse falso, subentrerebbe in luogo di quello precedente vero, ma ciò non muterebbe in alcun modo la verità del primo contenuto.

Il botanico intende asserire qualcosa di altrettanto effettivo, sia quando accenna al numero dei petali di un fiore, sia quando accenna al colore di essi. L'una cosa non dipende dal nostro arbitrio né piú né meno dell'altra. Qui vi è dunque, certamente, una qualche analogia fra numero e colore; ma non per il fatto che numero e colore siano entrambi proprietà degli oggetti percepibili coi sensi, bensí per il fatto che sono entrambi oggettivi.

Io faccio una netta distinzione fra ciò che è oggettivo, e ciò che è palpabile, reale, e occupa uno spazio. Per esempio, l'asse terrestre e il baricentro del sistema solare sono oggettivi; eppure non potrei dire che sono reali come lo è la terra. Si afferma non di rado che l'equatore è una linea ideale; sarebbe però erroneo asserire che è una linea immaginaria. Essa infatti non viene creata dal pensiero, non è l'effetto di un processo psichico; il pensiero serve soltanto a riconoscerla, ad afferrarla. Se il suo nascere coincidesse col suo esser conosciuta, noi non potremmo affermare nulla di essa, riferendo la nostra affermazione a un tempo precedente tale pretesa nascita.

Lo spazio appartiene, secondo Kant, al campo del fenomenico. Sarebbe possibile che altri esseri razionali se lo rappresentassero in modo totalmente diverso dal nostro. Anzi, noi non possiamo nemmeno sapere se esso appaia davvero identico a tutti gli uomini, poiché non siamo in grado di porre l'intuizione dell'uno accanto a quella dell'altro, sí da poterle confrontare. Eppure vi è in esso qualcosa di oggettivo. Tutti riconoscono gli stessi assiomi geometrici, sia pur soltanto in pratica, e debbono riconoscerli per orientarsi nel mondo. Oggettivo è, qui, ciò che risulta conforme a leggi, ciò che è afferrabile dai concetti,

ciò che può venir giudicato, che può venir espresso mediante parole. Ciò che è puramente intuitivo non può venir comunicato.[1]

Se immaginiamo dati, per esempio, due esseri razionali che intuiscano soltanto le proprietà e i rapporti proiettivi (l'appartenenza di tre punti a una retta, di quattro punti a un piano, ecc.), potrebbe darsi benissimo che l'uno vedesse sempre un piano là dove l'altro vede un punto, e un punto dove l'altro vede un piano. Ciò malgrado essi riuscirebbero senza dubbio a intendersi assai bene l'uno con l'altro, né scoprirebbero mai la diversità della loro intuizione, essendo valido nella geometria proiettiva un famoso principio, per cui a ogni proposizione vera ne corrisponde un'altra, pur vera, duale della prima (ottenuta scambiando fra loro le parole punto e piano). Il fatto che i loro pareri potrebbero scostarsi in qualche valutazione estetica, non basterebbe a provare la diversità del loro modo di vedere; l'importante è che, rispetto ai teoremi geometrici, si troverebbero sempre totalmente concordi, accadendo soltanto che le stesse parole verrebbero tradotte, nelle loro menti, in intuizioni diverse. L'uno collegherebbe alla parola "punto" una certa intuizione, e l'altro un'altra completamente diversa; eppure sarebbe lecito dire che questa parola esprime, anche per loro, qualcosa di oggettivo. Soltanto non si potrebbe interpretare come oggettiva la particolarità delle loro intuizioni. Precisamente questo è il senso in cui anche l'asse terrestre può dirsi oggettivo.

Quando si parla di "bianco" si pensa di solito a una certa sensazione, che naturalmente è del tutto soggettiva; mi pare tuttavia che già nell'uso comune della lingua si colleghi talvolta a questo termine un senso oggettivo. Cosí, quando si dice che la neve è bianca, si ha in mente

[1] [Quest'affermazione di Frege è della massima importanza filosofica. Esse venne elevata a idea centrale della gnoseologia, da quel vasto e moderno indirizzo che suol denotarsi col nome di "Circolo viennese" (Wittgenstein, Schlick, Carnap, Waismann, ecc.). La contrapposizione fra ciò che è *inesprimibile* e perciò incontrollabile (il soggettivo, l'intuitivo), e ciò che invece *può venir espresso* in termini esatti, e perciò risulta controllabile ed interindividuale, offre il mezzo — a tale scuola filosofica — di impostare in forma nuova tutti i problemi classici della gnoseologia, e risolverli in maniera completamente originale, ripudiando per principio le più famose "questioni metafisiche" come questioni che non possono venir espresse in termini precisi e quindi non possono dar luogo a soluzioni controllabili. Data l'identificazione fra ciò che è oggettivo e ciò che è "esprimibile mediante parole", si comprende subito l'importanza che acquista — dal nuovo punto di vista — l'analisi logica del linguaggio e la netta separazione fra lingue scientifiche precise e lingue imprecise di natura prevalentemente poetica. Anche di tale analisi del linguaggio, Frege può dirsi — a buon diritto — un precursore, come risulterà molto bene dalla parte terza, capitolo 3, della presente opera.]

di esprimere con queste parole una qualità oggettiva, che, alla comune luce del sole, è riconoscibile per mezzo di una certa sensazione. Naturalmente questa cambia se la luce diventa monocromatica; in tale caso però, nel descrivere il colore della neve, si farà presente il modo particolare in cui essa è illuminata; si dirà per esempio: la neve ora sembra rossa, ma in realtà è bianca. È noto del resto che può parlare di rosso e di bianco anche chi è cieco ai colori; naturalmente egli non li distinguerà in base alle proprie sensazioni. Li distinguerà invece, o in base a ciò che ne dicono gli altri, oppure, eventualmente, in base a misure fisiche. Si può dunque concludere che l'indicazione di un colore denota spesso, non una sensazione soggettiva, di cui è impossibile sapere se si accordi o no con quella di un altro — di ciò infatti non ci dà alcuna garanzia l'ugual denominazione, — ma una qualità oggettiva.

È chiaro pertanto che, parlando di oggettività, io intendo una indipendenza dal nostro sentire, intuire, rappresentare, dal nostro formarci immagini mentali in base al ricordo di precedenti sensazioni, ma non una indipendenza dalla ragione. Rispondere alla domanda "che cosa sono gli oggetti indipendentemente dalla ragione" significherebbe infatti giudicare senza giudicare, qualcosa come volerci lavare le mani senza bagnarle.

27. Il numero non è, come vorrebbe Schlömilch, la rappresentazione del posto di un oggetto in una successione Sempre per i motivi sopra accennati, non posso trovarmi d'accordo con Schlömilch,[1] il quale sostiene che il numero è la rappresentazione del posto di un oggetto in una successione.[2]

Se il numero fosse una rappresentazione, l'aritmetica sarebbe psico-

[1] O. X. Schlömilch, *Handbuch der algebraischen Analysis* [Manuale di analisi algebrica] (Fromman, Jena 1881) p. 1.

[2] A Schlömilch si può pure obiettare che, se la sua teoria fosse vera, dovrebbe sempre sorgere in noi la rappresentazione del medesimo posto ogni qualvolta compare il medesimo numero; mentre palesemente non accade così. Le ulteriori critiche, che sto per muovergli, sarebbero certo false se Schlömilch volesse intendere, col termine rappresentazione, un'idea oggettiva; ma quale differenza vi sarebbe allora fra la rappresentazione e il posto stesso?

La rappresentazione, intesa in senso soggettivo, è ciò a cui si riferiscono le leggi psicologiche dell'associazione; essa è di natura sensoriale, figurativa. Invece, in senso oggettivo, appartiene alla logica e risulta non sensoriale, sebbene le parole che denotano le singole rappresentazioni, posseggano spesso anche un significato soggettivo, che però non è quello ora considerato. La rappresentazione soggettiva

logia. In realtà però la psicologia è lontana dall'aritmetica non meno di quanto sia lontana dall'astronomia. Come questa non studia le nostre rappresentazioni dei pianeti, ma i pianeti stessi, cosí pure l'aritmetica non si limita a studiare delle rappresentazioni. Se il numero fosse una rappresentazione, esso sarebbe innanzi tutto soltanto la mia. Quella di un altro è, già come tale, diversa. Allora vi sarebbero però non un solo numero 2, ma forse molti milioni di 2. E a rigore bisognerebbe precisare ogni volta: il mio 2, il tuo, un 2, tutti i 2. Se poi si ammette pure l'esistenza di rappresentazioni latenti o inconscie, si dovrebbe anche parlare di "2 inconsci", i quali potrebbero in seguito diventare consci. Col crescere di nuove generazioni di uomini, sorgerebbero sempre dei nuovi 2; e chi può sapere se essi non si evolverebbero coi secoli, talché il prodotto 2×2 non divenisse un giorno uguale a 5? Malgrado tanta varietà, rimarrebbe dubbio tuttavia se esistano davvero infiniti numeri, come pure è generalmente ammesso. Si potrebbe infatti temere che 10^{10} e altri numeri grandissimi risultino soltanto dei segni vuoti, non esistendo in alcuna mente qualche rappresentazione cui possa venire attribuito un tale nome.

Vediamo cosí a quali stranezze si perviene sviluppando in tutte le sue conseguenze l'ipotesi che il numero sia una pura rappresentazione. Ne concludiamo pertanto che il numero non può essere spaziale o fisico, come i famosi mucchi di ciottoli cui ricorre Mill, né soggettivo come le rappresentazioni; esso può essere unicamente non sensibile e oggettivo. La base della sua oggettività non può risiedere nell'impressione sensoriale, poiché questa — come affezione del nostro animo — è completamente soggettiva, ma soltanto, almeno a mio parere, nella ragione.

Sarebbe strano che l'aritmetica, la piú esatta fra tutte le scienze, dovesse proprio fondarsi sulla psicologia, ancora tanto vacillante e malsicura.

si rivela spesso diversa nei diversi individui; quella oggettiva al contrario è identica per tutti. Le rappresentazioni oggettive possono venir suddivise in oggetti e concetti.

Per evitare confusione, io userò il termine "rappresentazioni" soltanto in senso soggettivo. Poiché Kant lo usò invece, ora in un significato, ora nell'altro, finí col procurare a tutta la propria teoria filosofica una tinta fortemente soggettivistica e idealistica, e rese cosí assai difficile l'esatta interpretazione di quello che è il suo vero pensiero. La distinzione dei due significati non è meno giustificata della distinzione fra psicologia e logica. Mi augurerei molto che queste due venissero tenute sempre ben distinte fra loro.

Il numero naturale come insieme

28. La teoria di Thomae, basata sulla denominazione degli insiemi
Alcuni scrittori cercano infine di definire il numero quale un insieme, una molteplicità, una pluralità. Qui però sorge subito l'inconveniente che i numeri 0 e 1 restano esclusi da tale concetto. Altro difetto è che le espressioni su riferite sono molto indeterminate: ora si interpreta il loro significato come assai prossimo a quello di "mucchio", "gruppo", "aggregato" — e si pensa con ciò ad un vero e proprio "trovarsi insieme" spaziale — ora invece si fa uso di esse come se possedessero all'incirca lo stesso significato della parola "numero", solamente un po' piú indeterminato.

È quindi impossibile trovare per questa via una precisa definizione del concetto di numero.

Thomae [1] ritiene invece che, per formare il numero, sia necessario attribuire nomi diversi ai diversi insiemi di oggetti. Con ciò egli pensa, evidentemente, a una piú esatta determinazione di questi insiemi; la diversa denominazione essendo soltanto il segno esterno di tale piú esatta determinazione.

Il problema è, però, di che genere sia questa determinazione. Risulta infatti ovvio che non potrebbe sorgere l'idea del numero se si volessero introdurre per le espressioni "3 stelle", "3 dita", "7 stelle", dei nomi completamente diversi, nei quali non fosse possibile riconoscere alcuna parte costitutiva comune. Affinché sorga l'idea di numero, occorre che non vengano dati a quegli insiemi dei nomi qualunque, ma proprio dei nomi che riescano a caratterizzare qual numero spetta a ciascuno degli insiemi considerati. Occorre che in quei nomi sia riconoscibile il numero nella sua particolarità.

Va infine notata un'ultima diversità. Alcuni attribuiscono il nome di "numero" agli insiemi di cose o di oggetti; altri invece, come già Euclide,[2] agli insiemi di unità. Quale delle due vie è migliore? Per rispondere, è innanzi tutto necessario un esame alquanto approfondito del concetto di unità.

[1] J. Thomae, *Elementare Theorie der analytischen Funktionen* [Teoria elementare delle funzioni analitiche] (Nebert, Halle 1880) p. 1.

[2] All'inizio del settimo libro degli *Elementi*, egli scrive: Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. [Una "monas" è ciò in virtú di cui ciascuna delle cose esistenti è chiamata uno. Un numero è una moltitudine composta di "monas".]

4.

Opinioni sull'unità e sul numero uno

[Due sono gli scopi principali del capitolo quarto: il primo è di mettere in luce le varie aporie nascoste nel termine "unità"; l'altro di stabilire che l'attribuzione di un numero afferma qualcosa intorno a un concetto, e non intorno a un oggetto o gruppo di oggetti.

Molti sono i paragrafi ricchi di sottilissime osservazioni; segnaleremo soltanto quelli piú utili per orientare il lettore in questa lunga e difficile analisi. Primo in ordine numerico il paragrafo 39, che espone con chiarezza la principale aporia dell'unità, e denuncia lo scopo recondito che ci fa ricorrere a questo termine cosí ambiguo quando vogliamo spiegare il concetto di numero. Altro paragrafo molto importante, anzi il piú importante a uno scopo orientativo, è il paragrafo 45, che riassume i risultati raggiunti da Frege nei capitoli secondo e terzo e nelle prime sezioni del quarto, ed enuncia in termini precisi il problema centrale alla cui soluzione verranno dedicate le ultime pagine del quarto. Questa soluzione viene esposta nel paragrafo 46 e ulteriormente chiarita nei paragrafi 47 e 48. Il paragrafo piú notevole per sottigliezza logica è il 53, che mette a fuoco una differenza fra "note caratteristiche di un concetto" e "proprietà di un concetto". Essa è indispensabile per capire la teoria di Frege, secondo cui i numeri esprimono proprietà dei concetti. Un po' meno chiaro è il paragrafo 54, che identifica l'unità con il "concetto cui viene attribuito un numero".]

Il termine "uno" riesce a esprimere qualche proprietà degli oggetti?

29. AMBIGUITÀ DELLE ESPRESSIONI "*μονάς*" E "UNITÀ". LA SPIEGAZIONE PROPOSTA DA SCHRÖDER NON SERVE ALLO SCOPO. L'AGGETTIVO "UNO" NON CI FORNISCE ALCUNA DETERMINAZIONE PIÚ PRECISA DEGLI OGGETTI, NON PUÒ FUNGERE DA PREDICATO Nelle definizioni, date da Euclide all'inizio del settimo libro degli *Elementi*, pare che egli indichi col termine "*μονάς*" ora un oggetto da contare, ora una proprietà di questo oggetto, ora il numero uno. Si evita in genere la difficoltà di interpre-

tazione traducendo sempre il termine "μονάς" con "unità", ma soltanto perché questa parola oscilla essa pure fra tali diversi significati.

Schröder [1] spiega: "ognuno degli oggetti da contare viene chiamato unità". Sorge però il problema per qual motivo, prima di contare gli oggetti, si cerchi di inserirli sotto il concetto di unità, e non ci si limiti a dire semplicemente "numero è un insieme di oggetti", con il che saremmo di nuovo condotti a quanto fu esaminato nel capitolo precedente. Si potrebbe innanzi tutto rispondere che, dando agli oggetti il nome di "unità", si procura loro una maggiore determinazione, proprio come se il termine "uno" — secondo quel che ci suggerisce la sua forma linguistica — fosse un qualsiasi attributo di proprietà; questo implica che si interpretino le espressioni del tipo "una città" come perfettamente analoghe all'espressione "uomo saggio". In tal caso l'unità sarebbe un oggetto cui spetterebbe la proprietà di essere "uno", e starebbe con l' "uno" in un rapporto simile a quello in cui "un saggio" sta con l'aggettivo "saggio".

Già nelle pagine precedenti ho mosso alcune obiezioni ai tentativi di interpretare il numero in generale come una proprietà degli oggetti; ora voglio aggiungerne altre, che si riferiscono in particolare al numero uno. In primo luogo sembra strano che ogni oggetto abbia la proprietà di essere uno; è infatti incomprensibile come mai, se tutti gli oggetti hanno questa proprietà, si persista ancora ad attribuirla loro espressamente. Spieghiamoci meglio: l'affermazione che Solone è saggio, acquista un senso esclusivamente per la possibilità che qualcuno non sia saggio; il contenuto di un concetto diminuisce se la sua estensione si amplia; se questa poi viene a comprendere tutto, il contenuto del concetto andrà completamente perso. Non è facile immaginare come la lingua potrebbe costruire un attributo che non servisse a determinare maggiormente un oggetto rispetto agli altri. Né basta: se dovessimo concepire l'espressione "un uomo" come analoga a quella "uomo saggio", dovremmo ritenere che sia possibile usare il termine "uno" anche in forma di predicato; e cioè, come si dice "Solone era saggio", si dovrebbe poter dire "Solone era uno" ovvero "Solone era un uno". Orbene, anche ammesso che possa talvolta presentarsi una espressione

[1] SCHRÖDER, *op. cit.*, p. 5.

siffatta, è certo però che essa non risulta intelligibile di per sé sola. Possiamo per esempio interpretarla come se affermasse "Solone era uno dei saggi", in quanto il contesto generale della frase ci mostri che proprio cosí va completata la proposizione. Da solo, però, il termine "uno" non sembra poter costruire mai un predicato.[1] Questo fatto risulta ancora piú chiaro, se si analizza la forma plurale. Mentre i due asserti "Solone era saggio" e "Talete era saggio" possono venire riassunti nell'unica proposizione "Solone e Talete erano saggi", non si può dire invece "Solone e Talete erano uni". Ora questa impossibilità non sarebbe in alcun modo comprensibile se "uno" designasse una proprietà tanto di Solone quanto di Talete.

30. I TENTATIVI DI DEFINIZIONE DI LEIBNIZ E BAUMANN FINISCONO COL DISSOLVERE COMPLETAMENTE IL CONCETTO DI UNITÀ Alle ossservazioni precedenti si connette il fatto che non fu mai possibile dare alcuna definizione precisa della proprietà "uno".

Allorché Leibniz dice:[2] "È uno tutto ciò che può venir colto per mezzo di un atto del pensiero", egli spiega in realtà il termine uno con sé stesso. Ma possiamo obiettargli qualcosa di piú grave: non è forse possibile cogliere anche il molteplice per mezzo di un atto del pensiero? Ciò è ammesso da Leibniz stesso nel medesimo passo, or ora citato.

Sostanzialmente analoga è la spiegazione tentata da Baumann:[3] "È uno tutto ciò che noi intendiamo come uno", e piú oltre: "Noi riguardiamo come uno tutto ciò che stabiliamo di considerare come punto, come indiviso; ma ogni uno dell'intuizione esterna, sia della pura sia dell'empirica, può pure venir concepito come 'molti'. Ogni rappresentazione risulta una, in quanto la separiamo dalle altre, ma, in sé, può di nuovo venir suddivisa in molte parti componenti."

Cosí sparisce ogni reale delimitazione del concetto e tutto finisce col dipendere dal nostro modo di concepire. Ripetiamo dunque la domanda: in qual senso risulterà possibile attribuire a un oggetto la proprietà di essere uno, se ogni concetto può essere o non essere uno, secondo il

[1] Alcune frasi sembrano contraddire la mia affermazione; ma esaminandole un po' da vicino, si vede sempre che: o v'è sottinteso un sostantivo, oppure il termine "uno" non viene usato, in esse, come numero, cioè non asserisce l'unicità ma la costituzione unitaria e compatta dell'oggetto.

[2] BAUMANN, *op. cit.*, vol. 2, p. 2; LEIBNIZ, ed. Erdmann, p. 8.

[3] BAUMANN, *op. cit.*, vol. 2, p. 669.

nostro modo di concepirlo? Come può riposare su di un concetto tanto labile una scienza quale l'aritmetica, che deve proprio la sua gloria alla massima esattezza e determinatezza dei suoi metodi e risultati?

31. ESAME DEI DUE CARATTERI AI QUALI RICORRE BAUMANN PER DEFINIRE L'UNITÀ: L'ESSERE DELIMITATO E IL NON ESSERE DIVISO. L'IDEA DELL'UNITÀ NON CI VIENE SUGGERITA DA OGNI OGGETTO (LOCKE) Per quanto Baumann riconduca in sostanza il concetto dell'uno a una intuizione interna, egli afferma tuttavia, nella pagina poco fa citata, che l'essere delimitato e il non essere diviso caratterizzano perfettamente l'uno. Orbene: se ciò fosse vero, dovremmo attenderci che anche gli animali riuscissero a formarsi una certa rappresentazione dell'unità. Ma accade proprio cosí? Accade davvero che, guardando per esempio la luna, un cane riesca a formarsi una rappresentazione — sia pure imprecisa — di ciò che noi denotiamo col termine uno? La cosa sembra molto difficile. Eppure è certo che quel cane distingue nettamente i singoli oggetti. Il suo padrone, la pietra con cui questi lo fa giocare, un altro cane, ecc., sono tutti oggetti che esso vede cosí ben delimitati, cosí indivisi, cosí consistenti ciascuno in sé, come li vediamo noi. Infatti quel cane percepisce una netta differenza, se ha da difendersi contro molti cani o contro uno solo. Questa però è soltanto la differenza che Mill chiama "fisica". Ciò che qui importerebbe sapere è se esso, mentre viene addentato da un cane piú grosso di lui o mentre insegue un gatto, ha qualche coscienza — sia pure poco chiara — di ciò che noi denotiamo con la parola uno. Un tale fatto mi sembra molto improbabile.

Ne concludo che non ogni soggetto del mondo esterno né ogni idea formatasi nella nostra mente può far sorgere nell'intelletto — come sembra pensare Locke [1] — l'idea dell'unità. Noi riusciamo a cogliere quest'idea solo per mezzo delle alte capacità spirituali che ci distinguono dagli animali. E quindi le pure e semplici proprietà degli oggetti (come l'esser delimitati e il non esser divisi) che vengono percepite altrettanto bene dagli animali quanto dagli uomini, non possono costituire i caratteri essenziali del concetto di unità.

[1] BAUMANN, *op. cit.*, vol. 1, p. 409.

32. LA LINGUA MOSTRA TUTTAVIA UN CERTO NESSO FRA I CARATTERI ANZIDETTI E IL CONCETTO DI UNITÀ È comunque probabile che sussista un certo nesso fra quei caratteri e il concetto di unità. Ce lo mostra per esempio la lingua tedesca, ricavando l'aggettivo "einig" [unito, compatto] dal nome "Ein" [uno]. Un oggetto è tanto piú idoneo a venir concepito come un'entità a sé, quanto piú le differenze fra le sue parti costituenti si mostrano irrilevanti rispetto alle differenze fra esso e ciò che lo circonda; ossia quanto piú la connessione interna risulta preminente su quella con l'ambiente. L'aggettivo "einig" denota una proprietà, che, nell'atto di comprendere un oggetto, ci induce a separarlo dall'ambiente e considerarlo in sé stesso. Allo stesso modo si deve spiegare come mai l'aggettivo francese "uni" significhi pure "piano", "liscio". Anche la parola "Einheit" [unità] viene usata con significato analogo, allorché si parla di unità di un'opera d'arte, o di unità politica di un paese.[1] In questo senso però la parola "Einheit" si ricollega meno al nome "Ein", che agli aggettivi "einig" o "einheitlich" [unitario]. Se invero si dice che la Terra ha "una" Luna, non si pensa ad asserire con ciò, che la Luna è ben delimitata, indivisa, e consistente; ma si afferma che la Terra ha una, ed una sola, Luna, contrariamente a ciò che accade dei pianeti Venere, Marte e Giove. Per quanto riguarda l'essere ben delimitati e il non esser divisi, i satelliti di Giove potrebbero stare perfettamente alla pari con la nostra Luna, e, in tale senso, questa e quelli risultano altrettanto "unitari".

33. L'INDIVISIBILITÀ (G. KÖPP) NON COSTITUISCE UN CARATTERE DELL'UNITÀ Alcuni scrittori rinforzano il carattere sopra esaminato del "non essere diviso", trasformandolo nel carattere del "non essere divisibile". G. Köpp[2] dà il nome di "singolo" a ogni oggetto, percepibile o no coi sensi, che sia pensato come indivisibile e per sé stante, e chiama col nome di "uno" i singoli, dove palesemente il termine "uno" viene usato nel senso di "unità". Anche Baumann, mentre sostiene che gli oggetti esterni non costituiscono delle vere unità, perché noi

[1] Per la storia della parola "unità" si veda R. C. EUCKEN, *Geschichte der philosophischen Terminologie* [Storia della terminologia filosofica] (Veit, Lipsia 1879) pp. 122 sg, 136, 220.

[2] G. KÖPP, *Schularithmetik* [Aritmetica per le scuole] (Baerecke, Eisenach 1867) pp. 5 sg.

siamo liberi di concepire ciascuno di essi come un aggregato di molti oggetti, dimostra di considerare egli pure l'indivisibilità come una nota caratteristica del concetto rigoroso di unità.

Accrescendo il legame interno fino a renderlo incondizionato, si tende — com'è evidente — a ottenere un carattere dell'unità che non dipenda dal nostro modo arbitrario di concepire le cose. Questo tentativo però naufraga, perché, se lo seguissimo con coerenza, non ci resterebbe quasi piú nulla cui poter attribuire il nome di unità e cioè quasi piú nulla che possa venir contato. Si cerca quindi di evitare subito un cosí grave pericolo, sostituendo alla condizione dell'indivisibilità la condizione di "venir pensato come indivisibile".

Con ciò tuttavia si ricade di nuovo in una concezione oscillante. Che vantaggio si potrà ottenere, invero, immaginando che gli oggetti siano diversi da quello che realmente sono? Nessuno. Da un'ipotesi falsa possono scaturire conseguenze false. Se poi non si vuol trarre alcuna deduzione dalla supposta indivisibilità, a che pro farne parola? Se si può, senza danno, omettere qualcosa dal rigore di un concetto, se anzi si deve farlo, a che serve tutto questo rigore?

Forse, invece di pensare effettivamente alla indivisibilità, bisogna soltanto non pensare alla divisibilità. Come se fosse possibile ottenere qualcosa di positivo attraverso una pura omissione di pensiero! Che dire poi dei casi, nei quali non si riesce in alcun modo a evitare di pensare alla divisibilità? Nei quali, anzi, ogni conclusione si fonda sulla scomposizione dell'unità? (Ci si trova in uno di questi casi, quando si pone il problema: sapendo che un giorno è composto di 24 ore, dire quante ore sono contenute in tre giorni.)

Le unità sono uguali le une alle altre?

34. L'UGUAGLIANZA COME FONDAMENTO DEL NOME DI UNITÀ. SCHRÖDER, HOBBES, HUME, THOMAE. ASTRAENDO DALLE DIFFERENZE FRA GLI OGGETTI, NON SI OTTIENE IL CONCETTO DI NUMERO, NÉ SI OTTIENE CHE GLI OGGETTI RISULTINO IN QUESTO MODO UGUALI FRA LORO Fallisce dunque, come s'è visto, ogni tentativo di spiegare l'uno come proprietà degli oggetti; e bisogna rinunciare, perciò, a credere che, chiamando gli oggetti col nome di unità, si riesca in qualche modo a determinarli piú esattamente.

Ci ritroviamo cosí, daccapo, al nostro vecchio problema: perché attribuir loro questo nome, se il termine "unità" è soltanto un sinonimo del termine "cosa", se tutti gli oggetti sono unità o possono venir concepiti come tali? Schröder [1] vede il motivo di questo nome nell'uguaglianza che, secondo lui, viene attribuita agli oggetti della numerazione. In primo luogo non si vede, però, come mai si debba proprio ricorrere al termine "unità" per indicare siffatta uguaglianza, e non bastino a tale scopo i semplici termini "oggetto" e "cosa". Inoltre gli si può domandare: qual'è il motivo in base a cui si ascrive agli oggetti della numerazione l'anzidetta uguaglianza? Viene questa uguaglianza soltanto attribuita a tali oggetti, o risultano essi veramente uguali? In realtà due oggetti non sono mai assolutamente uguali; è invece, senza alcun dubbio, possibile riscontrare in due oggetti qualunque un qualche lato sotto cui essi risultano analoghi. Eccoci dunque, di nuovo, di fronte a un atto sostanzialmente arbitrario, salvo a voler pretendere — contro la verità dei fatti — che sussista fra le cose un'uguaglianza piú completa di quella loro spettante in realtà.

Per evitare quest'inconveniente molti autori affermano che le unità sono tra loro uguali senza limitazione. Per esempio Hobbes [2] scrive: "Il numero, che si chiama assoluto, presuppone sotto di sé unità tutte uguali, dalle quali è formato." Anche Hume [3] ritiene completamente identiche le parti che compongono il numero. Thomae [4] chiama unità i singoli elementi dell'insieme, e dice: "Le unità sono uguali le une alle altre." Però si potrebbe sostenere con altrettanta ragione, anzi ancor piú, che gli individui dell'insieme sono fra loro diversi.

Ma esaminiamo un po' bene che cosa debba significare per il numero quella pretesa uguaglianza. È noto che le proprietà per cui gli oggetti di un certo gruppo si differenziano gli uni dagli altri, sono qualcosa di inessenziale per il numero di questi oggetti, qualcosa che non lo riguarda. Evidentemente è questo il motivo per cui si vuol prescindere da esse nel concetto di numero. L'affermazione dell'uguaglianza di tutte le unità non riesce però a questo scopo. Quando — seguendo la via indi-

[1] SCHRÖDER, *op. cit.*, p. 5.
[2] BAUMANN, *op. cit.*, vol. 1, p. 242.
[3] *Ibid.*, vol. 2, p. 568.
[4] THOMAE, *op. cit.*, p. 1.

cataci da Thomae — "si fa astrazione dalle caratteristiche degli individui di un dato insieme di oggetti" ossia "si prescinde, trattando piú oggetti fra loro separati, dai caratteri che li differenziano l'uno dall'altro" non è affatto vero che si ottenga — come Lipschitz ritiene — "il concetto del numero di oggetti che costituiscono quell'insieme" ma si ottiene invece il concetto generale in cui rientrano quei singoli oggetti. Per il fatto di venir considerati come unità, questi non perdono proprio nessuna delle loro particolarità. Se per esempio nel prendere in esame un gatto bianco e uno nero, prescindo dalle proprietà per cui essi si distinguono, non ottengo il concetto di due, ma quello generale di gatto. Ché se poi subordino entrambi quegli individui a questo concetto generale, e attribuisco loro il nome di unità, il gatto bianco non cessa perciò di essere bianco, né quello nero di essere nero. Anche se non bado affatto al loro colore, o se mi propongo di non dedurre alcuna conseguenza dalla loro diversità, i due gatti non perdono per questo il loro colore, ma restano diversi come erano. Ciò che non contiene piú le particolarità è il concetto generale di gatto, ottenuto da essi per astrazione; ma proprio per ciò questo concetto è soltanto uno, mentre i gatti considerati erano due.

35. La diversità è anzi necessaria, se si vuol parlare di pluralità. Descartes; Schröder; Jevons È impossibile, con una pura elaborazione concettuale, rendere uguali cose diverse. Ché se poi vi riuscissimo, non avremmo piú molte cose, ma soltanto una cosa; infatti, come dice Descartes,[1] il numero, o meglio il numero maggiore di uno, sorge nelle cose dalla loro diversità. Ben a ragione afferma E. Schröder:[2] "Si può pretendere razionalmente di contare degli oggetti soltanto ove essi risultano chiaramente distinguibili gli uni dagli altri, per esempio separati nello spazio e nel tempo, e delimitati fra loro." Di fatto la troppo grande somiglianza di piú oggetti, per esempio delle sbarre di un cancello, rende talvolta difficile il contarli. Con speciale penetrazione si esprime su questo argomento W. S. Jevons:[3] "La parola numero è soltanto un sinonimo della parola diversità. La completa identità è

[1] Baumann, *op. cit.*, vol. 1, p. 103.
[2] Schröder, *op. cit.*, p. 3.
[3] Jevons, *op. cit.*, p. 156.

unità; la molteplicità sorge con la differenziazione." E una pagina piú oltre: "Si dice spesso che le unità sono tali in quanto si equivalgono completamente l'una all'altra. Ma, sebbene per certi lati esse possano risultare completamente identiche, almeno in un punto però debbono essere diverse; altrimenti non sarebbe loro applicabile il concetto di molteplicità. Se per esempio tre monete fossero cosí identiche da occupare lo stesso luogo nello stesso istante, sarebbero in realtà non tre ma una sola moneta."

36. ANCHE LA TEORIA CHE LE UNITÀ SIANO DIVERSE FRA LORO, URTA IN MOLTI OSTACOLI. JEVONS Non è difficile vedere che anche la teoria ora accennata, della diversità delle unità, incontra molte obiezioni. Esaminiamo a tale scopo le parole di Jevons: "Un'unità (*unit*) è un certo oggetto del pensiero, il quale può venir distinto da qualunque altro oggetto che venga trattato come unità nello stesso problema." Qui l'unità risulta spiegata mediante sé stessa, e l'aggiunta "il quale può venir distinto da qualunque altro oggetto" non porta a rigore alcuna effettiva precisazione, essendo assolutamente ovvia. È chiaro infatti che parliamo di un altro oggetto proprio soltanto perché possiamo distinguerlo dal primo.

Piú oltre [1] leggiamo: "Allorché scrivo il simbolo 5, penso in realtà

$$1+1+1+1+1$$

ed è assolutamente fuori dubbio che ciascuna di queste unità è diversa dalle altre. Volendo esser preciso potrei scrivere

$$1'+1''+1'''+1''''+1'''''."$$

È per certo necessario denotarle in modo diverso l'una dall'altra, se esse sono davvero diverse fra loro; altrimenti ne nascerebbe la piú grande confusione. Ché, se bastasse il diverso posto occupato dai vari segni 1 a denotare quella diversità, bisognerebbe stabilirlo in forma ben chiara come regola senza eccezione; in caso contrario non si saprebbe se $1+1$ debba significare 2 ovvero 1. Ammessa una tale regola, si dovrebbe però respingere l'uguaglianza $1=1$, e si cadrebbe nella dif-

[1] JEVONS, *op. cit.*, p. 162.

ficoltà di non poter mai indicare due volte di seguito la stessa cosa. Dunque la regola anzidetta non è ammissibile. Se ora si vuole stabilire che cose diverse vadano indicate con segni diversi, non si comprende piú per quale motivo i segni suggeriti da Jevons mantengano una parte fondamentale comune; cioè non si comprende perché in luogo di

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$$

non si preferisca scrivere

$$a + b + c + d + e \, .$$

L'uguaglianza fu invero perduta una volta per sempre, e l'accenno a una certa rassomiglianza, non giova a nulla. Ma cosí l'unità ci sfugge dalle mani, e in luogo di essa rimangono i vari oggetti con tutte le loro particolarità.

Concludendo: i segni

$$1', \ 1'', \ 1''', \ \text{ecc.}$$

non sono altro che un'espressione parlante dell'imbarazzo in cui ci troviamo. Da un lato infatti ci occorre l'uguaglianza, e perciò usiamo il segno 1; dall'altro ci occorre la diversità, e perciò usiamo gli indici; questi però tornano purtroppo a distruggere l'uguaglianza precedentemente raggiunta.

37. Tentativi, compiuti da Locke, Leibniz, Hesse, di spiegare il numero a partire dall'unità o dall'uno Anche presso altri scrittori noi ci imbattiamo nella stessa difficoltà.

Per esempio Locke [1] scrive: "Ripetendo l'idea di una unità, e aggiungendo questa a un'altra unità, noi costruiamo un'idea collettiva, che viene denotata col termine 'due'. Chi sa fare ciò, e sa procedere oltre in modo analogo, aggiungendo ogni volta un'unità all'idea collettiva precedentemente acquisita, e dandole poi un nome, questi sa contare." Leibniz [2] definisce il numero in generale come 1 e 1 e 1 cioè come tante unità. Hesse [3] dice: "Se si è capaci di immaginare l'unità, rappresen-

[1] Baumann, *op. cit.*, vol. 1, pp. 409-11.
[2] Baumann, *op. cit.*, vol. 2, p. 3.
[3] L. O. Hesse, *Vier Species* [Quattro specie] (Teubner, Lipsia 1872) p. 2.

tata in algebra dal simbolo 1..., si è pure in grado di immaginare una seconda analoga unità e altre ancora, sempre dello stesso tipo. La riunione della seconda unità con la prima in un tutto unico, produce il numero 2."

Qui bisogna rivolgere la massima attenzione al rapporto in cui stanno fra loro i significati delle parole "unità" e "uno". Leibniz intende per unità un concetto generale sotto cui cadono i vari uno; dice infatti: "L'astratto dell'uno è l'unità." Invece Locke ed Hesse usano le due parole, unità e uno, nello stesso senso. Di fatto però anche Leibniz non li tiene sempre ben distinti fra loro; e invero, quando attribuisce il nome "uno" a tutti i singoli oggetti che cadono sotto il concetto di unità, dà prova con ciò di denotare per mezzo di tale nome non i singoli oggetti ma il concetto sotto cui cadono.

38. "UNO" È NOME PROPRIO, "UNITÀ" INVECE È IL NOME DI UN CONCETTO. IL NUMERO NON PUÒ ESSERE DEFINITO COME TANTE UNITÀ. DIFFERENZA FRA "*e*" E "+" Per non ingenerare confusione, sarà opportuno mantenere ben netta la distinzione fra uno e unità.

Si dice "il numero uno", e con l'articolo "il" si dà prova di pensare a un qualche oggetto determinato dalla ricerca scientifica. Non vi sono tanti numeri uno, ma ve n'è uno solo. Nel termine 1 abbiamo il caso tipico di un nome proprio che non ammette plurale, come non l'ammettono i nomi "Federico il Grande" e "l'elemento chimico oro". Se scriviamo sempre 1 senza indici distintivi, ciò non è fortuito né frutto di imprecisione nello scrivere. Jevons vorrebbe spiegare l'uguaglianza

$$3-2=1$$

con quest'altra

$$(1'+1''+1''')-(1''+1''')=1'.$$

Benissimo. Ma che risultato darebbe invece la seguente operazione

$$(1'+1''+1''')-(1''''+1''''')?$$

Certamente non $1'$. Se ne ricava che, secondo la sua teoria, non vi dovrebbero essere soltanto diversi uno, ma anche diversi due, ecc.; secondo essa, infatti, $1''+1'''$ non potrebbe equivalere ad $1''''+1'''''$. Ecco

dunque provato chiaramente che il numero non può essere un aggruppamento di oggetti. Tutta l'aritmetica andrebbe in rovina se, invece dell'uno, che è sempre lo stesso, si volessero introdurre diversi oggetti, sia pur denotati con simboli tanto simili. Essi infatti, malgrado ogni affinità, non potrebbero mai, senza errore, venir considerati come veramente uguali. Né pare possibile ammettere che quest'uguaglianza cosí indispensabile per l'aritmetica, costituisca soltanto un errore di scrittura. Se ne conclude l'impossibilità di riguardare l'1 come simbolo di oggetti diversi (quale per esempio l'Islanda, Aldebaran, Solone, ecc.). L'assurdo della spiegazione di Jevons diventa ancor piú evidente, quando si pensi al caso di una equazione che abbia tre radici, per esempio 2, 5 e 4. Supponiamo infatti di scrivere con Jevons

$$1'+1''+1'''$$

in luogo di 3, e di ammettere con lui che $1'$, $1''$, $1'''$ denotino delle unità, cioè (come egli pensa) degli oggetti mentali; in tale ipotesi dovremo dire che, nel nostro esempio, $1'$, $1''$, $1'''$, significano rispettivamente 2, 5 e 4. Ma allora non sarebbe piú chiaro scrivere

$$2+5+4$$

in luogo di

$$1'+1''+1'''$$

ossia scrivere $2+5+4$ in luogo di 3?

Esclusivamente i nomi che esprimono concetti ammettono un plurale. Se dunque si parla di "unità" al plurale, è chiaro che si intende la parola unità come un nome di concetto, e non come un sinonimo del termine "uno". Avremo pertanto due casi possibili; o il nome unità denota gli oggetti da contarsi, ma allora già si è visto che è impossibile definire il numero come tante unità; oppure si intende per unità un concetto che comprende sotto di sé esclusivamente l'uno, ma allora il plurale di unità non ha senso, e di nuovo risulta impossibile definire il numero in generale come 1 e 1 e 1 secondo quel che vorrebbe Leibniz.

Se qui si usa la congiunzione "e" nel senso in cui la si usa nell'espressione "Bunsen e Kirchhof", allora 1 e 1 e 1 non dà 3 ma 1, come oro e oro e oro non dà null'altro che oro. Il segno "+" che compare nel-

l'uguaglianza

$$1+1+1=3$$

non può dunque venir interpretato come il solito "e", che serve a denotare una congiunzione, una "idea collettiva".

39. La difficoltà di conciliare fra loro uguaglianza e distinguibilità delle unità viene celata dall'ambiguità del termine "unità" Ci troviamo dunque di fronte alla seguente difficoltà: se cerchiamo di far sorgere il numero dalla riunione di vari oggetti, otteniamo un mucchio, in cui ciascun oggetto conserva le sue proprietà caratteristiche che lo differenziano dagli altri, e questo non è il numero. Se invece cerchiamo di far sorgere il numero dalla riunione di entità uguali, otteniamo sempre soltanto l'uno e non mai la pluralità.

Denotando con il simbolo 1 ciascuno degli oggetti da contare, commettiamo un errore, perché diamo l'identico nome a oggetti diversi. Aggiungendo all'1 vari indici, otteniamo un simbolo che non può piú servire per l'aritmetica.

La parola "unità" si rivela adattissima a nascondere la difficoltà ora accennata; e questo precisamente è il motivo — anche se inconscio — per cui si preferisce ricorrere a essa, anziché alle parole "cosa" od "oggetto". In un primo momento, infatti, si dà il nome di unità agli oggetti da contare, conservando immutate le loro reciproche differenze; in un secondo momento invece, si trasforma il concetto di riunione (o collezione, o aggiunta, come si preferisce chiamarlo) di piú oggetti nel concetto di addizione aritmetica, e si muta inavvertitamente il nome comune di unità nel nome proprio di "uno". Cosí si ottiene l'uguaglianza degli oggetti da contare. Se alla lettera *u* si aggiunge un *n* e poi un *d*, tutti vedono che il risultato ottenuto non è il numero 3. Ma se prima si subordinano *u*, *n* e *d* al concetto di unità, e poi, invece di dire "*u*, *n* e *d*" si dice "un'unità, un'unità e ancora un'unità" ovvero "1 e 1 e 1" è facile che si creda di aver ottenuto il numero 3. La difficoltà vien cosí ben celata dal termine unità, che senza dubbio sono pochi coloro i quali riescono ciò malgrado a vederla.

Qui Mill avrebbe ben ragione di censurare l'uso artificioso che vien fatto della lingua; qui infatti essa non serve a esprimere in immagini

esterne un processo effettivo del pensiero, ma soltanto a darci l'illusione che ne esista uno, ove in realtà non ve n'è alcuno. Immaginando che il diverso debba divenire uguale solo perché lo si è indicato col nome di unità, sembra proprio che si voglia attribuire una forza segreta speciale a parole che — di fatto — sono vuote di pensiero.

Vari tentativi per superare la difficoltà ora esposta

40. SPAZIO E TEMPO INTERPRETATI QUALI MEZZI PER DISTINGUERE LE UNITÀ. HOBBES E THOMAE. PARERE CONTRARIO DI LEIBNIZ, BAUMANN E JEVONS Esaminiamo ora alcune teorie che si presentano come tentativi di superare la difficoltà analizzata nel paragrafo 39, sebbene i loro autori non le abbiano create consapevolmente per questo fine.

Prima di qualunque altra cosa, si può invocare in aiuto una proprietà caratteristica dello spazio e del tempo. Per lo spazio si tratta di questo: un punto qualunque, considerato in sé stesso, non è distinguibile da un altro qualunque; cosí due rette o due piani, considerati ciascuno in sé stesso, non sono distinguibili fra loro; altrettanto può ripetersi di due solidi, o di due superfici, o di due archi fra loro congruenti; essi risultano distinguibili soltanto se considerati come parti di un'intuizione complessiva. Sembra dunque che si trovino in essi, simultaneamente, uguaglianza e distinguibilità. Una proprietà analoga vale per il tempo.

Sono questi i motivi per i quali Hobbes [1] ritiene che l'uguaglianza delle varie unità risulti concepibile solo in quanto pensiamo che essa scaturisca dalla suddivisione del continuo. Dello stesso parere è anche Thomae.[2] Egli scrive infatti: "Immaginiamo dato nello spazio un certo insieme di punti o di unità, e immaginiamo di contarli uno dopo l'altro, per la qual cosa è necessario un certo tempo; allora, malgrado qualunque astrazione, vi rimarrà pur sempre un carattere capace di distinguere una dall'altra le varie unità: la loro diversa posizione nello spazio e nel tempo."

Varie difficoltà si sollevano però contro questo modo di concepire. Prima fra tutte, la considerazione che secondo tale teoria dovrebbe

[1] BAUMANN, *op. cit.*, vol. 1, p. 242.
[2] THOMAE, *op. cit.*, p. 1.

risultare numerabile soltanto ciò che è nello spazio e nel tempo. Ma già Leibniz [1] combatté l'opinione degli scolastici, secondo i quali il numero scaturirebbe dalla sola suddivisione del continuo e risulterebbe inapplicabile a cose incorporee. Pure Baumann [2] insiste molto sull'indipendenza del numero dal tempo; il concetto di unità è, secondo lui, pensabile anche senza il tempo. Chiarissima è poi la spiegazione di Jevons: [3] "Tre monete sono tre monete, sia che le contiamo una dopo l'altra, sia che le consideriamo tutte insieme. In molti casi il motivo in base al quale si compie la distinzione non è né il tempo né lo spazio, ma soltanto la qualità. Il peso specifico dell'oro, la sua scarsa affinità chimica, il suo grado di durezza possono venir concepiti come tre proprietà dell'oro, sebbene nessuna di esse esista prima o dopo le altre né nel tempo né nello spazio. Ogni mezzo che serve a distinguere fra loro gli oggetti, può risultare una fonte della molteplicità." Io aggiungo per di piú: tutte le volte che gli oggetti contati non si seguono realmente l'un l'altro, ma soltanto vengono contati uno dopo l'altro, è impossibile pensare il tempo come base della distinzione. Per poterli contare uno dopo l'altro, dobbiamo infatti essere già in possesso di qualche segno caratteristico che li distingua. Il tempo è soltanto una necessità psicologica per il contare, ma non ha nulla a che vedere con il concetto di numero. Allorché si è in grado di rappresentare degli oggetti extra-spaziali ed extra-temporali per mezzo di punti nello spazio e nel tempo, il farlo può probabilmente risultare vantaggioso per l'effettiva loro numerazione; in tutto ciò, a ogni modo, è fondamentalmente presupposta l'applicabilità del concetto di numero all'extra-spaziale ed extra-temporale.

41. Il tentativo accennato non raggiunge lo scopo propostosi

Quando si prescinda, come spiegammo, da tutti i caratteri distintivi degli oggetti fuorché da quelli spaziali e temporali, si raggiunge poi davvero lo scopo di riunire in essi distinguibilità e uguaglianza? No. In questo modo non ci siamo, in realtà, avvicinati nemmeno di un passo alla soluzione del problema esposto al paragrafo 39. Nulla importa infatti,

[1] Baumann, *op. cit.*, vol. 2, p. 2.
[2] *Ibid.*, vol. 2., p. 668.
[3] Jevons, *op. cit.*, p. 157.

in vista di essa, la maggiore o minore somiglianza degli oggetti, se poi, alla fine, dobbiamo tenerli scissi uno dall'altro. In realtà si ha tanto poco diritto di denotare qui i singoli punti, le singole linee ecc. col numero 1, come non si ha diritto, nelle dimostrazioni geometriche, di indicarli tutti con la stessa lettera *A*; nell'un caso infatti come nell'altro, è necessario differenziarli fra loro. Soltanto considerati in sé stessi, senza riferimento ai loro rapporti spaziali, i punti dello spazio risultano fra loro identici; quando però si debba aggregarli, bisogna per forza tener conto del loro reciproco rapporto spaziale, ché altrimenti si fondono tutti in un unico punto.

Può darsi che piú punti rappresentino, presi nella loro totalità, una figura simile a qualche costellazione, o siano ordinati, in un modo qualsiasi, su di una retta; può darsi che piú segmenti uguali siano adiacenti l'uno all'altro formando un unico segmento, o giacciano invece separati fra loro. Per questa via si possono dunque formare immagini completamente diverse dello stesso numero. Se proprio di qui scaturisse il concetto di numero, avremmo dunque, di nuovo, diversi 5, diversi 6, ecc.

Lo stesso può ripetersi per il tempo, dato che pure i suoi punti possono risultare separati da intervalli lunghi o corti, uguali o disuguali. È chiaro che tutti questi sono rapporti, i quali non hanno nulla a che vedere con il numero in sé. In ciascuno di essi è mescolato qualcosa di particolare, di fronte a cui sta, ben alto, il numero nella sua generalità. Né basta: ogni singolo istante possiede inoltre una sua speciale caratteristica, che lo distingue per esempio da un punto nello spazio; anche di essa non vi è traccia nel concetto di numero.

42. La posizione in una successione riguardata come mezzo per distinguere le unità. Hankel Anche il ripiego di sostituire l'ordinamento spaziale e temporale con un concetto generale di successione, non conduce allo scopo voluto; è infatti impossibile che sia il posto occupato da vari oggetti in una successione a porci in grado di distinguerli l'uno dall'altro; tutt'al contrario, affinché noi possiamo ordinarli in una successione è necessario che essi si trovino già in qualche modo differenziati. Un ordinamento in successione presuppone sempre l'esistenza — fra gli oggetti ordinati — di rapporti (siano essi spaziali, o temporali, o logici, o di un altro tipo qualsiasi) che ci conducano da

un oggetto all'altro; questi rapporti poi richiedono in modo indispensabile che gli oggetti considerati risultino già distinti fra loro.

Allorché Hankel [1] ci dice di pensare o porre un oggetto 1 volta, 2 volte, 3 volte ecc., anche questo suo metodo ha tutto l'aspetto di un tentativo rivolto a riunire negli oggetti numerati i due caratteri dell'uguaglianza e della distinguibilità. Ma si vede subito che anche questo tentativo non è riuscito; è chiaro infatti che queste successive rappresentazioni o intuizioni del medesimo oggetto devono risultare in qualche modo diverse l'una dall'altra, se non vogliamo che confluiscano in una rappresentazione unica. Io ritengo d'altronde che sia lecito parlare per esempio di 45 milioni di Tedeschi, senza aver dovuto, a tale scopo, porre o pensare, in precedenza, un campione di Tedesco per 45 milioni di volte: questo sarebbe veramente troppo scomodo!

43. RAPPRESENTAZIONE DEI SINGOLI OGGETTI MEDIANTE IL SEGNO 1. SCHRÖDER Abbiamo visto a quante obiezioni si va incontro, allorché si decide con Jevons che ogni segno 1 significhi uno degli oggetti contati. Probabilmente è proprio per evitare questa difficoltà che Schröder vuole, invece, che ogni segno 1 non significhi, ma soltanto rappresenti, un oggetto. Ne segue però che la sua teoria riesce a spiegarci unicamente il segno numerico, non il numero in sé.

Schröder [2] scrive: "Per ottenere un segno, capace di esprimere quante di quelle unità sono presenti,[3] si dirige via via l'attenzione a ciascuna delle unità considerate, e la si rappresenta con una piccola asta: 1 (cioè con un numero uno, un uno). Poi si dispongono in fila queste aste, e perché non diano origine al numero 111, si collegano l'una all'altra con un segno +. Si ottiene cosí un numero del tipo

$$1+1+1+1+1\ .$$

La sua costituzione interna può venir descritta dicendo: 'Un numero naturale è la somma di vari uno'."

Il brano ora riferito ci mostra che per Schröder il numero è essenzialmente un segno. Le parole "quante di quelle unità sono presenti"

[1] HANKEL, *op. cit.*, p. 1.

[2] SCHRÖDER, *op. cit.*, pp. 5 sgg.

[3] Cioè quanti sono gli oggetti da contarsi.

provano poi, in particolare, che Schröder suppone già noto quel che viene espresso da tale segno, cioè quel che noi abbiamo chiamato finora numero. Anche allorché parla di "uno" egli intende proprio il segno 1, non il suo significato. Il segno + gli serve in un primo tempo, esclusivamente come segno di congiunzione esterna senza alcun particolare contenuto; solo piú tardi viene spiegata l'addizione. Egli avrebbe potuto esporre le stesse cose dicendo assai piú brevemente: si segnano, uno accanto all'altro, tanti 1 quanti sono gli oggetti da contare e si collegano col segno +. Lo zero verrebbe espresso non scrivendo nulla.

44. Il tentativo di Jevons di far astrazione dal tipo speciale delle differenze, mantenendo però la loro presenza. Lo 0 e l'1 sono numeri come gli altri. La difficoltà continua a sussistere
Per non inserire nel numero le caratteristiche degli oggetti, W. S. Jevons [1] scrive: "Sarà ora abbastanza facile formarsi una chiara idea dell'astrazione dei numeri. Questa astrazione consiste nel prescindere dal tipo speciale delle differenze, dalle quali scaturisce la molteplicità, tenendo presente l'unico fatto che delle differenze esistono. Quando parlo di tre uomini, non ho bisogno di specificare a una a una le caratteristiche in base alle quali ciascuno di essi si distingue dagli altri. È indubbio che di tali differenze ve ne sono, se si tratta effettivamente di tre uomini e non di un uomo solo; proprio nell'atto in cui parliamo di essi come di molti, affermiamo l'esistenza delle differenze volute. Un numero indeterminato può dunque considerarsi come *la forma vuota della diversità.*"

Come dobbiamo intendere questa spiegazione? Due cose sono possibili: o astrarre dalle proprietà distintive degli oggetti prima di riunirli in un tutto; oppure formare, per prima cosa, questo tutto, e poi astrarre dalle differenze specifiche. Seguendo la prima via, non giungiamo alla differenziazione degli oggetti, e quindi non possiamo nemmeno mantenere la presenza generica delle differenze; di fatto Jevons sembra piuttosto avere in mente la seconda. Non credo però che potremmo ottenere per questa seconda via il numero 100 000; non mi sembra infatti che noi siamo in grado di afferrare simultaneamente tante differenze e tenere poi ferma in mente la loro esistenza; d'altra parte, se non riuscissimo

[1] Jevons, *op. cit.*, p. 158.

ad afferrarle tutte contemporaneamente, il numero non risulterebbe mai completo. Senza dubbio noi riusciamo, impiegando un certo tempo, a contare un numero qualunque; ma questo atto non ci fa raggiungere effettivamente il numero, bensí ce lo fa soltanto determinare. Del resto la pura e semplice indicazione del modo di astrarre non costituisce ancora una definizione.

Che cosa dobbiamo immaginare per "forma vuota della diversità"? Dobbiamo forse pensare a una proposizione del tipo

a è diverso da *b*,

dove *a* e *b* rimangono indeterminati? Il numero due consiste proprio in questa affermazione? L'asserto

"la Terra ha due poli"

è davvero equivalente all'asserto

"il polo Nord è diverso dal polo Sud"?

Ovviamente no; è chiaro infatti che questa seconda proposizione potrebbe essere vera senza che lo sia la prima, e viceversa, potrebbe esser vera la prima, e non la seconda.

Se poi pensiamo al numero 1000, si dimostra subito che le proposizioni del tipo accennato, esprimenti una diversità, dovrebbero essere addirittura

$$\frac{1\,000\times999}{1\times2}.$$

In particolare la teoria di Jevons non può applicarsi ai due numeri 0 e 1. Ed invero: da che dovremmo astrarre, per elevarci da un dato oggetto (per esempio la Luna) al numero 1? Astraendo dalle particolarità della Luna, si ottengono i concetti: satellite della Terra, satellite di un generico pianeta, corpo celeste non fornito di luce propria, oggetto in generale; ma in questa serie non compare mai l'uno. Perché? Evidentemente perché esso non è un concetto sotto cui possa cadere l'individuo Luna. Quanto poi allo 0, non si ha nemmeno un oggetto da cui partire per compiere la desiderata astrazione.

Né si pretenda obiettare che 0 e 1 non sono numeri nello stesso senso di 2 e 3! Il numero, com'è noto, risponde alla domanda "quanti?"; e se per esempio si chiede: "Quante Lune ha un certo determinato pianeta?" si può pensare ugualmente bene che si risponda 0, o 1, o 2, o 3

Lune, senza che il senso della domanda debba perciò venir modificato. Senza dubbio lo 0 possiede certe sue caratteristiche particolari; e cosí l'1; ma ciò vale in fondo per ogni numero. Va soltanto osservato che queste caratteristiche particolari saltano sempre meno agli occhi, via via che il numero diventa piú grande. È, dunque, totalmente arbitrario voler qui introdurre una differenza di genere. Tutto ciò che non si addice allo 0 e all'1 non può risultare essenziale per il concetto generico di numero.

Noteremo infine che, pur accettando questa spiegazione dell'origine del numero, non si eliminano affatto le difficoltà incontrate, allorché esaminammo se l'espressione

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$$

possa o no servire quale denotazione del 5. Questa scrittura si accorda certo benissimo con quel che Jevons scrive circa l'astrazione generatrice dei numeri. I vari indici denotano infatti che vi è una diversità, senza dirci in particolare quale essa sia. Abbiamo visto, però, che questa pura esistenza della diversità è già di per sé sufficiente, nella teoria di Jevons, a generarci diversi uno, diversi due, diversi tre, ecc. e proprio questo è il fatto che non risulta in alcun modo compatibile con l'esistenza dell'aritmetica.

Soluzione della difficoltà

45. SGUARDO RETROSPETTIVO Diamo innanzi tutto uno sguardo retrospettivo a quanto è stato finora trovato e ai problemi rimasti da risolvere.

Il numero non è ricavato per astrazione dagli oggetti come lo sono colore, peso e durezza, né rappresenta una loro proprietà nel senso in cui la rappresentano questi.

Rimane aperto il problema: intorno a chi si afferma qualcosa, quando si pronuncia un giudizio numerico? [1]

Il numero non è nulla di fisico; ma neppure nulla di soggettivo: non è una rappresentazione.

Il numero non trae origine dalla riunione di un oggetto all'altro. Né

[1] [Per esempio quando si afferma che certi alberi sono 5, a chi viene attribuito questo numero? agli oggetti o al concetto che abbiamo di essi? Il problema verrà risolto nel paragrafo 46.]

la cosa riesce meglio se, dopo ogni aggiunta, si dà un nome all'insieme di oggetti ottenuto.

Le espressioni "molteplicità", "insieme", "pluralità" sono inadatte — a causa della loro indeterminatezza — a servire come spiegazione del numero.

Per ciò che riguarda l'uno e l'unità, rimase da risolvere il seguente problema: come si possa porre un limite all'arbitrio del nostro modo di concepirli, modo che parve annullare ogni differenza fra uno e molti.

L'esser delimitato, il non esser diviso, l'indivisibilità non sono caratteristiche, cui si possa ricorrere per determinare ciò che noi esprimiamo col termine "uno".

Allorché si dà il nome di "unità" agli oggetti da contare, l'affermazione incondizionata che tutte le unità risultano uguali fra loro è falsa. Dicendo invece che esse risultano uguali solo per un certo verso, si afferma qualcosa che è vero ma privo di valore. Si dimostra anzi la necessità, quando il numero è maggiore di uno, che gli oggetti da contare risultino fra loro diversi.

Parve dunque che si dovessero attribuire alle unità due caratteristiche fra loro contraddittorie: l'uguaglianza e la distinguibilità.

Occorre fare una profonda differenza fra uno e unità. Il termine uno infatti, essendo il nome specifico di un particolare oggetto della matematica, risulta incapace di plurale: il contrario accade invece del termine unità. È perciò privo di senso voler ricavare i numeri dalla riunione di piú uno. Il segno + che compare nell'uguaglianza $1+1=2$, non può significare affatto una riunione di questo tipo.

46. L'ATTRIBUZIONE DI UN NUMERO CONTIENE SEMPRE UN'AFFERMAZIONE INTORNO A UN CONCETTO. OBIEZIONE CHE IL NUMERO PUÒ MUTARE MENTRE IL CONCETTO RESTA IMMUTATO A scopo di chiarezza, sarà bene considerare il termine numero non in sé, ma in connessione con un giudizio numerico; cosí potremo cogliere il modo primordiale in cui tale termine viene usato. Se dinanzi allo stesso fenomeno esterno posso dire con ugual verità "Questo è un gruppo di alberi" e "Questi sono cinque alberi" oppure "Qui vi sono quattro compagnie" e "Qui vi sono 500 uomini", ciò mostra che nel passaggio dall'una all'altra espressione

non muta né il singolo oggetto né il complesso (l'aggregato) di oggetti, bensí soltanto la mia denominazione.

Dunque in tale passaggio non è avvenuto altro che questo: ad un concetto (cui si attribuisce un nome), ne è stato sostituito un altro (cui spetta un nome diverso). Siamo pertanto indotti a proporre, per il primo problema lasciato aperto nel paragrafo 45, la seguente risposta: l'attribuzione di un numero contiene sempre un'affermazione intorno ad un concetto.

La cosa risulta particolarmente chiara per il numero 0. Quando si dice: "Il pianeta Venere ha 0 satelliti", non vi è proprio alcun satellite o aggregato di satelliti intorno a cui possa venir affermato qualcosa. È invece al concetto "satellite di Venere" che l'asserto anzidetto attribuisce una proprietà (cioè quella di non comprendere nessun oggetto sotto di sé).

Analogamente, quando si dice: "La carrozza dell'imperatore è trainata da quattro cavalli", si attribuisce il numero quattro non ad un oggetto o gruppo di oggetti, ma al concetto "cavallo che traina la carrozza dell'imperatore".

Contro l'anzidetta risposta si può elevare la seguente obiezione: se dicendo che i cittadini dello Stato tedesco sono un certo numero x, enunciassimo davvero una proprietà del concetto "cittadino dello Stato tedesco", avremmo in tale numero una proprietà mutevole di anno in anno, mentre le caratteristiche del concetto considerato rimangono sempre le stesse. Rispondiamo che anche gli oggetti mutano le loro proprietà, il che non impedisce di riconoscerli da una volta all'altra; nulla di strano dunque che ciò accada per i concetti. Nel nostro esempio, poi, è facile indicare con esattezza il motivo del mutamento anzidetto: le proprietà del concetto "cittadino dello Stato tedesco" possono mutare, perché questo concetto contiene il tempo quale sua caratteristica variabile, ossia — per esprimerci in termini matematici — è funzione del tempo. Anziché dire: "a è un cittadino dello Stato tedesco", potremmo dire: "a appartiene allo Stato tedesco dell'epoca berlinese", proposizione quest'ultima dalla cui fòrma appare ben chiaro che l'asserto in essa contenuto si riferisce a un istante determinato: ne risulta in tal modo che vi è già qualcosa di fluente alla radice stessa del concetto in esame. Se invece parlassimo di "cittadini appartenenti allo

Stato tedesco all'inizio dell'anno 1883" avremmo un concetto ben determinato, e il numero che gli spetta sarebbe identico per tutta l'eternità.

47. Il carattere effettivo dell'attribuzione di un numero si spiega tenendo conto dell'oggettività del concetto Il fatto che l'attribuzione di un numero esprima qualcosa di effettivo, di indipendente dalla nostra concezione, può stupire soltanto chi, confondendo il concetto con la rappresentazione, lo ritenga di natura essenzialmente soggettiva. Questa interpretazione del concetto è però falsa. Quando subordiniamo il concetto di corpo a quello di pesante o quello di cetaceo a quello di mammifero, è noto che noi affermiamo con ciò qualcosa di oggettivo. Se, invece, i concetti fossero soggettivi, anche la subordinazione dell'uno all'altro dovrebbe risultare soggettiva, come lo è un rapporto fra rappresentazioni.

Senza dubbio la proposizione "Tutti i cetacei sono mammiferi" sembra, a prima vista, trattare di animali, non di concetti; se però ci domandiamo di quale animale concreto essa realmente parli, vediamo subito di non poterlo dire. E, anche posto che avessimo qui innanzi a noi un esemplare di cetaceo, si vede subito che la nostra proposizione non direbbe proprio nulla di esso. Per esempio non potrebbe farci concludere che l'animale presente è un mammifero, senza l'aggiunta della proposizione "Tale animale è un cetaceo" (ma è chiaro che quest'ultima non risulta affatto contenuta nella nostra proposizione iniziale).

In generale è impossibile parlare di un oggetto effettivo senza denotarlo e denominarlo in qualche modo; la parola "cetaceo" non denomina invece alcun oggetto particolare.

Se infine qualcuno vorrà obiettare che la nostra proposizione non parla per certo di alcun oggetto determinato, ma si riferisce soltanto ad uno indeterminato, io gli risponderò che le parole "oggetto indeterminato" costituiscono esclusivamente un sinonimo del termine "concetto" e anzi un sinonimo infelice perché contraddittorio.

Anche se ammettessimo che la nostra proposizione può giustificarsi soltanto in base all'osservazione dei singoli animali, ciò non proverebbe ancora nulla rispetto al suo contenuto. Per chi miri soltanto a dire di

che cosa essa tratta, è indifferente sapere se essa sia vera o no, o sapere su che basi noi possiamo ritenerla per vera.

Nell'ipotesi invece che il concetto sia qualcosa di oggettivo, anche le affermazioni intorno a esso conserveranno un certo lato di oggettività.

48. Risoluzione di alcune difficoltà Se da taluni esempi si ricava l'impressione che allo stesso oggetto possano spettare, secondo i casi, numeri diversi, ciò si spiega pel fatto che in tali esempi si assunsero degli oggetti come portatori del numero. Appena però rimettiamo in luce il vero portatore del numero, cioè il concetto, vediamo subito che i vari numeri si escludono l'uno con l'altro, proprio come, in un altro campo, si escludono fra loro i colori.

Vediamo ora come mai ci venga in mente, con tanta naturalezza, l'idea che il numero si ricavi per astrazione dagli oggetti. Il motivo è che l'astrazione precede, assai spesso, la formulazione dei giudizi aritmetici: non, tuttavia, per ricavare il numero, ma per ricavare il concetto in cui si scoprirà il numero. Cadrebbe in un errore all'incirca analogo, chi volesse dire: si ricava il concetto di "edificio esposto al pericolo di incendi" costruendo una casa a tavolati con facciata in assi e tetto di paglia, fornita di camini poco solidi.[1]

La forza di connessione che risiede nei concetti, è molto superiore a quella che risiede nell'appercezione sintetica. Con quest'ultima non sarebbe possibile riunire in una visione unica i moltissimi cittadini dello Stato tedesco; con quella invece si riesce senza difficoltà a portarli tutti sotto un medesimo concetto "cittadino dello Stato tedesco" e quindi a contarli.

Ormai risulta pure spiegata la vastissima applicabilità del numero. Già osservammo quanto fosse difficile comprendere come mai la stessa cosa possa riuscire applicabile tanto a fenomeni esterni quanto a fenomeni interni, tanto a ciò che esiste nello spazio e nel tempo quanto a ciò che è fuori di essi. E invero questo fatto così misterioso non ha luogo nemmeno per i giudizi numerici. I numeri vengono applicati

[1] [Il processo reale è invece il seguente: prima si costruisce quella casa a tavolati con camini poco solidi, e poi, in un secondo tempo, si scopre in essa la proprietà di "edificio esposto al pericolo di incendi". Analogamente per i giudizi numerici: prima si costruisce per mezzo dell'astrazione un concetto ben preciso (per esempio il concetto di "cittadini dello Stato tedesco all'inizio del 1883") e poi, solo in un secondo momento, si scopre che a questo concetto spetta un certo numero.]

esclusivamente ai concetti; è invece sotto i concetti che può venir portato tanto l'esterno quanto l'interno, tanto ciò che esiste nello spazio e nel tempo quanto ciò che è fuori di essi.

49. CONFERMA RICAVATA DA UNO SCRITTO DI SPINOZA Troviamo una conferma della nostra opinione in Spinoza, il quale scrive: [1] "Rispondo che un oggetto può venir chiamato uno o unico solo per rispetto alla sua esistenza, non alla sua essenza. Infatti noi possiamo applicare i numeri agli oggetti, solo dopo aver riportato questi oggetti a una misura comune. Supponiamo per esempio che qualcuno prenda in mano un sesterzio e un imperiale; egli non penserà al numero due, se non avrà indicato questo sesterzio e questo imperiale con il medesimo nome. Solo dopo che avrà introdotto il nome comune moneta, applicabile tanto al sesterzio quanto all'imperiale, potrà dire di avere in mano due monete."

Quando invece, poco dopo, scrive: "Risulta di qui chiaro che potremo chiamare un oggetto uno o unico, solo allorché ce ne saremo rappresentato un altro, simile (come si disse) al primo" e ne conclude che, a rigore, non è lecito affermare l'unicità di Dio poiché non possiamo formarci alcun concetto astratto della sua essenza, egli è — secondo noi — in errore, perché mostra con ciò di ritenere che i concetti possano ricavarsi unicamente mediante astrazione da piú oggetti. Il fatto è invece che si può giungere a un concetto anche partendo dalle note delle cose; in tal caso è possibile che il concetto ottenuto non abbracci sotto di sé alcun oggetto. Se non avvenisse cosí, sarebbe impossibile pronunciare un giudizio che neghi l'esistenza di qualcosa; ma allora anche l'affermazione dell'esistenza perderebbe il suo contenuto.

50. TEORIA SVILUPPATA DA SCHRÖDER Ernst Schröder [2] pone in rilievo che, se si deve poter dire che un certo oggetto compare varie volte, il nome di quest'oggetto dev'essere in ogni caso un nome comune, un nome generale di concetto (*notio communis*): "E invero, non appena si prende in considerazione un oggetto nella sua completa individualità, con tutte le sue proprietà e i suoi rapporti, esso risulta unico nel mondo

[1] BAUMANN, *op. cit.*, vol. 1, p. 169.
[2] SCHRÖDER, *op. cit.*, p. 6.

e non ne esistono altri a lui uguali. Il suo nome avrà allora il carattere di un nome proprio (*nomen proprium*), e l'oggetto non potrà venir pensato come presentantesi ripetute volte. Né questo vale soltanto per gli oggetti concreti, esso è vero in generale per tutte le cose, anche per quelle a comprender le quali si può giungere solo per via di astrazione; infatti soltanto una rappresentazione del tipo accennato racchiude in sé elementi sufficienti a determinare in modo completo la cosa presa in esame... Una cosa può diventare oggetto di numerazione solo in quanto si prescinda (o si astragga) da alcune note e relazioni sue caratteristiche, per le quali essa si distingue da tutte le altre; soltanto con una tale astrazione il suo nome può trasformarsi in concetto applicabile a parecchie cose."

51. RETTIFICAZIONE DELLA TEORIA DI SCHRÖDER Nel passo ora citato, la verità si trova rivestita da espressioni cosí tortuose e cosí facili a indurci in errore, che si rende molto desiderabile cercar di districare e vagliare il pensiero rigoroso in esse contenuto. In primo luogo non è esatto chiamare "nome di un oggetto" il nome generale di un concetto. Da questa inesattezza sorge l'illusione che il numero sia proprietà delle cose. Qualunque nome generale di un concetto indica effettivamente un concetto. Soltanto per l'aggiunta dell'articolo determinativo o di un pronome dimostrativo esso si trasforma in nome proprio di un oggetto, ma allora cessa di valere come nome di concetto. Il nome di un oggetto è sempre un nome proprio. Un oggetto non compare mai varie volte; la realtà è invece che parecchi oggetti possono cadere sotto lo stesso concetto. Già commentando il passo di Spinoza citato al paragrafo 49, si osservò che l'astrazione non è l'unico modo di formare i concetti. Qui voglio aggiungere che un concetto non cessa di essere tale per il fatto che sotto di lui cada un unico oggetto (oggetto che risulterà pertanto completamente determinato da quel concetto).

A un concetto di quest'ultimo tipo (per esempio al concetto di "satellite della Terra") spetta precisamente il numero 1, che risulta un numero nello stesso senso in cui lo sono 2 e 3.

Quando ci si trova dinanzi a un concetto, ci si domanda sempre se esso abbracci sotto di sé qualcosa, e, precisamente, che cosa. Invece, per un nome proprio, queste domande sono prive di senso. Non ci si

deve lasciar trarre in inganno per il fatto che la lingua comune usa promiscuamente la stessa parola (per esempio la parola "Luna") ora come nome proprio, ora come nome di concetto; la differenza sussiste ciò malgrado. Non appena una parola viene usata con l'articolo indeterminativo, oppure in forma plurale senza articolo, essa risulta certamente un concetto.

52. Conferma dell'opinione esposta nel paragrafo 46 mediante l'esame di una regola grammaticale valida nella lingua tedesca

Possiamo trarre dalle regole in uso nella lingua tedesca un nuovo argomento in favore dell'opinione, esposta nel paragrafo 46, secondo cui il numero è qualcosa che viene asserito intorno ai concetti e non intorno agli oggetti. La lingua tedesca dice infatti: "10 *Mann*", "4 *Mark*", "3 *Fass*",[1] ove è probabile che il singolare accenni proprio al fatto che si pensa al concetto, non all'oggetto. Il vantaggio della regola anzidetta salta particolarmente agli occhi per il numero zero.

Quando non si applica tale regola, pare invece, senza alcun dubbio, che la lingua riferisca il numero all'oggetto e non al concetto. Si dice per esempio "numero delle palle", come si dice "peso delle palle" e sembra, cosí, che si parli in entrambi i casi di oggetti; nel primo invece si parla di un concetto. Quest'uso della lingua è illusorio. L'espressione "quattro destrieri purosangue" ci induce erroneamente a credere che il "quattro" determini il concetto "destriero purosangue" proprio come la specificazione "purosangue" determina il concetto "destriero". La realtà però è un'altra: soltanto nella parola "purosangue" noi abbiamo davvero una nota caratteristica che serve a determinare un concetto; nulla di simile invece nella parola "quattro": essa ci serve ad un altro fine, ad asserire qualcosa intorno ad un concetto.[2]

[1] [*Mann*, *Mark*, *Fass*, al singolare. Invece la lingua italiana dice "10 uomini", "4 marchi", "3 botti".]

[2] [Immaginiamo data la classe C di tutti gli oggetti che portano il nome di cavalli; alcuni di essi godono la proprietà di essere "purosangue" e altri no. Dicendo "cavalli purosangue" noi veniamo dunque a staccare entro la classe C una sottoclasse C', formata da tutti e soli i cavalli che sono purosangue. Nulla di simile facciamo invece colle parole "quattro cavalli purosangue"; sarebbe infatti privo di senso asserire che alcuni fra gli oggetti della sottoclasse C' godono della proprietà di essere quattro e altri no. In realtà, quando diciamo "quattro cavalli purosangue" noi ci troviamo innanzi a una classe speciale K, formata da cavalli purosangue che in un dato momento tirano la carrozza dell'imperatore. Allora il termine "quattro" non serve a riunire in una sottoclasse K' certi individui di K, a esclusione di certi altri, ma serve a designare una proprietà dell'intera classe.]

53. Differenza fra note caratteristiche di un concetto e proprietà di un concetto. Esistenza e numero Parlando di proprietà che vengono attribuite a un concetto, io non intendo, naturalmente, le note caratteristiche che compongono tale concetto. Queste note caratteristiche sono proprietà degli oggetti che cadono sotto il concetto, non del concetto in sé. Per esempio parlando del concetto "triangolo rettangolo", non dirò che "l'essere ad angolo retto" sia una proprietà di esso; dirò invece che la proposizione "Non esistono triangoli rettangoli piani equilateri" esprime una proprietà del concetto "triangolo piano rettangolo equilatero"; tale proposizione attribuisce a questo concetto il numero zero.

Sotto l'aspetto ora considerato, l'esistenza presenta qualche analogia con il numero. Affermare l'esistenza equivale infatti a negare il numero zero.

È proprio perché l'esistenza costituisce una proprietà del concetto (e non una nota caratteristica), che la prova ontologica dell'esistenza di Dio non raggiunge il suo scopo.

Altrettanto va ripetuto dell'unicità; essa non è una nota caratteristica del concetto "Dio" come non lo è l'esistenza. L'unicità non può venir usata per la definizione del concetto "Dio", proprio come non possono venir usate, per la costruzione di una casa, la solidità, la spaziosità, l'abitabilità; per definire un concetto si usano le sue note caratteristiche, per costruire una casa si usano le pietre, il cemento, le travi.

Il fatto che qualcosa è una proprietà del concetto, non basta però a farci escludere che essa possa ricavarsi dal concetto, cioè dalle sue note caratteristiche. In alcuni casi tale proprietà risulterà ricavabile dalle note caratteristiche, in altri no; proprio come, dal genere di travi di cui è composto un edificio, si può in certi casi trarre qualche conclusione sulla sua solidità, in altri no. Sarebbe quindi esagerato asserire che risulta sempre impossibile, dalle note caratteristiche di un concetto, dedurre qualcosa circa la sua esistenza e la sua unicità. Un fatto però è certo: anche quando una tale deduzione è possibile, essa non costituisce mai qualcosa di cosí immediato come l'attribuzione delle proprietà, espresse dalle note caratteristiche di un concetto, agli oggetti che cadono sotto di esso.

Pure falso sarebbe voler negare che, in alcuni casi, esistenza e unicità possono fungere da note caratteristiche di un concetto. Va soltanto osservato che, anche in questi casi, esse non sono le note caratteristiche del concetto, cui parrebbe riferirle la forma linguistica in cui si trovano espresse. Consideriamo per esempio tutti i concetti sotto i quali cade un unico oggetto, e immaginiamo di raccoglierli sotto un nuovo concetto; allora l'unicità risulta una nota caratteristica di quest'ultimo (mentre è una proprietà dei concetti che cadono sotto di esso). Sotto il nuovo concetto considerato cadrà per esempio il concetto "satellite della terra", non cadrà invece quel particolare corpo celeste che può venir denotato da tali parole. In questo modo risulta possibile far cadere uno o piú concetti sotto un concetto piú alto (che potrebbe venir chiamato concetto di secondo ordine [1]). Simile rapporto non va però confuso col rapporto di subordinazione.[2]

54. Può venir attribuito il nome di unità al soggetto di un'attribuzione numerica. Indivisibilità e delimitatezza della unità. Uguaglianza e distinguibilità Sarà ora possibile dare una spiegazione soddisfacente della unità. A pagina 7 del trattato che poco fa abbiamo citato, E. Schröder scrive: "Quando, a partire da un nome comune o concetto, si forma, nel modo sopra spiegato, un numero, si dice che quel nome comune denomina questo numero; esso costituisce l'essenza dell'unità del numero ottenuto." [3]

Di fatto, quando ad un concetto spetta un numero, la cosa piú conveniente sembra proprio chiamare questo concetto unità rispetto

[1] [Sulla importante distinzione fra concetti di primo e di secondo ordine, si veda la parte terza di questo volume, Sezione I, 2, § 3 e § 4.]

[2] [Se alle note caratteristiche di un concetto *A* ne aggiungiamo qualcuna nuova, otteniamo un concetto *B* ***subordinato*** ad *A*. Il rapporto di subordinazione ci dice che: tutti gli oggetti i quali cadono sotto *B* cadono pure sotto *A*, ossia la classe degli oggetti rientranti in *B* è una parte della classe di oggetti rientranti in *A*; non ci dice affatto che il concetto *B* sia esso stesso uno degli oggetti rientranti in *A*. Invece il rapporto spiegato nel testo è totalmente diverso: esso ci dice proprio che i primi concetti considerati (uno di essi è il concetto "satellite della terra") costituiscono tutti e soli gli enti che cadono sotto il concetto di nuova formazione.]

[3] [Supponiamo di partire dal nome comune (o concetto) "satellite di Giove"; sappiamo che a esso spetta il numero quattro. Allora — stando alle parole di Schröder citate nel testo — si sarebbe soliti dire che: il nome comune (o concetto) "satellite di Giove" denomina (*benennt*) questo numero quattro. Ciò va inteso nel senso che: tale nome comune serve a denotare tutti e quattro gli oggetti qui enumerati. Esso costituisce dunque l'essenza dell'unità, in rapporto al numero quattro ottenuto nella presente numerazione.]

a quel numero. Ciò facendo, possiamo ottenere un senso preciso per le due affermazioni piú volte ripetute intorno all'unità: e cioè che essa sia separata dall'ambiente che la circonda e che sia indivisibile. È noto infatti che il concetto cui viene attribuito un numero, delimita sempre in modo ben determinato ciò che cade sotto di esso. Cosí il concetto "lettera della parola tedesca *Zahl*" delimita perfettamente la *Z* rispetto all'*a*, questa rispetto all'*h* ecc. Cosí il concetto "sillaba della parola tedesca *Zahl*" pone innanzi a noi la parola come un tutto, e cioè come un qualcosa di indivisibile (nel senso che le parti di essa non cadono piú sotto il concetto "sillaba della parola *Zahl*"). Invece i concetti cui non spetta alcun numero, non sono costituiti in questo modo. È, per esempio possibile scomporre ciò che cade sotto il concetto di rosso, senza che le parti ottenute cessino di cadere sotto tale concetto; e infatti al concetto "rosso" non spetta alcun numero.

L'affermazione che l'unità risulta delimitata e indivisibile, può quindi venire chiarita: soltanto un concetto che delimiti e determini quanto cade sotto di sé e non ne permetta alcuna arbitraria suddivisione, può costituire un'unità in rapporto a un numero finito.

Si vede però che il termine "indivisibile" ha qui un significato speciale.

Ora siamo finalmente in grado di rispondere senza difficoltà alla domanda, come risultino conciliabili fra loro l'uguaglianza e la distinguibilità delle unità. La parola unità viene qui usata in due sensi diversi.

Le unità risultano uguali fra loro, se intendiamo la parola unità nel senso or ora spiegato. Si esamini per esempio la proposizione "Giove ha 4 satelliti". In essa il concetto "satellite di Giove", sotto cui cadono certi corpi celesti (che possiamo denotare con I, II, III, IV), costituisce — stando alla nostra spiegazione — l'unità. Osservando, dunque, che tanto il corpo celeste I, quanto il II, ecc. cadono sotto la medesima unità, se ne può concludere ovviamente: l'unità, cui è riferito I, è eguale all'unità, cui è riferito II, ecc. E resta cosí spiegata la proprietà dell'uguaglianza.

Quando invece si afferma la distinguibilità delle unità, è perché sotto il termine unità si intendono proprio gli oggetti contati (cioè i corpi I, II, ecc.).

5.

Il concetto di numero naturale

[Questo è il capitolo piú propriamente matematico di tutta l'opera; perciò i lettori che abbiano interessi prevalentemente filosofici non riusciranno forse ad apprezzarlo in tutti i suoi particolari. Tuttavia, anche se taluno dovesse tralasciare la lettura di qualche paragrafo, questo fatto non gli impedirà di comprendere a fondo il pensiero generale di Frege, purché egli non si lasci sfuggire il nucleo centrale del capitolo, e soprattutto si renda ben conto del valore logico veramente notevole della definizione di numero naturale proposta da Frege e della sua completa novità rispetto alle definizioni di altri autori esaminate nei capitoli precedenti.

A titolo di orientamento, indicheremo i punti di maggior interesse.

Prima di tutto sono notevoli il paragrafo 60 e il paragrafo 62, che espongono il canone logico fondamentale seguito da Frege in questa ricerca — canone cui egli aveva già accennato nelle ultime pagine dell'introduzione — e, cioè, di non prendere in esame le singole parole isolate, ma le proposizioni complete: soltanto in queste ultime le parole acquistano un senso logico e preciso. Applicata al caso dei numeri questa regola ci dice: essendosi accertato nel quarto capitolo che i numeri spettano ai concetti e non agli oggetti, bisogna stabilire innanzi tutto, con precisa esattezza, il senso della proposizione "Un concetto F risulta *ugualmente numeroso* al concetto G". L'idea cui Frege ricorre per stabilire il senso di questa proposizione è accennata nel paragrafo 63 e sviluppata nel paragrafo 68: essa consiste nella corrispondenza biunivoca fra gli oggetti che cadono sotto il concetto F e quelli che cadono sotto il concetto G.

Stabilito in tal modo il senso preciso dell'attributo "ugualmente numeroso", Frege può infine spiegare — avvalendosi per l'appunto del senso di questo attributo — che cosa egli intenda per numero naturale. Ciò egli compie, in poche righe, alla fine dello stesso paragrafo 68, identificando il concetto di numero naturale con "l'estensione del concetto 'ugualmente numeroso' ". I paragrafi successivi sono dedicati a chiarire, analizzare, difendere, l'anzidetta definizione. Notevole, in particolare, il paragrafo 70 che mostra il carattere logico del concetto di relazione. I paragrafi successivi (71,72,73), di lettura alquanto difficile per il loro tecnicismo, mirano a provare che la corrispondenza biunivoca, mediante la quale fu definito il senso dell'attributo "ugualmente numeroso", può ricondursi per intero al con-

cetto di relazione: così il numero naturale risulta introdotto da Frege per mezzo di due idee puramente logiche, quella di estensione e quella di relazione. È questa la grande scoperta che apre la via alla così detta "logicizzazione" dell'aritmetica.

Il resto del capitolo è dedicato a definire i numeri naturali finiti, in particolare lo zero e l'uno, e quelli infiniti.

Interessante, per il suo accentuato carattere platonico, il paragrafo 80 in cui Frege spiega il valore oggettivo della relazione logica del "seguire".]

Ogni singolo numero è un oggetto a sé

55. TENTATIVO DI COMPLETARE LE DEFINIZIONI LEIBNIZIANE DEI SINGOLI NUMERI Dopo aver riconosciuto che l'attribuzione di un numero contiene un'affermazione intorno a un concetto, possiamo cercar di completare le definizioni leibniziane dei singoli numeri aggiungendovi la definizione dello 0 e dell'1.

Dopo quanto venne finora spiegato, risulta naturale la seguente definizione: a un concetto spetta il numero 0, se nessun oggetto cade sotto di esso.

Qui sembra però che non si sia fatto altro fuorché sostituire, in luogo dello 0, il termine equivalente "nessuno". Perciò riesce preferibile il seguente enunciato: a un concetto spetta il numero 0, se, dato un qualsiasi oggetto *a*, sia sempre vera l'affermazione che *a* non cade sotto il concetto anzidetto.

Analogamente si definisce l'1: a un concetto *F* spetta il numero 1, se innanzitutto non è vero che, dato un qualsiasi *a*, valga sempre l'affermazione che *a* non cade sotto *F*; e inoltre, dalle due proposizioni

"*a* cade sotto *F*" e "*b* cade sotto *F*"

si ricavi in generale che *a* e *b* sono identici.

Ormai non ci resta che spiegare il passaggio generico da un numero al successivo. Tenteremo a tale scopo la seguente definizione: al concetto *F* spetta il numero $(n+1)$, allorché — prendendo un oggetto *a* che cade sotto *F*, e formando con esso il nuovo concetto "subordinato a *F*, ma diverso da *a*" — troviamo che a questo nuovo concetto *G* spetta il numero *n*.

56. LE DEFINIZIONI RAGGIUNTE COL PRECEDENTE TENTATIVO RISULTANO INSERVIBILI, PERCHÉ NON SPIEGANO IL NUMERO, MA UNA PROPOSIZIONE

DI CUI IL NUMERO COSTITUISCE SOLTANTO UNA PARTE Dopo le analisi dei capitoli precedenti, le definizioni proposte nel paragrafo 55 sembrano cosí spontanee e naturali, che si rende necessario spiegare per disteso come mai esse in realtà non siano soddisfacenti.

Innanzi tutto salta agli occhi una difficoltà insita nell'ultima definizione. In essa si fa uso dell'espressione "al concetto *G* spetta il numero n"; però il senso di queste parole ci è, a rigore, altrettanto sconosciuto quanto il senso dell'espressione "al concetto *F* spetta il numero $(n+1)$". Per mezzo di essa e delle precedenti definizioni, noi possiamo, senza dubbio, spiegare che cosa significhi l'asserto

"Al concetto *F* spetta il numero $1+1$"

e poi partendo da quest'ultimo, possiamo spiegare il senso della espressione

"Al concetto *F* spetta il numero $1+1+1$"

ecc. Non possiamo però decidere — tanto per fare un esempio assai grossolano ma chiaro — se a qualche concetto spetti o no il numero "Giulio Cesare", cioè non possiamo decidere se questo famoso conquistatore delle Gallie sia o no un numero.

Si vede inoltre che è impossibile dimostrare, avvalendosi soltanto delle definizioni proposte nel paragrafo 55, che, se al medesimo concetto *F* spettano tanto il numero a quanto il numero b, debba risultare necessariamente $a=b$. Non sarebbe quindi giustificabile l'espressione "*il* numero che spetta al concetto *F*", e perciò, data l'impossibilità di concepire un numero determinato, riuscirebbe generalmente impossibile concepire un'uguaglianza numerica.

È soltanto un'illusione la nostra, di aver spiegato il numero 0 e il numero 1; in realtà abbiamo unicamente stabilito il senso delle espressioni

"spetta il numero 0" e "spetta il numero 1",

ma di qui non si riesce affatto a caratterizzare lo 0 e l'1 come oggetti forniti di un'esistenza loro propria che sia possibile riconoscere da una volta all'altra.

57. L'ATTRIBUZIONE DI UN NUMERO VA RIGUARDATA COME UN'UGUAGLIANZA FRA NUMERI È giunto il momento di esaminare un po' piú da vicino le parole da noi cosí spesso ripetute, e cioè che l'attribuzione

di un numero contenga una affermazione intorno a un concetto.

Cominciamo a notare che, nell'asserto "Al concetto *F* spetta il numero 0", il termine 0 costituisce soltanto una parte del predicato quando si riguardi il concetto *F* come soggetto effettivo. È perciò che ho evitato di asserire che un numero, come 0, 1, 2, costituisca una proprietà di un concetto. Il singolo numero, proprio perché è soltanto una parte dell'affermazione, pare piuttosto un oggetto a sé.

Già sopra ho attratto l'attenzione sul fatto che suol dirsi "l'1" e non semplicemente "1", e che usando l'articolo determinativo ci si rappresenta il numero 1 come un oggetto autonomo. Questa autonomia fa capolino dovunque nell'aritmetica, per esempio nell'uguaglianza $1+1=2$. Né può disturbarci il fatto che, nell'uso comune della lingua, il numero compaia spesso anche in funzione attributiva; qui invero una cosa sola ci preme: di capir bene il concetto di numero cosí come entra nella scienza.

Del resto si può sempre evitare di usarlo nella funzione attributiva. Per esempio, invece di dire "Giove ha 4 satelliti", si può dire "il numero dei satelliti di Giove è 4". In quest'ultima espressione il termine "è" non può riguardarsi quale una pura e semplice copula come nella proposizione "il cielo è azzurro"; tant'è vero che risulta lecito sostituirvi quest'altra espressione "il numero dei satelliti di Giove è il numero 4". Qui il termine "è" ha palesemente il senso di "è uguale" "è identico a". Abbiamo dunque, in conclusione, un'uguaglianza la quale asserisce che l'oggetto denotato con le parole "il numero dei satelliti di Giove" è identico all'oggetto denotato col termine "4". La forma dell'uguaglianza è proprio la forma dominante in tutta l'aritmetica.

E non si obietti che nel termine "4" non ritroviamo nulla né di Giove né dei suoi satelliti. Anche nel nome "Colombo" non ritroviamo alcun riferimento né all'atto dello scoprire né al continente americano, e ciò malgrado le due espressioni "Colombo" e "scopritore dell'America" denotano proprio la stessa persona.

58. Obiezione della non rappresentabilità del numero come oggetto autonomo. Il numero è qualcosa che non risulta in alcun modo rappresentabile Si potrebbe qui obiettare che non riusciamo mai a

rappresentarci [1] l'oggetto poco fa denotato col termine "4" o con le parole "numero dei satelliti di Giove" come se fosse davvero qualcosa di autonomo.[2] Rispondiamo che la colpa di ciò non è affatto l'autonomia attribuita poco fa al numero. Senza dubbio si è soliti credere che, nella rappresentazione di quattro oggetti [per esempio, dei quattro punti segnati sulla faccia di un dado da gioco], si possa proprio cogliere qualcosa che corrisponda al termine "4". Questa però è soltanto una illusione. Si pensi — per convincersene — a un prato verde, e si esamini se la rappresentazione che abbiamo di esso cambia, allorché venga sostituito il termine numerico "uno" all'articolo indeterminato "un". È facile vedere che, mentre alla parola "verde" corrisponde qualcosa di ben preciso nella nostra rappresentazione del prato, nulla si aggiunge invece introducendo il termine numerico "uno". Altro esempio: allorché ci si rappresenta la parola scritta "oro", non si è tratti a pensare ad alcun numero; quando invece ci si domanda di quante lettere essa è composta, vien subito in mente il numero 3. Orbene, qui di nuovo è facilissimo vedere che questo "3" non reca proprio alcuna maggior determinazione nella nostra rappresentazione della parola scritta "oro"; si pensi o non si pensi al numero delle lettere di cui essa è composta, la nostra rappresentazione della parola "oro" rimane assolutamente immutata. Ciò in cui scopriamo il numero 3, non è, a rigore, l'anzidetta rappresentazione, ma il concetto sopraggiunto "lettere della parola oro". La cosa è un po' meno chiara per i 4 punti segnati sulla faccia di un dado da gioco; qui infatti il concetto sopraggiunto (cui, a rigore, spetta il numero 4) sorge in noi tanto naturalmente per l'uguaglianza dei punti segnati, che non è facile percepire il momento in cui esso subentra accanto alla rappresentazione.

La realtà è che il numero non può venir rappresentato, né come oggetto a sé, né come proprietà connessa a qualche oggetto esterno. Esso infatti non è né qualcosa di sensoriale, né una proprietà degli oggetti esterni.

Quanto è stato ora detto acquista la massima chiarezza se viene riferito al numero zero. È palese infatti che sarà vano qualunque ten-

[1] Uso qui il termine "rappresentazione" nel senso di qualcosa che venga appresa in forma di immagine.

[2] [Cioè come se fosse fornito di una esistenza propria, separabile dalla esistenza degli oggetti considerati.]

tativo di rappresentarci zero oggetti, per esempio zero stelle. Possiamo senza dubbio immaginare il cielo coperto di nubi; ma in questa rappresentazione non vi è proprio nulla che corrisponda alla parola "zero" o alla parola "stelle". Ciò che ci rappresentiamo, in essa, è soltanto una situazione particolare, da cui potremo poi essere condotti al giudizio: non si vede alcuna stella.

59. UN OGGETTO NON VA ESCLUSO DALLA NOSTRA RICERCA SOLO PERCHÉ RISULTA NON RAPPRESENTABILE Può darsi che ogni parola risvegli in noi una rappresentazione; forse ciò accade persino per avverbi come "soltanto". Non è necessario, però, che questa rappresentazione corrisponda proprio al contenuto della parola; può accadere anzi che essa risulti totalmente diversa nei diversi uomini. Il piú delle volte, per rappresentarsi una parola, ci si rappresenta una situazione particolare che ci porta a qualche giudizio, in cui rientra tale parola o da cui essa ci viene, in un modo o nell'altro, richiamata alla mente.

Ciò non ha luogo soltanto per quelle speciali parole che sono le particelle del discorso. Anche della nostra distanza dal Sole, tanto per fare un esempio, noi non possiamo certamente avere alcuna effettiva rappresentazione. È chiaro invero che, pur conoscendo la regola per moltiplicare una certa unità di misura per un numero grande ad arbitrio, non potremo mai, servendoci di essa, formarci qualche immagine la quale riesca ad approssimarsi a quella voluta. Ciò non costituisce tuttavia un motivo per dubitare dell'esattezza del calcolo che ci ha fatto trovare tale distanza, né per aver paura di fondare altri ragionamenti sul valore di tale distanza.

60. PERFINO GLI OGGETTI CONCRETI NON SONO SEMPRE RAPPRESENTABILI. QUANDO SI INDAGA IL SIGNIFICATO DELLE PAROLE, BISOGNA CONSIDERARE QUESTE PAROLE NON IN SÉ, MA INSERITE NELLE PROPOSIZIONI Anche per un oggetto concreto come la Terra, non ci riesce di rappresentarcelo come abbiamo appreso che essa effettivamente è; ci accontentiamo infatti di prendere come sua immagine una sfera di modesta grandezza, sapendo però che la Terra è ben diversa da essa. Né questa diversità ci è di ostacolo nei nostri giudizi; tutt'al contrario, noi siamo in grado

di giudicare con notevole sicurezza intorno a oggetti come la Terra, persino per quel che riguarda le loro stesse dimensioni.

Spesso il pensiero ci trasporta al di sopra del rappresentabile, senza che si perda, per ciò, la base dei nostri ragionamenti. Anche se, come pare, noi uomini non possiamo pensare senza rappresentazioni, il nesso fra queste e il pensato può essere tuttavia completamente estrinseco, arbitrario, convenzionale.

La non rappresentabilità del contenuto di una parola non costituisce dunque un motivo per negarle ogni significato, o escluderla dall'uso linguistico. Se a prima vista ci potrebbe sembrare vero il contrario, ciò dipende dal fatto che noi prendiamo in esame, abitualmente, le parole isolate, e vogliamo trovare proprio per ciascuna di esse, presa in sé, un particolare significato. È questo errore iniziale che ci costringe a ricorrere alle rappresentazioni. Da ciò dipende se in nessuna parola sembra possibile ritrovare il benché minimo contenuto, per cui ci manca una immagine interna corrispondente.

In realtà noi dobbiamo, invece, prendere in esame le proposizioni complete. Soltanto in esse, a rigore, le parole hanno un significato. Le immagini interne, che balenano innanzi a noi allorché pensiamo a quelle proposizioni, non hanno bisogno di corrispondere alle componenti logiche del giudizio. È sufficiente che la proposizione, nella sua totalità, abbia un senso; da esso si ricava poi il contenuto delle singole parti.[1]

[1] [La regola qui esposta da Frege si è dimostrata assolutamente fondamentale nella moderna filosofia del linguaggio; anzi, possiamo dire che essa segna il vero e proprio punto di separazione fra la vecchia e la nuova impostazione di tale filosofia. Il senso delle proposizioni risulterebbe, secondo i vecchi filosofi del linguaggio, qualcosa di derivato, qualcosa che dipende dal significato dei termini che le costituiscono; e la proposizione risulterebbe evidente (assiomatica) quando enuncia rapporti che scaturiscono immediatamente dal significato di tali termini. Il contrario accade invece per i moderni indirizzi; come scrive Wittgenstein (*Tractatus Logico-Philosophicus*, prop. 3, 3): "Soltanto la proposizione ha un senso; soltanto nel contesto della proposizione un nome ha un significato." Di conseguenza la nuova filosofia ritiene che il primo passo di ogni sistema deduttivo consista nell'enunciare con precisione i propri assiomi: questi non hanno il compito di esprimere delle verità evidenti o delle intuizioni piú o meno vaghe, ma di definire implicitamente i termini che li costituiscono. Naturalmente, tali definizioni implicite forniranno ai propri termini non un significato che spetta loro quando li consideriamo come parole isolate (significato che dovrebbe rispecchiare l'insieme di rappresentazioni che sorgono in noi quando pronunciamo tali termini), ma esclusivamente un significato rigoroso, controllabile, che spetta loro ogniqualvolta si trovano inseriti in certi nessi ben determinati.

Sarebbe tuttavia inesatto attribuire a Frege una piena consapevolezza della portata della sua affermazione. In effetti gli sfugge l'importanza delle definizioni implicite — essenziali nel metodo assiomatico modernamente intesto — e anzi vedremo nella quarta parte che egli le combatte nel corso delle sue lettere a Hilbert.]

Credo che la precedente osservazione riesca a portare un po' di luce su alcuni concetti assai difficili della matematica (come per esempio quello di infinitesimo [1]), e che la sua efficacia si estenda pure molto al di là della matematica.

Quando pretendo che il numero sia qualcosa di autonomo, non voglio dire con ciò che i termini numerici debbano possedere un significato fuori dal contesto di qualunque proposizione; voglio soltanto escludere che essi possano usarsi come attributi o come predicati, il che verrebbe ad alterare alquanto il loro significato.

61. Obiezione della non-spazialità dei numeri. Non ogni oggetto è spaziale Ammettiamo pure — obietterà forse qualcuno — che la Terra possa anche risultare a rigor di termini non rappresentabile; essa è però, senza dubbio, un oggetto esterno che occupa un posto ben determinato. Ma con qual diritto possiamo ammettere che anche il 4 sia un oggetto, visto che esso non occupa alcuno spazio, non essendo né in noi né fuori di noi?

L'obiezione sarebbe giusta, se noi affermassimo che il 4 è un oggetto spaziale. Una qualsiasi determinazione di luogo per il numero 4 non ha evidentemente alcun senso. Di qui però si conclude soltanto che il 4 non è un oggetto spaziale; non si conclude invece che esso non sia un oggetto.

Non ogni oggetto è situato in qualche luogo. In questo senso non si può neanche dire che le nostre rappresentazioni [2] risiedano in noi (siano sottocutanee). Sotto la pelle infatti noi troviamo i vari corpuscoli che compongono il sangue, i gangli di cellule che compongono i tessuti, ecc., non però le rappresentazioni. A esse non è applicabile alcun predicato spaziale: non è possibile dire che una rappresentazione sia a destra o a sinistra dell'altra; non è possibile sostenere che due rappresentazioni siano separate fra loro da una distanza esprimibile in millimetri, ecc. Se, ciò malgrado, affermiamo che le rappresentazioni

[1] Per spiegare il concetto di infinitesimo, occorre definire un'eguaglianza del tipo

$$df(x) = g(x)dx\,.$$

Non è invece necesseario presentare al nostro sguardo alcun segmentino, racchiuso da estremi fra loro distinti, la cui lunghezza sia proprio dx.

[2] La parola "rappresentazione" va intesa qui in senso puramente psicologico, non in senso psicofisico.

sono in noi, vogliamo soltanto dire con queste parole, che esse sono soggettive.

Il nostro critico può tuttavia obiettare: ammettiamo pure che il soggettivo non abbia alcun luogo; ma come è possibile sostenere che lo stesso accade del numero 4, il quale è essenzialmente oggettivo? Gli risponderò che io non vedo in questo fatto alcuna contraddizione. Il numero 4 è oggettivo perché risulta esattamente identico per chiunque debba operare con esso; questa sua oggettività non ha però nulla a che vedere con l'essere o non essere spaziale. Non ogni oggetto è situato in qualche luogo.

Per raggiungere il concetto di numero naturale occorre stabilire il senso di un'uguaglianza numerica

62. È NECESSARIO UN SEGNO CARATTERISTICO, CHE SERVA A DENOTARE LE UGUAGLIANZE NUMERICHE In qual modo potrà esserci dato un numero, se — come spiegammo nei paragrafi precedenti — non riusciamo davvero ad averne alcuna rappresentazione o intuizione?

Fu detto che le parole significano qualcosa soltanto entro il contesto di una proposizione. Per definire in generale il numero, occorrerà dunque spiegare il senso di una proposizione in cui entra un termine numerico. Questa regola, per quanto esattissima, lascia ancora molto spazio all'arbitrio.

Oltre a essa, però, venne anche stabilita la necessità di intendere i numeri come oggetti autonomi; e questa implica che debbano avere un senso per i numeri tutte le proposizioni le quali esprimono un riconoscimento. Se il segno *a* ha da denotare un oggetto, deve esistere qualche regola (*Kennzeichen*) capace di farci decidere, in generale, se il segno *b* indichi lo stesso oggetto di *a*; e ciò anche ammesso che non risulti sempre in nostro potere applicare una tale regola. Nel caso presente occorre dunque che noi spieghiamo il senso della proposizione "Il numero che spetta al concetto *F* è identico al numero che spetta al concetto *G*", cioè che traduciamo in altri termini il contenuto di questa proposizione, senza far uso delle parole "il numero che spetta al concetto *F*". Cercheremo pertanto di indicare, nelle prossime pagine, un qual-

che segno che possa caratterizzarci in generale l'uguaglianza dei numeri.

Dopo che avremo ottenuto, cosí, un mezzo per afferrare e riconoscere un numero determinato, potremo passare ad una seconda operazione; questa consisterà nel dargli, come nome suo proprio, un certo termine numerico.

63. Tentativo di prendere come segno caratteristico la possibilità della corrispondenza univoca. Dubbio, di carattere logico, che in questo modo si darebbe una spiegazione dell'uguaglianza valida solo per il caso dei numeri Già in Hume [1] troviamo proposta una regola che serve allo scopo anzidetto: "Se due numeri si trovano combinati fra loro, in modo che a ogni unità dell'uno corrisponda sempre un'unità dell'altro, allora affermiamo che essi sono uguali." Negli ultimi tempi questa opinione, che l'uguaglianza dei numeri vada definita per mezzo della corrispondenza univoca, sembra aver incontrato il piú largo favore fra i matematici.[2] Contro di essa, però, si elevano subito alcune difficoltà e alcuni dubbi, di carattere logico, sui quali non possiamo passar sopra senza un opportuno esame.

L'uguaglianza è un rapporto generale, che non si presenta solo per i numeri. Pare dunque che non sia lecito dare una spiegazione di essa che valga in modo particolare solo per il presente caso. Sembra cioè che il concetto di uguaglianza dovrebbe avere già di per sé la sua consistenza ben definita (al di fuori di ogni considerazione aritmetica), e che dal confronto fra questo concetto generale e il concetto di numero dovrebbe potersi ricavare quando due numeri sono uguali e quando no, senza bisogno di coniare alcuna definizione specifica per questo caso.

Contro di ciò bisogna notare che il concetto di numero non costituisce per noi qualcosa di ben stabilito già prima della nostra spiegazione, ma può venir determinato proprio soltanto mediante tale spiegazione. Il nostro intento è questo: delineare il contenuto di un giudizio, che si lasci concepire come uguaglianza fra due membri, ciascuno dei quali è un numero. Noi vogliamo, cioè, non proporre una defini-

[1] Baumann, *op. cit.*, vol. 2, p. 565.

[2] Si vedano per esempio: E. Schröder, *op. cit.*, pp. 7 sg.; E. Kossak, *Die Elemente der Arithmetik - Programm des Friedrichs-Werder'schen Gymnasiums* [Elementi d'aritmetica - Programma del ginnasio Federico Werder] (Ebend, Berlino 1872) p. 16; G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* [Fondamenti di una teoria generale delle varietà] (Teubner, Lipsia 1883).

zione dell'uguaglianza valida unicamente per il caso dei numeri, ma, per mezzo del concetto già noto di eguaglianza, determinare ciò che deve intendersi per uguale.

Si osserverà senza dubbio che il nostro è un metodo assai insolito di formare delle definizioni, metodo non ancora sufficientemente esaminato dai logici; basteranno però alcuni esempi a mostrare che esso è tutt'altro che strano.

64. Esempi di processi analoghi, rivolti a definire la direzione di una retta, la giacitura di un piano, la forma di un triangolo

Il giudizio: "La retta a è parallela alla retta b", in simboli

$$a // b,$$

può venir concepito come un'uguaglianza. Ciò facendo, otteniamo il concetto di direzione, e possiamo affermare: "La direzione della retta a è uguale a quella della retta b". Sostituiamo cosí il segno di // con quello, piú generale, di $=$, e ripartiamo il contenuto particolare del primo sui due membri a e b. In altre parole: ne suddividiamo il contenuto in modo diverso da quello primitivo, e otteniamo in tal modo un nuovo concetto.

Spesso la cosa viene presentata in modo inverso, e alcuni maestri danno la seguente definizione: due rette sono parallele quando hanno la stessa direzione. Essi possono allora dimostrare molto facilmente la proposizione "Se due rette sono parallele ad una terza, sono parallele fra loro", riconducendola a un analogo principio dell'uguaglianza. Peccato soltanto che l'idea-base cui essi fanno appello rimanga qualcosa di puramente cerebrale. Eppure tutto ciò che è geometrico dovrebbe essere, in origine, intuitivo! Invece mi sembra che nessuno riuscirà mai a intuire la direzione di una retta. Si può intuire, certamente, la retta; ma come distinguere, in questa intuizione, la direzione della retta dalla retta stessa? La cosa è tutt'altro che facile. Soltanto un'attività intellettiva, connessa all'intuizione ma non coincidente con essa, può scoprire il concetto di direzione. Al contrario, si ha un'intuizione immediata delle rette parallele.

La dimostrazione, or ora accennata, del teorema delle due rette parallele a una terza è fondata per intero su di un sottile sofisma. Essa fa uso, infatti, del termine "direzione", e questo presuppone proprio ciò che

deve essere dimostrato. Per convincersene basta osservare che, se fosse falsa la proposizione "Due rette parallele a una terza sono parallele fra loro", l'asserto $a \parallel b$ non potrebbe venir trasformato in un'uguaglianza.

In modo analogo si riesce, dal parallelismo dei piani, a ricavare un concetto, che corrisponde a quello della direzione per le rette. Alcuni lo denotano col termine "giacitura". Sempre cosí si ricava dalla similitudine geometrica il concetto di forma, onde si dice "Due triangoli hanno la stessa forma" o "La forma del primo è uguale a quella del secondo" invece di dire che essi sono simili. Ancora allo stesso modo si può, dal rapporto di collineazione tra figure geometriche, ricavare un concetto generale (cui però manca, al momento presente, un suo nome specifico).

65. TENTATIVO DI UNA DEFINIZIONE. UN SECONDO DUBBIO: SE SIANO SODDISFATTE LE LEGGI DELL'UGUAGLIANZA Prenderemo ora in esame la seguente definizione, che serve a farci passare dal parallelismo [1] al concetto di direzione:

"Stabiliamo che la proposizione

'La retta *a* è parallela alla retta *b*'

venga considerata come equivalente a quest'altra:

'La direzione della retta *a* è uguale alla direzione della retta *b*'."

Questa definizione si distacca dalla forma comune, poiché mira, in apparenza, a determinare una relazione già nota, quella di uguaglianza; di fatto però essa tende ad introdurre l'espressione "direzione della retta *a*" che compare qui per la prima volta.

Basta quest'accenno per farci venire in mente una nuova obiezione: chi ci assicura che, definendo come abbiamo fatto l'uguaglianza di direzione, non verremo trascinati in qualche contraddizione con le note leggi dell'uguaglianza?

Per rispondervi, esaminiamo anzitutto quali siano queste leggi. Essendo verità analitiche, esse potranno venire ricavate dal concetto stesso di uguaglianza.

Com'è noto, Leibniz [2] dà la seguente definizione: "Eadem sunt,

[1] Parlo qui, in particolare, di parallelismo, per potermi esprimere in forma piú semplice e venire inteso piú facilmente. L'essenziale di queste discussioni potrà, ad ogni modo, venire esteso senza difficoltà al caso dell'uguaglianza fra numeri.

[2] LEIBNIZ, *Non inelegans* cit.; ed. Erdmann, p. 94.

quorum unum potest substitui alteri, salva veritate", e noi possiamo senz'altro adottare le sue parole come definizione dell'uguaglianza. Il fatto che egli parli di "identico" anziché di "uguale" serve ad esprimere una concordanza completa, mentre il termine "uguale" esprime soltanto una concordanza sotto questo o quell'aspetto. È facile comunque trovare un tipo di espressione che elimina queste differenze; basta dire per esempio "La lunghezza di due segmenti è uguale" o "identica", invece di dire "I segmenti sono uguali in lunghezza"; oppure "I colori delle superfici sono uguali" invece di dire "Le superfici sono uguali in colore", ecc. Del resto è proprio questo il senso in cui, anche sopra, abbiamo usato il termine "uguale". Se ne conclude pertanto che nella sostituibilità generale sono contenute tutte le leggi dell'uguaglianza.

Per dimostrare che il nostro tentativo di definire la direzione di una retta non ci trascina in qualche contraddizione con le leggi dell'uguaglianza, dovremmo dunque dimostrare che, se le due rette *a* e *b* sono parallele, è sempre possibile sostituire "la direzione di *a*" con "la direzione di *b*".

Questo compito risulta semplificato dal fatto che, per ora, non si conosce altra affermazione intorno alla direzione di una retta fuorché la coincidenza di essa con la direzione di un'altra retta. Per il momento noi dovremmo dunque provare una cosa sola: [1] che le due anzidette espressioni sono sostituibili una all'altra, sia nei giudizi che parlano direttamente della coincidenza di due direzioni, sia nei giudizi nei quali tale coincidenza entra solo come parte costituente.[2] Al punto in cui ci troviamo, non è lecita alcuna altra affermazione intorno alle direzioni, se prima non diamo di essa una definizione precisa. Per queste future definizioni possiamo dunque stabilire fin d'ora la seguente regola: in ciascuna di esse dovrà risultare assicurata la sostituibilità della direzione di una retta con la direzione di una qualunque retta paralella.

66. TERZO DUBBIO: IL SEGNO CARATTERISTICO DELL'UGUAGLIANZA NON È SUFFICIENTE PER LA NOSTRA DEFINIZIONE Ma contro il nostro tentativo di definizione si eleva ancora un terzo dubbio. Nella proposizione

[1] [Frege si accontenta qui di indicarci che cosa *dovremmo* dimostrare: e di indicarcelo con molta precisione; non si sofferma poi a svolgere egli stesso la dimostrazione, ritenendola molto facile.]

[2] Per esempio, in un periodo ipotetico, una coincidenza di direzioni potrebbe comparire o come condizione ovvero come conseguenza.

"La direzione di *a* è uguale a quella di *b*"
la direzione di *a* si presenta come oggetto,[1] e la nostra definizione ci offre un mezzo per riconoscere quest'oggetto qualora esso dovesse presentarsi in veste diversa, per esempio nella veste di "direzione di *b*". Tale mezzo però non riesce in tutti i casi possibili. Per esempio non ci permette di decidere se l'Inghilterra sia una direzione, e quindi risulti o no uguale alla direzione dell'asse terrestre. Mi si perdoni l'esempio, in apparenza privo di senso. Certamente nessuno penserà che l'Inghilterra sia una direzione; verissimo, però questo non si ricava dalla nostra definizione. Essa infatti non ci dice se la proposizione
"La direzione di *a* è uguale a *q*"
debba venir ammessa o negata, quando *q* non è un'espressione del tipo "la direzione di *b*".

Ci manca, purtroppo, il concetto di direzione. È chiaro infatti che, se l'avessimo, potremmo completare la nostra precedente definizione dicendo: "Se *q* non è una direzione, la proposizione anzidetta va negata; se *q* è una direzione essa va decisa in base a quanto è stato sopra definito."

Potrà quindi venirci in mente di spiegare la cosa cosí: "*q* è una direzione, se esiste una retta *b* la cui direzione sia per l'appunto *q*."

È chiaro però che, con queste parole, noi siamo caduti in un circolo vizioso. Infatti per poter applicare l'ultima spiegazione ora accennata, noi dovremmo già sapere, in ogni caso, se debba ammettersi per vero o debba negarsi che
"*q* è uguale alla direzione di *b*".[2]

67. Non si può completare la definizione adducendo a carattere di un concetto il modo come è stato introdotto un oggetto Se qualcuno proponesse di risolvere il dubbio ora accennato, affermando

[1] A ciò fa cenno l'articolo determinativo premesso al termine "direzione". Concetto è, per me, ogni possibile predicato di un giudizio; oggetto invece è ogni possibile soggetto.*

Se per esempio nella proposizione: "La direzione dell'asse del cannocchiale è uguale alla direzione dell'asse terrestre", riguardiamo come soggetto l'espressione "la direzione dell'asse del cannocchiale" il predicato sarà "uguale alla direzione dell'asse terrestre". Tale predicato è un concetto. Invece le parole "la direzione dell'asse terrestre" sono soltanto una parte del predicato: esse costituiscono un oggetto perché, in altre proposizioni, possono fungere da soggetto.

* [La differenza qui accennata fra oggetto e concetto verrà ampiamente svolta e notevolmente approfondita nella seconda sezione della parte terza del presente volume.]

[2] [Ma saper questo equivale perfettamente a sapere se debba ammettersi o negarsi l'asserto "La direzione di *a* è uguale a *q*", che è proprio quanto non ci era noto.]

che q è una direzione solamente nel caso in cui l'abbiamo introdotto con una definizione del tipo di quella del paragrafo 65, egli mostrerebbe con queste parole di considerare come una proprietà di q il modo con cui l'oggetto q è stato introdotto; e ciò è erroneo. Infatti la definizione di un oggetto non dice, in quanto tale, proprio nulla di esso, ma soltanto stabilisce il significato di un segno. Stabilito questo significato, essa si tramuta in un giudizio che tratta di quell'oggetto; ma proprio per ciò non lo introduce piú, e sta sull'identico piano delle altre affermazioni intorno a esso.

Accettando questa soluzione del dubbio esposto nel paragrafo 66, si mostrerebbe di ritenere che un oggetto possa venir dato soltanto in un'unica maniera. È chiaro infatti che l'anzidetta soluzione perderebbe ogni base qualora non si escludesse a priori che il medesimo oggetto q possa venir introdotto in due modi diversi: una volta con una definizione del nostro tipo, un'altra volta in qualche altro modo. Ma allora tutte le uguaglianze si ridurrebbero a riconoscere come identico soltanto ciò che ci è dato nell'identico modo. E poiché un tale atto risulta — com'è ovvio — evidente e infecondo, non varrebbe la pena enunciare alcuna uguaglianza. Non si potrebbe pertanto dedurre nessuna conclusione che fosse diversa dalle ipotesi.

In realtà l'uso molteplice e importantissimo delle uguaglianze riposa proprio su questo: che è possibile riconoscere qualcosa anche quando è dato in modi diversi.

68. Il numero naturale come estensione [1] Poiché, seguendo la via ora indicata non possiamo ottenere alcun concetto preciso di direzione, e, per gli stessi motivi, non possiamo ottenere alcun concetto preciso di numero, tenteremo ora un'altra strada.

È noto che, quando la retta a è parallela alla retta b, l'estensione del concetto "retta parallela ad a" risulta uguale all'estensione del concetto "retta parallela a b"; e viceversa, quando queste due estensioni

[1] [A rigore, il titolo del paragrafo 68 — che è uno dei piú importanti di tutta l'opera — dovrebbe essere assai piú lungo. Esso infatti contiene: a) una nuova definizione del concetto di direzione, definizione che risolve in maniera definitiva i dubbi discussi nei paragrafi precedenti; b) l'introduzione dell'attributo di "ugualmente numeroso", spiegato direttamente, e cioè non a partire dal concetto di numero; c) infine la definizione del "numero naturale spettante a un concetto" per via analoga a quella che serví a definire la "direzione di una retta".]

risultino uguali, la retta *a* è parallela alla retta *b*. Possiamo dunque provarci a dare le seguenti definizioni:

"La direzione della retta *a* non è altro che *l'estensione* del concetto 'retta parallela ad *a*' ";

"La forma del triangolo *d* non è altro che *l'estensione* del concetto 'triangolo simile a *d*'."

Volendo poi applicare questo stesso metodo al caso del numero naturale, basterà sostituire: in luogo delle rette o dei triangoli, i concetti, e, in luogo del parallelismo o della similitudine, la possibilità di far corrisponde biunivocamente gli oggetti che cadono sotto un concetto a quelli che cadono sotto l'altro.

Voglio anzi, per brevità, introdurre un nuovo termine: stabiliremo cioè di dire che il concetto *F* è *ugualmente numeroso* (*gleichzahlig*) al concetto *G*, ogni qualvolta esiste l'anzidetta possibilità di porre in corrispondenza biunivoca gli oggetti che cadono sotto *G* e quelli che cadono sotto *F*. Invito però a considerare questa espressione (ugualmente numeroso) come scelta ad arbitrio, e cioè a tener presente che il suo significato non dipende dalle parole che la compongono, ma unicamente dalla convenzione linguistica ora accennata.

Ciò posto, potremo dare la seguente definizione: "Il numero naturale che spetta al concetto *F* non è altro che *l'estensione* [1] del concetto 'ugualmente numeroso ad *F*'." [2]

[1] Credo che potrei, piú semplicemente, usare la parola "concetto", anziché la parola "estensione del concetto". Però mi si potrebbero subito muovere due obiezioni:
a) la sostituzione ora proposta contraddice la mia precedente affermazione, che ogni numero sia un oggetto; affermazione che viene convalidata sia dall'uso dell'articolo determinativo in espressioni come "il due", "il tre", sia dall'impossibilità di volgere al plurale i termini "uno", "due", ecc., sia ancora dal fatto che, nell'attribuzione di un numero, il numero costituisce soltanto una parte dell'attributo; *
b) due concetti possono avere la medesima estensione senza però risultare coincidenti. Veramente io sono del parere che entrambe queste obiezioni possano venir eliminate; il farlo mi porterebbe, però, troppo lontano.

Osservo, infine, che in tutto il paragrafo 68 presuppongo si sappia che cosa è l'estensione di un concetto.

* [Si ricordi quanto Frege ha spiegato, nella nota al paragrafo 66, circa il fatto che un oggetto non può fungere mai da predicato, ma solo da parte di un predicato. Per comprendere l'analogia fra quanto egli ha detto, in tale nota, a proposito della direzione di una retta e quanto accenna qui a proposito del numero, basta ricordare l'analisi da lui compiuta nel paragrafo 57, con la quale vien provato che l'attribuzione di un numero è, a rigore, un'uguaglianza fra due numeri. Segue da essa che, in un'attribuzione siffatta, il numero costituisce soltanto il predicato apparente, non quello reale. Per esempio nella proposizione "Il numero dei satelliti di Giove è 4" (che, a rigore, dovrebbe suonare "il numero dei satelliti di Giove è uguale a 4") il vero predicato risulta, non 4, ma "uguale a 4". Di esso il 4 costituisce soltanto una parte.]

[2] [Prima di ogni altra discussione è opportuno domandarci: la definizione di numero naturale, qui

69. DELUCIDAZIONE A prima vista non risulterà forse molto chiaro se questa definizione colga davvero nel segno. E difatti: parlando di estensione di un concetto, non si pensa in realtà a qualcos'altro dal numero naturale?

Per comprendere ciò che realmente si pensa con tale parola, bisogna analizzare le prime affermazioni che possiamo compiere intorno all'estensione dei concetti. Esse sono le seguenti:

1) che due estensioni risultino uguali;
2) che una estensione risulti piú comprensiva dell'altra.

Orbene si vede subito che la proposizione

"L'estensione del concetto 'ugualmente numeroso ad *F*' è uguale all'estensione del concetto 'ugualmente numeroso a *G*'"

risulta vera quando e solo quando è vera la proposizione

"Al concetto *F* spetta lo stesso numero che al concetto *G*."

Qui vi è dunque concordanza perfetta.

Invece non si dice che un numero risulti piú comprensivo di un altro nel senso in cui si dice che l'estensione di un concetto risulta piú comprensiva che quella di un altro. Osserviamo però che non può nemmeno accadere, a rigore, che l'estensione del concetto "ugualmente numeroso a *F*" risulti piú comprensiva della estensione del concetto "ugualmente numeroso a *G*".

E infatti: se tutti i concetti, che sono ugualmente numerosi a *G* sono pure ugualmente numerosi a *F*, accadrà per forza che tutti quelli

proposta da Frege, riesce o no a farci comprendere piú a fondo che cosa sia il numero? A prima vista parrebbe di no. Sembra infatti naturale rispondere: Frege suppone (si veda l'ultimo capoverso della nota precedente) che si sappia che cosa è l'estensione di un concetto, ma di fatto questa estensione risulta un'idea altrettanto oscura quanto quella di numero; è quindi illusorio pretendere di spiegare l'una per mezzo dell'altra. Chi muovesse questa obiezione, mostrerebbe di non capire pressoché nulla del pensiero di Frege. Infatti, nel pensiero di Frege, è completamente fuori luogo porre il problema se un'idea risulti piú o meno chiara dell'altra; l'importante è che l'idea di estensione appartiene, senza possibilità di dubbio, al campo della logica. Riconducendo la nozione di numero a quella di estensione, Frege riesce quindi a ricondurre l'aritmetica alla logica, e perciò a risolvere in modo tutto nuovo — completamente diverso, per esempio, da quello di Kant — il problema, discusso nel capitolo 1, circa la natura delle proposizioni aritmetiche.

Il programma di una logicizzazione totale dell'aritmetica fu poi ripreso con molto successo — come già accennai — da Bertrand Russell e dalla sua scuola. Voglio anzi notare subito una cosa molto importante: il punto da cui Russell prende le mosse per definire il numero naturale è perfettamente analogo a quello ora proposto da Frege; con la sola differenza che Russell parla di classi, mentre Frege parla di concetti.]

che sono ugualmente numerosi ad *F*, sono pure ugualmente numerosi a *G*.[1]

Naturalmente il rapporto espresso dal termine "piú comprensivo" non va confuso con quello, valido fra i numeri, che è espresso dal termine "maggiore".

Senza dubbio è anche pensabile il caso che l'estensione del concetto "ugualmente numeroso a *F*" risulti piú o meno comprensiva dell'estensione di qualche altro concetto. Dalla nostra precedente spiegazione risulterebbe allora che l'estensione di questo altro concetto non può essere un numero. È certamente alquanto fuori dall'uso comune, asserire che un numero sia piú o meno comprensivo dell'estensione di un concetto; nulla ci impedirebbe tuttavia di adottare questa locuzione, quando se ne presentasse l'opportunità.

Completamento e conferma della nostra definizione

70. Il concetto di relazione   Per mettere alla prova il valore delle definizioni, bisogna studiarne la fecondità. Quelle che potrebbero venir tranquillamente soppresse, senza che derivi da ciò alcuna lacuna nelle dimostrazioni, vanno respinte come completamente prive di valore.

Esaminiamo dunque se le note proprietà dei numeri risultino o no deducibili dalla definizione da noi proposta. Ci accontenteremo qui di studiare le piú semplici.

È necessario, a tale scopo, determinare anzitutto, in modo piú preciso di quello fatto finora, il concetto di "ugualmente numeroso". Già lo abbiamo spiegato invocando la corrispondenza biunivoca; ora però occorre specificare come vada intesa questa corrispondenza, perché potrebbe parere che essa nasconda in sé qualcosa di intuitivo.

[1] [In altre parole: o l'estensione del concetto "ugualmente numeroso a *G*" e l'estensione del concetto "ugualmente numeroso a *F*" risultano uguali, oppure esse sono inconfrontabili, nel senso che una non può essere piú comprensiva dell'altra; in quest'ultimo caso, se un concetto *H* cade sotto il concetto "ugualmente numeroso a *G*" non può cadere certo sotto il concetto "ugualmente numeroso a *F*", e viceversa se cade sotto quest'ultimo non può cadere certo sotto il primo. Le estensioni che Frege identifica con i numeri naturali non sono, dunque, delle estensioni qualsiasi, ma rappresentano una classe speciale di estensioni; classe per i cui elementi può applicarsi soltanto l'affermazione 1 e non la 2.]

Prendiamo in esame il seguente esempio. Se un cameriere vuole accertarsi di aver posto sul tavolo tanti coltelli quanti piatti, non è necessario che egli conti né questi né quelli; gli basterà disporre un coltello alla destra di ciascun piatto, sicché ciascun coltello sul tavolo sia proprio alla destra di un piatto. Fra i coltelli ed i piatti risulterà sussistere, cosí, una corrispondenza biunivoca, dovuta per l'appunto al loro stesso rapporto di posizione reciproca. Orbene: se nella proposizione

"α giace alla destra di A"

pensiamo di sostituire, in luogo di α e di A, sempre nuovi oggetti, la parte di proposizione rimasta qui immutata è proprio ciò che determina l'essenza di quella relazione.

Proviamo a generalizzare questo risultato.

Allorché in un giudizio che verte intorno a due oggetti *a* e *b*, noi sopprimiamo tanto *a* quanto *b*, ci rimane un concetto di relazione che va pertanto completato in doppio modo.[1]

Sia data per esempio la proposizione

"La Terra ha una massa maggiore della Luna."

Se, in essa, noi sopprimiamo il concetto "la Terra", otteniamo il concetto "avente massa maggiore della Luna"; se sopprimiamo il complemento "la Luna", otteniamo il concetto "avente massa minore della Terra"; se invece li sopprimiamo entrambi, ci rimane un concetto di relazione, che, preso da solo, non ha proprio alcun senso, come non l'ha un semplice concetto. È necessario completarlo, per ottenere da esso un giudizio.

Risulta chiaro, però, che noi possiamo completarlo in modi diversi; possiamo porre, per esempio, Sole e Luna invece di Terra e Luna. Proprio questa possibilità è ciò che ci suggerisce di isolare la parte di proposizione qui considerata.

Le singole coppie di oggetti poste in corrispondenza si comportano, rispetto al concetto di relazione, in modo analogo a quello in cui si comporta il singolo oggetto rispetto al concetto sotto cui cade; si potrebbe dire che fungono da soggetti. Però il soggetto è qui qualcosa di composto. Talvolta, quando la relazione è invertibile, il carattere composto

[1] [Il concetto di relazione, qui definito da Frege, si è mostrato poi uno dei piú fecondi. Lo studio delle relazioni costituisce oggi uno degli argomenti piú difficili e piú importanti della logica formale.]

del soggetto risulta dalla stessa forma linguistica; cosí per esempio nella proposizione

"Teti e Peleo furono i genitori di Achille."[1]

Ciò può non avvenire sempre; per esempio non si può trasformare la proposizione

"La Terra è maggiore della Luna"

in modo che "la Terra e la Luna" compaiano come soggetto composto; infatti il termine "e" accenna sempre a una certa parità. Questi sono però particolari che non riguardano il nostro problema.

Il concetto di relazione appartiene dunque — non meno che il concetto semplice — al campo della logica pura. Qui non interessa il contenuto speciale della relazione, ma esclusivamente la sua forma logica. Se qualcosa può venir affermata di essa, la verità di questo "qualcosa" risulta analitica e viene riconosciuta *a priori*. Ciò vale per i concetti di relazione come per gli altri concetti.

Allo stesso modo che la forma generale di un giudizio che tratta di un unico oggetto a, è la seguente:

"a cade sotto il concetto F",

cosí possiamo assumere, quale forma generale di un giudizio che tratta degli oggetti a e b, la seguente:

"a sta nella relazione φ con b".

71. Attuazione della corrispondenza per mezzo di una relazione Se ogni oggetto che cade sotto il concetto F, sta in una certa relazione φ con uno degli oggetti che cadono sotto G; e se, per ogni oggetto che cade sotto G, se ne trova uno che cade sotto F, che sta col primo nella relazione φ; allora gli oggetti che cadono sotto F e quelli che cadono sotto G risultano coordinati fra loro per mezzo della relazione φ.

Prima di accettare questa definizione, si potrà ancora chiedere che cosa significhi l'espressione

"Ogni oggetto che cade sotto F sta nella relazione φ con uno degli oggetti che cadono sotto G"

nel caso particolare in cui nessun oggetto cada sotto F.

[1] Non va confuso con questo il caso in cui la congiunzione "e" collega solo in apparenza due soggetti, mentre in realtà collega due proposizioni.

Rispondo che per mezzo di essa intendo in generale asserire quanto segue:

Qualunque sia l'oggetto denotato da a, è impossibile che le due proposizioni

"a cade sotto F"

e

"a non sta nella relazione φ con alcuno degli oggetti che cadono sotto G"

risultino entrambe contemporaneamente vere; sicché: o la prima, o la seconda, o entrambe saranno false. Se ne ricava che: se in particolare non esiste alcun oggetto che cada sotto F, risulterà sempre vero che "ogni oggetto il quale cade sotto F, non sta nella relazione φ con uno degli oggetti che cadono sotto G"; in questa ipotesi infatti, delle due proposizioni or ora elencate, risulta di già negata la prima "a cade sotto F" qualunque sia l'oggetto a.

In modo analogo spiegherò che l'espressione "Per ogni oggetto che cade sotto G, esiste un oggetto che cade sotto F, che sta con esso nella relazione φ" significa:

qualunque sia l'oggetto denotato da a, è impossibile che le due proposizioni

"a cade sotto G"

e

"Nessun oggetto che cade sotto F, sta con a nella relazione φ" risultino contemporaneamente vere.

72. Corrispondenza biunivoca. Concetto di numero naturale

Abbiamo spiegato che cosa significhi asserire che gli oggetti che cadono sotto F, e quelli che cadono sotto G, risultano coordinati fra loro per mezzo della relazione φ. Spiegheremo ora cosa significhi asserire che una tal corrispondenza è univoca in entrambe le direzioni.

Con quest'ultimo asserto, io intendo dire che sono vere tutte e due le seguenti proposizioni:

1) Se d sta nella relazione φ tanto con a quanto con e, allora si verifica in generale, qualunque siano a, d, e, che a coincide con e;

2) Se tanto d quanto b stanno nella relazione φ con a, allora si verifica in generale, qualunque siano a, b, d, che d coincide con b.

Con questo chiarimento la corrispondenza univoca in entrambe le direzioni (biunivoca) risulta ricondotta a rapporti puramente logici. Ci troviamo pertanto in grado di dare le seguenti definizioni: l'espressione

"Il concetto F è ugualmente numeroso al concetto G"

avrà per noi lo stesso significato dell'espressione

> "Esiste una relazione φ capace di far corrispondere, in modo univoco in entrambe le direzioni, gli oggetti che cadono sotto F agli oggetti che cadono sotto G."

Ed ora possiamo ripetere quel che già è stato detto nei paragrafi precedenti:

> "Il numero naturale che spetta al concetto F non è altro che *l'estensione* del concetto 'ugualmente numeroso ad F'."

Possiamo aggiungere infine: l'espressione

> "n è un numero naturale"

avrà per noi lo stesso significato dell'espressione

> "Esiste un concetto tale, che n risulta il numero spettante a esso."

Con queste ultime parole il concetto di numero naturale risulta definito, in apparenza mediante un'espressione che già parlava di numero, in realtà però senza errori, perché l'espressione "numero spettante a un concetto" era già stata perfettamente spiegata nella definizione precedente.

73. Il numero naturale spettante a F è uguale a quello spettante a G ogni qualvolta esiste una relazione che fa corrispondere in modo biunivoco gli oggetti che cadono sotto il concetto F a quelli che cadono sotto il concetto G Proveremo ora, innanzi tutto, che il numero naturale spettante a F risulta eguale a quello spettante a G se il concetto F è ugualmente numeroso al concetto G. Questa affermazione ha senza dubbio l'aspetto di una semplice tautologia; in realtà però non lo è, in quanto il significato dell'espressione "ugualmente numeroso" non proviene dalla sua radice (cioè dal termine "numeroso") ma dalla spiegazione che è stata data poco fa di essa.[1]

[1] [Si ricordi il paragrafo 68 in cui la definizione del termine "ugualmente numeroso" ha preceduto quella del termine "numero naturale spettante a un concetto".]

Stando alle definizioni enunciate nel paragrafo precedente dobbiamo — per raggiungere lo scopo anzidetto — dimostrare che: se il concetto F è ugualmente numeroso al concetto G, l'estensione del concetto "ugualmente numeroso a F" risulta identica all'estensione del concetto "ugualmente numeroso a G". Dobbiamo, in altri termini, dimostrare che, nell'ipotesi anzidetta, valgono in generale le seguenti proposizioni:

"Se il concetto H è ugualmente numeroso al concetto F, allora H risulta pure ugualmente numeroso a G";

e inoltre

"Se il concetto H è ugualmente numeroso al concetto G, allora H risulta pure ugualmente numeroso a F."

Che la prima proposizione sia vera, risulta dalla seguente considerazione: se esiste una relazione φ la quale coordina in modo biunivoco gli oggetti che cadono sotto F e quelli che cadono sotto G, e se esiste una relazione ψ la quale coordina in modo biunivoco gli oggetti che cadono sotto H e quelli che cadono sotto F, ne esisterà certo una la quale coordina in modo biunivoco gli oggetti che cadono sotto H e quelli che cadono sotto G. La cosa è resa evidente dalla seguente successione di lettere

$$H \psi F \varphi G.$$

Non vi è difficoltà a indicare in concreto la relazione suddetta; essa ci è data dalla seguente proposizione, ove si prescinda da b e da c (trattati come centri di relazione):

"Esiste un oggetto, col quale c sta nella relazione ψ, e il quale a sua volta sta nella relazione φ con b".

Si può dimostrare che la relazione è univoca in entrambe le direzioni, e che fa corrispondere gli oggetti che cadono sotto H, a quelli che cadono sotto G.

In modo analogo può venir dimostrata la seconda proposizione.[1]

Spero risulterà abbastanza chiaro da questi cenni che il nostro ragionamento non ha alcun bisogno di appellarsi all'intuizione, ma parte esclusivamente da quanto è stato sopra definito.

[1] Vale pure il teorema inverso: se il numero, spettante al concetto F, è uguale a quello spettante al concetto G, i due concetti F e G risultano fra loro ugualmente numerosi.

74. Lo zero è il numero che spetta al concetto "disuguale da sé stesso" Passeremo ora alla spiegazione dei singoli numeri.[1] Poiché non v'è nulla che cada sotto il concetto di "disuguale da sé stesso", posso dare la seguente definizione:

"0 è il numero naturale che spetta al concetto 'disuguale da sé stesso'."

Qualcuno rimarrà forse scandalizzato, sentendomi parlare di concetto, a proposito dell'espressione "disuguale da sé stesso". Mi si obietterà che in queste parole è contenuta una contraddizione perfettamente analoga a quelle, famose, del "ferro legnoso" e del "circolo quadrato". Rispondo che, a mio parere, anche queste ultime non sono cosí perfide come sogliono venir dipinte. Senza dubbio non riusciranno mai utili a nulla; ma neanche potranno recarci alcun danno, purché non si supponga che qualcosa cada sotto di esse; ed è certo che il semplice uso di tali concetti non implica affatto questa ipotesi. Osserviamo del resto che, quando un concetto contiene qualche contraddizione, la cosa non risulta sempre cosí ovvia da rendere inutile qualunque ricerca al riguardo; ma, se dobbiamo compiere tale ricerca, è necessario che, prima di riconoscere quella contraddizione, noi possediamo il concetto in esame e lo elaboriamo logicamente proprio alla stessa stregua di tutti gli altri concetti.

Tutto ciò che la logica, in vista del rigore dei propri ragionamenti, può pretendere da un concetto, è la sua esatta delimitazione; e cioè che, per ogni oggetto, risulti perfettamente determinato se esso cade o no sotto quel concetto. Orbene, i concetti che contengono una contraddizione come il concetto di "disuguale da sé stesso", soddisfano senza alcun dubbio a questa condizione, poiché per qualunque oggetto si sa che esso non cade sotto tali concetti.[2]

[1] [Una critica molto serrata di queste definizioni trovasi nell'opera già citata di P. Natorp, *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, cap. 3, § 5. Secondo Natorp, è soltanto per un'illusione che Frege può credere di aver ricondotto la determinazione numerica a qualcosa d'altro (all'identità e alla diversità); di fatto invece tutte le definizioni di Frege presuppongono già il numero che si vorrebbe ivi definire. Esse fanno un uso continuo della negazione, e sfruttano il fatto che, nella negazione, si oppone il concetto dell'*uno* a quello dell'*altro*. Ma il senso quantitativo e quello qualitativo di tali due concetti sono e restano, secondo Natorp, irriducibili fra loro pur essendo legati da una stretta correlazione reciproca.]

[2] Di tutt'altro tipo è la definizione di un oggetto a partire da un concetto sotto cui esso cade. Per esempio: l'espressione "la massima frazione propria" non riesce a dirci proprio nulla, perché l'articolo determinativo, che ivi compare, prova che essa pretenderebbe indicarci un oggetto specifico e non

Io uso il termine "concetto", in guisa che l'espressione

"*a* cade sotto il concetto *F*"

risulti la forma generale di una proposizione giudicabile, la quale tratti di un oggetto *a* e rimanga sempre giudicabile qualunque oggetto si ponga in luogo di *a*. In questo senso l'espressione

"cade sotto il concetto 'disuguale da sé stesso' "

risulta equivalente a queste altre:

"*a* è disuguale da sé stesso"

"*a* non è uguale ad *a*".

Per definire lo 0, avrei potuto prendere qualunque altro concetto sotto cui non cada alcun oggetto. Mi premeva tuttavia sceglierne uno per cui questa circostanza (che nulla cade sotto di esso) potesse venir dimostrata per via puramente logica; ed è chiaro che a questo scopo nessun altro si presta cosí bene come il concetto "disuguale da sé stesso", ove si dia per il termine "uguale" la definizione di Leibniz, riferita alcune pagine addietro, che è puramente logica.

75. A UN CONCETTO SOTTO CUI NON CADE ALCUN OGGETTO, SPETTA SEMPRE IL NUMERO ZERO. SE IL NUMERO SPETTANTE A UN CONCETTO È LO ZERO, SOTTO QUESTO CONCETTO NON CADE ALCUN OGGETTO Dovremo ora dimostrare, sulla base delle precedenti determinazioni, che ogni concetto sotto cui non cade alcun oggetto, risulta ugualmente numeroso a ogni altro concetto sotto cui non cade alcun oggetto, e soltanto a un concetto di tal tipo; ne dedurremo che 0 è il numero spettante a un concetto siffatto, e che viceversa, se il numero spettante ad un concetto è lo 0, sotto questo concetto non cade alcun oggetto.

Supponiamo dunque che non cada alcun oggetto né sotto il concetto *F* né sotto il concetto *G*; in questa ipotesi, per dimostrare che i

un concetto. Al contrario, il concetto "frazione minore di 1, e cosiffatta che nessun'altra frazione minore di 1 possa risultare maggiore di essa" non presenta assolutamente alcuna difficoltà; e anzi, per dimostrare che non esiste una frazione con questa proprietà, bisogna proprio far uso di esso, sebbene vi sia nascosta una contraddizione.

Se poi si volesse, per mezzo di questo concetto, determinare un oggetto che cada sotto di esso, occorrerebbe innanzi tutto dimostrare due cose:

1) che sotto tale concetto cade un qualche oggetto;

2) che ne cade proprio uno solo.

Ma risultando ovviamente falsa già la prima di queste proposizioni, se ne conclude che l'espressione "la massima frazione propria" è priva di senso.

due concetti risultano ugualmente numerosi, dovremo trovare una relazione φ, per cui valgano le due seguenti proposizioni:

"Ogni concetto che cade sotto F sta nella relazione φ con un oggetto che cade sotto G";

"Per ogni oggetto che cade sotto G esiste un oggetto che cade sotto F, che sta con esso nella relazione φ."

Dopo quanto è stato detto sul significato di queste espressioni, si vede subito che, nella presente ipotesi, ogni relazione soddisfa alle due condizioni ora menzionate. Vi soddisfa quindi, in particolare, l'uguaglianza, che per giunta è univoca in entrambe le direzioni. Si vede subito, infatti, che valgono per essa le due proposizioni sopra richieste.

Supponiamo invece che sotto G cada un qualche oggetto, per esempio a, mentre sotto F non ne cade alcuno. Allora, qualunque sia la relazione φ, valgono senza dubbio le due proposizioni

"a cade sotto G"

e

"nessun oggetto che cada sotto F sta con a nella relazione φ";

la prima di esse infatti, è vera in base alla prima ipotesi, mentre la seconda e vera in base alla seconda ipotesi (poiché, se non vi è alcun oggetto che cada sotto F, non ve n'è nemmeno alcuno che stia in qualche relazione con a). Non esiste dunque alcuna relazione che faccia corrispondere, nel senso spiegato, gli oggetti che cadono sotto F a quelli che cadono sotto G, e perciò il concetto F non sarà, certo, ugualmente numeroso al concetto G.

76. DEFINIZIONE DELL'ESPRESSIONE "n SEGUE IMMEDIATAMENTE A m NELLA SUCCESSIONE DEI NUMERI NATURALI" Voglio ora chiarire in quale relazione stanno fra loro due termini successivi della successione dei numeri naturali. A tale scopo basterà stabilire l'equivalenza reciproca delle due seguenti proposizioni:

"n segue immediatamente a m nella successione dei numeri naturali"

ed

"Esistono un concetto F e un oggetto x, che cade sotto F, per i quali valgono le seguenti proposizioni: n è il numero che spetta a F, e m invece è il numero che spetta al concetto 'ciò che cade sotto F ma è diverso da x'."

Evito l'espressione "*n* è il numero naturale immediatamente successivo a *m*" dato che, per giustificare l'articolo "il", occorrebbe dimomostrare innanzi tutto due proposizioni.[1] Per il medesimo motivo non voglio ancora scrivere $n = m+1$, perché il segno di uguaglianza qualificherebbe $(m+1)$ come oggetto.

77. 1 È IL NUMERO NATURALE CHE SPETTA AL CONCETTO "UGUALE A 0"

Passando ora al numero 1, dobbiamo in primo luogo mostrare che esiste qualcosa che segue immediatamente allo 0 nella successione dei numeri naturali.

Prendiamo pertanto in considerazione il concetto — o, se si preferisce, il predicato — "uguale a 0". È facile trovare un oggetto che cade sotto di esso: lo 0. Si vede poi subito che sotto il concetto "uguale a 0 ma diverso da 0" non cade alcun oggetto, sicché il numero che spetta a quest'ultimo concetto sarà proprio lo 0.

Abbiamo dunque un concetto, "uguale a 0", e un oggetto che cade sotto di esso, lo 0, per i quali valgono le due seguenti proposizioni:

"Il numero che spetta al concetto 'uguale a 0' è uguale al numero che spetta al concetto 'uguale a 0'";

"Il numero che spetta al concetto 'uguale a 0 ma diverso da 0' è lo 0."[2]

Dovremo perciò concludere, in base alla nostra definizione del paragrafo 76, che il numero, il quale spetta al concetto "uguale a 0", segue immediatamente al numero 0 nella successione dei numeri naturali.

Se diamo, ora, la seguente definizione:

"1 è il numero naturale che spetta al concetto 'uguale a 0'",

potremo esprimere la precedente conclusione dicendo:

"1 segue immediatamente a 0 nella successione dei numeri naturali."

Non mi sembra superfluo osservare che la nostra definizione dell'1 non presuppone, per la propria validità oggettiva, alcun fatto di osser-

[1] [Si veda p. 314, n. 2.]

[2] [La prima di queste ovvie affermazioni può sembrare a prima vista inutile. Non lo è tuttavia, poiché compie l'ufficio della proposizione "*n* è il numero che spetta a *F*", di cui si fa parola nella definizione del "seguire" esposta nel paragrafo 76. Qui, in luogo di *n* abbiamo "il numero che spetta al concetto 'uguale a 0'"; e, in luogo di *F*, abbiamo il "concetto 'uguale a 0'". Analogamente, l'affermazione successiva tiene il posto della proposizione "E *m* invece è il numero che spetta al concetto 'ciò che cade sotto *F* ma è diverso da *x*'" (che rientra, sempre, nella definizione del "seguire" esposta nel paragrafo 76). Qui, in luogo di *m* abbiamo "0"; e in luogo di "ciò che cade sotto *F* ma è diverso da *x*" abbiamo "uguale a 0 ma diverso da 0".]

vazione (cioè alcuna proposizione priva di universalità). Forse taluno potrebbe pensare il contrario, indotto a ciò da due considerazioni:
a) che devono essere soddisfatte certe condizioni soggettive affinché ci sia possibile enunciare la nostra definizione;
b) che sono delle rappresentazioni sensoriali a darci occasione di giungere a essa.[1]

Sta però il fatto che tutto questo può anche essere vero, senza che le proposizioni ricavate cessino perciò di essere a priori. Per renderlo chiaro, osserviamo che, fra le condizioni soggettive, necessarie per pensare l'ultima proposizione poco fa riferita (che l'1 segue immediatamente allo 0 nella successione dei numeri naturali) vi è certo anche questa — almeno per quanto oggi sappiamo —: che il sangue affluisca al nostro cervello in quantità sufficiente e nella sua giusta composizione. Eppure è fuori dubbio che la verità di quella proposizione non dipende da questo fatto empirico; essa continua a sussistere anche se queste condizioni fisiologiche non sono piú soddisfatte. Anche se, un giorno, tutti gli esseri razionali dovessero cadere contemporaneamente in letargo, la verità della proposizione anzidetta non verrebbe perciò interrotta durante un tale periodo, né risulterebbe comunque offuscata. La verità di una proposizione non consiste infatti nel suo venir pensata.

78. PROPOSIZIONI CHE DEVONO VENIR DIMOSTRATE MEDIANTE LE NOSTRE DEFINIZIONI Faccio ora seguire alcune proposizioni che devono venir dimostrate mediante le nostre definizioni. Il lettore vedrà facilmente da sé come procedano le relative dimostrazioni.

1) Se a segue immediatamente allo 0 nella successione dei numeri naturali, deve essere $a = 1$.

2) Se 1 è il numero che spetta a un concetto, esiste certo un oggetto che cade sotto questo concetto.

3) Se 1 è il numero che spetta ad un concetto F, se tanto l'oggetto x quanto l'oggetto y cadono sotto F, allora deve essere $x = y$, cioè x deve risultare identico a y.

4) Se sotto un concetto F cade un oggetto, e se è vero in generale

[1] Si veda B. ERDMANN, *Die Axiome der Geometrie* [Gli assiomi della geometria] (Voss, Lipsia 1877) p. 164.

che dal cadere dell'oggetto x e dell'oggetto y sotto di esso segue l'uguaglianza di x e y, allora il numero che spetta a F sarà 1.

5) La relazione fra m e n, che viene enunciata dalla proposizione "n segue immediatamente a m nella successione dei numeri naturali", è una relazione univoca in entrambe le direzioni.

Con ciò tuttavia non risulta ancora detto che, per ogni numero naturale, ve ne sia un altro il quale segua immediatamente a esso o sia da esso immediatamente seguito.

6) Ogni numero naturale, eccetto lo 0, segue immediatamente a un numero nella successione dei numeri naturali.

79. DEFINIZIONE DEL SEGUIRE IN UNA SUCCESSIONE Per poter infine dimostrare che a ogni numero naturale n ne segue un altro nella successione dei numeri naturali, dovremo saper indicare qualche concetto a cui spetti proprio quest'altro numero. Ci servirà a tale scopo il seguente concetto

"appartenente alla successione dei numeri naturali che termina con n";

e sarà quindi, ora, nostro primo compito cercar di spiegare un po' bene questo concetto.[1]

Per poter compiere tale spiegazione, è però necessario che io riferisca qui, con parole leggermente mutate, la definizione del seguire in una successione, che già diedi nella mia *Ideografia*.

Eccola: stabiliremo che la proposizione

"y segue x nella φ-successione"

oppure

"x precede y nella φ-successione"

abbia lo stesso significato di quest'altra:

"y cade sempre sotto il concetto F, qualunque sia questo concetto, allorché si trovano soddisfatte le due seguenti condizioni:
a) che ogni oggetto, rispetto a cui x sta nella relazione φ, cada sotto F;
b) che, se l'oggetto d cade sotto F, se ne possa ricavare in generale, qualunque sia d, che ogni oggetto rispetto a cui d sta nella relazione φ cada esso pure sotto F."[2]

[1] [Cfr. paragrafo 81.]

[2] [Consideriamo per esempio la successione dei numeri naturali (in essa, come verrà spiegato meglio nei paragrafo 81, si assume quale relazione caratteristica φ la relazione del "seguire immediatamente"

80. OSSERVAZIONI ALLA PRECEDENTE DEFINIZIONE. OGGETTIVITÀ DEL SEGUIRE Non saranno qui superflue alcune osservazioni. Poiché ho lasciato indeterminata la relazione φ, la successione non va necessariamente pensata come un ordinamento spaziale e temporale, sebbene questi casi non siano esclusi. Qualcuno potrebbe forse ritenere spontanea un'altra spiegazione; per esempio questa: se, a partire da x, si dirige sempre la propria attenzione da un oggetto ad un altro con cui il primo stia nella relazione φ, e se, cosí procedendo, si può finire col raggiungere l'oggetto y, allora si dirà che y segue x nella φ-successione.

Rispondo che questo è unicamente un modo di esaminare i fatti, ma non è una definizione. La circostanza che, mutando via via la nostra attenzione, finiamo o no col raggiungere y può dipendere da varie condizioni collaterali soggettive, per esempio dal tempo che ci è concesso o dalla nostra conoscenza degli oggetti. A rigore, invece, il fatto che y segua x nella φ-successione non ha nulla a che vedere con la nostra attenzione né con le condizioni del suo dirigersi in un senso o nell'altro; esso è qualcosa di reale, di effettivo, come è reale che un foglio verde riflette certi raggi e ne assorbe certi altri indipendentemente dalla circostanza che i raggi riflessi giungano o no ai miei occhi e provochino o no una certa sensazione, com'è vero che un granello di sale è solubile in acqua, sia che io possa gettarvelo e poi osservare ciò che avviene, sia che io non abbia affatto la possibilità di compiere un esperimento su di esso.

Con la nostra definizione, il fatto del seguire è elevato dal campo della possibilità soggettiva a quello della determinatezza oggettiva. E invero, che da certe proposizioni ne segua un'altra, è qualcosa di oggettivo, qualcosa che non può dipendere dalle leggi del movimento della nostra attenzione, qualcosa rispetto a cui è indifferente che noi com-

definita nel paragrafo 76), e consideriamo tutti i concetti F per i quali valgono le due seguenti proprietà:
a) ogni numero che "segue immediatamente" x, cade sotto F;
b) ogni qualvolta un numero d cade sotto F, qualunque numero che "segue immediatamente" d cade esso pure, per ciò stesso, sotto F.

Allora: asserire che y segue la x nella successione considerata, significherà — secondo la definizione di Frege — asserire che y cade sotto tutti i concetti F che godono delle due proprietà accennate.

In altri termini: il seguire (generico) a x nella successione dei numeri naturali viene ricondotto al "cadere sotto un qualsiasi concetto F", purché questo goda di certe due proprietà definite mediante la relazione (piú semplice) del "seguire immediatamente".]

piamo effettivamente, o no, la deduzione. Nella definizione anzidetta abbiamo realmente un carattere che, per principio, è in grado di risolvere il problema se y segua x, ovunque questo problema venga posto, anche se in qualche caso particolare certe difficoltà esterne possono eventualmente impedirci di decidere se tale carattere si trovi o no soddisfatto. Quest'ultima circostanza è indifferente per la cosa in sé.

Non è vero che, per essere sicuri che un dato oggetto segue un altro, si abbia sempre bisogno di percorrere tutti i termini della successione dal primo oggetto a quest'ultimo. Se per esempio si sa che, nella φ-successione, l'oggetto b segue a, e c segue b, allora si può concludere — in base alla nostra definizione — che c segue a, anche senza conoscere i termini intermedi.

Soltanto la nostra definizione del seguire in una successione ci renderà possibile ricondurre a leggi logiche generali il processo, apparentemente caratteristico per la matematica, che fa concludere da n a $(n+1)$.[1]

81. VIENE SPIEGATA L'ESPRESSIONE "x APPARTIENE ALLA φ-SUCCESSIONE CHE TERMINA CON y" Prendiamo ora come relazione φ quella che lega m a n nella proposizione

"n segue immediatamente m nella successione dei numeri naturali";

allora, invece di dire "φ-successione", diremo "successione dei numeri naturali".

Ciò posto, stabiliamo per definizione che la proposizione "y segue x nella φ-successione oppure y è identico a x" risulti equivalente alla proposizione

"y appartiene alla φ-successione che inizia con x",

e ancora a quest'altra

"x appartiene alla φ-successione che ha termine con y".

Potremo allora concludere: il numero a appartiene alla successione dei numeri naturali che termina con n, quando, nella successione dei numeri naturali, n segue a oppure è identico ad a.[2]

[1] [Trattasi del noto processo di induzione completa.]

[2] Se n non è un numero naturale, allora diremo che soltanto n stesso appartiene alla successione dei numeri naturali che termina con n. Non ci si scandalizzi di questo modo di esprimerci!

82. Si accenna, per sommi capi, alla dimostrazione che non vi è un ultimo termine nella successione dei numeri naturali Bisogna ora provare che — a una condizione cui dovremo far cenno in seguito — il numero che spetta al concetto "appartenente alla successione dei numeri naturali che termina con *n*" segue immediatamente al numero *n* nella successione dei numeri naturali. Con ciò risulterà dimostrato che esiste sempre un numero che segue immediatamente *n* nella successione dei numeri naturali, e quindi risulterà provato che questa successione non ammette alcun termine ultimo. È evidente l'impossibilità di dimostrare tale teorema per mezzo di semplici considerazioni empiriche o con l'induzione.[1]

Non possiamo qui svolgere la dimostrazione in tutti i suoi particolari, perché questo ci condurrebbe troppo lontano. Ci accontenteremo quindi di accennarne i punti principali.

Il primo consiste nel dimostrare che:
se *a* segue immediatamente *d* nella successione dei numeri naturali, e se per *d* vale la seguente proposizione:

> "Il numero che spetta al concetto 'appartenente alla successione dei numeri naturali che termina con *d*' segue immediatamente *d* nella successione dei numeri naturali",

allora una proposizione analoga dovrà valere anche per *a*, cioè dovrà essere pure vero che:

> "Il numero che spetta al concetto 'appartenente alla successione dei numeri naturali che termina con *a*' segue immediatamente *a* nella successione dei numeri naturali".

Il secondo punto della dimostrazione consiste nel provare che è valido per 0 quanto è stato ora affermato per *d* e per *a*.

Se ne concluderà che la stessa cosa vale per *n*, se *n* appartiene alla successione dei numeri naturali che inizia con 0.

Questo processo dimostrativo è un'applicazione della definizione (esposta nel paragrafo 81) dell'asserto

> "*y* segue *x* nella successione dei numeri naturali",

[1] [Qui Frege intende riferirsi alla "induzione nel senso di Mill", non alla "induzione completa" caratteristica dell'aritmetica.]

ove si deve assumere quale concetto F quello stesso affermato in comune per a e per d, per 0 e per n.

83. Definizione del numero naturale finito. Nessun numero finito segue sé stesso nella successione dei numeri naturali Nella prima parte della dimostrazione accennata nel paragrafo 82, bisogna provare che a è il numero il quale spetta al concetto "appartenente alla successione di numeri naturali che termina con a e diverso da a". A tale scopo occorre di nuovo dimostrare che questo concetto ha la medesima estensione del concetto "appartenente alla successione dei numeri naturali che termina con d". E qui si ha bisogno della proposizione che nessun oggetto che appartiene alla successione dei numeri naturali iniziante con 0, può seguire sé stesso nella successione dei numeri naturali. Anche questa va dimostrata, come si è accennato sopra, con la nostra definizione del seguire in una successione.[1]

Allorché enunciamo la proposizione:

"Il numero che spetta al concetto 'appartenente alla successione dei numeri naturali che termina con n' segue immediatamente n nella successione dei numeri naturali"

ci troviamo pertanto costretti ad aggiungere la condizione che n appartenga alla successione dei numeri naturali iniziante con 0.

Questa condizione può venir espressa piú brevemente convenendo di affermare

"n è un numero naturale finito"

in luogo di

"n appartiene alla successione dei numeri naturali iniziante con 0".

Allora, la proposizione poco fa accennata può cosí enunciarsi: nessun numero naturale finito segue sé stesso nella successione dei numeri naturali.

[1] Ernst Schröder (*op. cit.*, p. 63) sembra riguardare questa proposizione come conseguenza di un certo modo di designare i numeri, che può venir immaginato anche per altra via. Si nota però, anche qui, l'inconveniente che pregiudica tutta la sua trattazione di questo problema, e cioè che non si sa bene se un numero sia un segno, e quale debba essere allora il suo significato, o se invece sia questo stesso significato. Ciò posto, dal semplice fatto che si stabiliscono segni diversi, cosicché non torna mai il medesimo, non segue ancora che questi segni abbiano pure significati diversi.

Numeri naturali infiniti

84. Il numero naturale che spetta al concetto "numero naturale finito" è un numero infinito Di fronte ai numeri naturali finiti, e ben distinti da essi, stanno quelli infiniti. Il numero che spetta al concetto "numero naturale finito" è un numero infinito. Indichiamolo con ∞_1. Se esso fosse finito, non potrebbe seguire sé medesimo nella successione dei numeri naturali; invece si vede subito che ∞_1 si trova proprio in questa condizione.

Nel numero ∞_1 ora definito non vi è, a ogni modo, nulla di strano o di misterioso. L'affermazione "Il numero naturale che spetta a un certo concetto F è ∞_1" non significa né piú né meno di quest'altra: "Esiste una relazione che fa corrispondere in modo biunivoco gli oggetti che cadono sotto F ai numeri naturali finiti". Essa possiede dunque, in seguito alle nostre spiegazioni, un senso ben chiaro e privo di ambiguità; ciò basta per giustificare l'uso del segno ∞_1 e assicurargli un significato.

L'obiezione, che noi non siamo in grado di formarci alcuna immagine di un numero infinito, è del tutto irrilevante, e potrebbe venir mossa con eguale diritto anche contro i numeri naturali finiti. In base alla sopraddetta definizione, il nostro ∞_1 risulta avere in sé qualcosa di altrettanto determinato, quanto un qualsiasi numero finito; è senza dubbio possibile riconoscerlo per quel che è, e distinguerlo da ogni altro.

85. I numeri infiniti di Georg Cantor: le "potenze". Differenze nella denominazione Or non sono molti anni Georg Cantor ha introdotto i numeri naturali infiniti in uno scritto degno del massimo interesse.[1]

Mi trovo completamente d'accordo con lui nel giudicare l'opinione di coloro, che, fra tutti i possibili numeri, vorrebbero riconoscere come effettivi soltanto i numeri naturali finiti. Né questi, né le frazioni, né i numeri negativi, gli irrazionali o i complessi sono rappresentabili coi sensi o risultano spaziali. Se, quindi, si volesse chiamare effettivo

[1] Cantor, *op. cit.*

esclusivamente ciò che agisce sul senso o produce per lo meno qualche risultato, che possa avere, quali conseguenze prossime o lontane, delle rappresentazioni sensoriali, è chiaro che nessuno di questi tipi di numeri potrebbe dirsi effettivo. Il fatto è però che noi non abbiamo alcun bisogno di tali rappresentazioni per fondare le dimostrazioni dei nostri teoremi. Nelle nostre ricerche possiamo far uso, senza il benché minimo timore, di qualunque nome o segno che sia stato introdotto con metodo logicamente inoppugnabile; e perciò il numero ∞_1 risulta altrettanto giustificato quanto i numeri 1 e 2.

Mentre, per questo lato, credo di essere in completo accordo con Cantor, mi allontano alquanto da lui per ciò che riguarda la denominazione. Egli chiama "potenza" il mio numero naturale, e introduce invece l'idea dell'ordinamento nel suo concetto di numero.[1] Per numeri finiti si dimostra senza difficoltà che anche il suo concetto di numero risulta indipendente dall'ordine nella successione; il contrario accade però per grandezze infinite. Ora è facile vedere che l'uso linguistico della parola "numero" e la domanda "quanti?" non contengono alcun accenno a un determinato ordinamento; è chiaro invece che il numero di Cantor risponde piuttosto alla domanda "Che posto occupa nella successione l'ultimo termine?". Mi sembra quindi che la mia denominazione si accordi, meglio della sua, con l'uso linguistico ordinario.

Allorché si amplia il significato di una parola, è buona regola fare in modo che il maggior numero possibile di proposizioni generali mantengano la loro validità, e sopra tutto quelle piú basilari come, per il numero, l'indipendenza all'ordine nella successione. Per noi è accaduto però qualcosa di ancor piú notevole: che non abbiamo avuto neanche bisogno di un vero ampliamento, perché il nostro concetto di numero naturale abbràccia già di per sé anche i numeri infiniti.

86. Il seguirsi in una successione di Cantor e il mio seguirsi in una successione Per ottenere i suoi numeri infiniti, Cantor introduce il concetto di una relazione particolare, quella del "seguirsi in una successione", che si differenzia notevolmente dal mio "seguirsi in una succes-

[1] Questa diversità di espressioni può sembrare in pieno contrasto con ciò che venne detto, precedentemente, circa l'oggettività dei concetti; si vede però subito che, qui, è soggettiva soltanto la denominazione.

sione". Secondo lui, per esempio, sarebbe possibile ottenere una successione ordinando gli interi positivi in modo che prima si seguano tutti i dispari e poi tutti i pari, cioè ogni numero dispari preceda ogni numero pari. In questa successione, tanto per fare un esempio, 0 seguirebbe a 13; non vi sarebbe però nessun numero precedente in modo immediato allo 0. Questo caso invece non può in alcun modo presentarsi nelle successioni da me definite. In esse infatti si può dimostrare con perfetto rigore, e senza far appello ad alcun assioma tratto dall'esperienza, che se y segue x nella φ-successione, vi è un termine in questa successione che precede immediatamente y.

Al punto attuale mi sembra che manchino ancora le definizioni esatte del seguirsi nella successione e del numero naturale di Cantor. Cosí egli si appella alla "intuizione interna", che risulta sempre qualcosa di misterioso, dove sarebbe necessario, e per certo anche possibile, ricavare una dimostrazione dalle pure definizioni. Credo infatti di antivedere come quei concetti potrebbero venir determinati.

A ogni modo, con le mie osservazioni, non intendo intaccare sia pur minimamente la giustificazione e la fecondità delle ricerche di Cantor. Tutt'al contrario, io vedo in esse un vero ampliamento della scienza, sopra tutto notevole in quanto riesce ad aprire una via puramente aritmetica verso numeri infiniti superiori (le potenze).

6.
Conclusione

[Mentre la terza sezione di questo capitolo non ci dà altro che un riassunto breve e fedele dei capitoli 4 e 5, le prime due invece sono realmente costruttive, e molto importanti per il pensiero generale di Frege.

I punti principali, in esse svolti, sono: la spiegazione del significato e del valore di quella logicizzazione completa dell'aritmetica che costituisce il fine ultimo della ricerca di Frege (§ 87); l'analisi delle ragioni che rendono indispensabile l'uso di un linguaggio simbolico rigoroso per comprendere a fondo la natura delle dimostrazioni (§§ 90 e 91); la critica del formalismo puro di alcuni indirizzi matematici, e la tentata dimostrazione del carattere non creativo della scienza (§§ 94-97).

Molto originale la similitudine geometrica, accennata nel paragrafo 88 per rendere intuitive le profonde differenze fra la definizione in senso aristotelico (*per genus proximum et differentiam specificam*) e la definizione costruttiva in uso nella matematica.

Efficacissima la spiegazione (§ 105) del fascino dell'aritmetica, dovuto secondo Frege, al carattere totalmente razionale dei suoi oggetti. Questo paragrafo esprime, in poche righe, la vera conclusione filosofica di tutta l'opera.]

Natura analitica delle leggi aritmetiche

87. LA NATURA DELLE LEGGI ARITMETICHE Credo di aver provato col presente scritto quanto risulti probabile che le leggi aritmetiche siano giudizi analitici e quindi a priori. L'aritmetica diverrebbe, perciò, null'altro che una logica ulteriormente sviluppata, e ogni proposizione aritmetica acquisterebbe il carattere di una legge logica, anzi di una legge dedotta.

Le applicazioni dell'aritmetica alle scienze della natura si presenterebbero come pure e semplici elaborazioni logiche di fatti d'osservazione; [1] eseguire calcoli equivarrebbe a ricavar conclusioni.

[1] L'atto stesso dell'osservare implica già un'attività logica.

Stando alla mia interpretazione, le leggi numeriche non richiederanno — come pensa Baumann [1] — alcuna conferma pratica per risultare applicabili al mondo esterno. E infatti non esistono nel mondo esterno, cioè nella totalità degli oggetti spaziali, né concetti, né proprietà di concetti, né numeri; sicché le leggi numeriche non si possono dire, a rigor di termini, applicabili agli oggetti esterni: non sono leggi della natura. Esse sono invece applicabili ai giudizi, che valgono per gli oggetti del mondo esterno: sono leggi delle leggi naturali. Ciò che le leggi aritmetiche affermano, non è un nesso tra fenomeni naturali, ma tra giudizi; e anche le leggi naturali rientrano nella classe dei giudizi.[2]

88. Kant sottovaluta i giudizi analitici [3] Kant [4] ha palesemente sottovalutato l'importanza dei giudizi analitici, e ciò, senza dubbio, per una troppo limitata determinazione del concetto di giudizio analitico. Sembra tuttavia che, in alcuni punti,[5] sia balenato anche innanzi ai suoi occhi il concetto piú ampio di cui faccio qui uso.

Se si prende come base la sua definizione, è facile vedere che la suddivisione dei giudizi in analitici e sintetici non esaurisce tutta la classe dei giudizi. Kant prende in esame il giudizio affermativo universale. È questo un caso, in cui si può anche parlare di un concetto del soggetto; in tale caso risulterà dunque possibile domandarsi se il concetto del predicato sia o no, per la sua stessa definizione, contenuto entro il concetto del soggetto. Ma come si potrà ripetere questa domanda quando il soggetto è un oggetto singolo? o quando si è di fronte a un giudizio di esistenza? In tutti questi casi è impossibile parlare di un concetto del soggetto nel medesimo senso di poco fa.

Kant sembra pensare il concetto come determinato in ogni caso dalle sue note caratteristiche; questo però è soltanto uno dei modi per for-

[1] Baumann, *op. cit.*, vol. 2, p. 670.

[2] [Per quanto appena accennata, l'idea qui esposta da Frege è della massima importanza filosofica; anzi costituisce uno dei suoi contributi piú originali e piú fecondi alla critica epistemologica del nostro secolo. Essa segna nettamente il passaggio della mentalità galileiana, che vedeva il reale scritto in termini geometrici, alla mentalità moderna, che concepisce i princípi matematici non piú come leggi generali insite nella natura, ma come semplici leggi di un tipo particolare di nostro linguaggio: di quel tipo che si è rivelato finora piú idoneo alla descrizione dei fenomeni fisici.]

[3] [Si veda p. 238, n. 2.]

[4] Kant, *op. cit.*, vol. 3, pp. 33 sgg.

[5] A p. 43 Kant afferma che il principio di contraddizione può farci raggiungere un giudizio sintetico in un solo caso: quando è già presupposto un altro giudizio sintetico.

mare i concetti, e proprio dei meno fecondi. Se diamo uno sguardo alle definizioni riferite nel presente scritto, non ne troviamo forse nemmeno una del tipo anzidetto. Lo stesso vale per le definizioni veramente feconde della matematica; per esempio per la definizione della continuità di una funzione. Esse non si ottengono coordinando fra loro una serie di note caratteristiche, ma si ottengono da un collegamento piú profondo, vorrei dire piú organico, di determinazioni. Si può rendere intuitiva la differenza ricorrendo a una imagine geometrica. Se si rappresentano i concetti (o meglio le loro estensioni) per mezzo di porzioni chiuse di piano, accadrà che al concetto definito coordinando fra loro una serie di note caratteristiche corrisponderà la regione comune a tutte quelle porzioni di piano; regione racchiusa da parti dei confini di ciascuna di esse. In una tale definizione si tratta dunque — per valerci sempre della nostra immagine geometrica — di usare in maniera nuova le linee già tracciate, sí da limitare con esse una nuova porzione di piano.[1] In questa opera non vi è a ogni modo nulla di sostanzialmente nuovo. Invece le determinazioni di concetti del tipo piú fecondo a cui ho accennato poco fa tracciano delle nuove linee di confine, che prima non erano affatto segnate. Ciò che può venir ricavato da esse non è, dunque, qualcosa di intuibile a priori. Non si tratta semplicemente, in tali definizioni, di togliere di nuovo dagli armadi quel che vi era riposto. Le conseguenze da esse ricavate ampliano in modo effettivo le nostre conoscenze, e si dovrebbe perciò, secondo Kant, considerarle come sintetiche. In realtà tali conseguenze sono davvero contenute nelle definizioni: ma come la pianta nel seme, non come un trave nella casa. Spesso accade, poi, che siano necessarie molte definizioni per la dimostrazione di un teorema: in questi casi tale teorema non è contenuto in nessuna di esse, singolarmente considerata, eppure costituisce una pura conseguenza logica di tali proposizioni, prese nel loro insieme.

89. SI ESAMINA L'AFFERMAZIONE DI KANT, CHE SENZA L'INTUIZIONE SENSIBILE NON CI SAREBBE DATO ALCUN OGGETTO. MERITI DI KANT NEI RIGUARDI DELLA MATEMATICA Ancora su un altro punto debbo oppor-

[1] Cosí accade, quando si collegano le note caratteristiche con la congiunzione "o".

mi a Kant: non posso infatti ammettere la validità universale della sua affermazione, che senza l'intuizione sensibile non ci sarebbe dato alcun oggetto. Lo zero e l'uno sono, per esempio, oggetti che non ci possono venire dati per via dei sensi. Quelli stessi che pretendono che i numeri naturali piú piccoli siano di natura intuitiva, non potranno sostenere che sia loro dato intuitivamente qualche numero maggiore di $1000^{1000^{1000}}$; eppure ci sono note varie proprietà di numeri siffatti.

Forse — si obietterà — Kant ha usato il termine "oggetto" in un senso alquanto diverso. Ammettiamolo pure; ma allora dobbiamo riconoscere che lo zero, l'uno, il nostro ∞_1 cadono completamente fuori della sua trattazione. Essi infatti non sono nemmeno dei concetti; e, del resto, anche per i concetti Kant pretende che l'oggetto sia loro dato dall'intuizione.

Giunto a questo punto della mia analisi — per non essere accusato di andare smaniosamente in cerca di piccole manchevolezze proprio nei confronti di un genio, a cui possiamo guardare solo con riconoscente ammirazione — sarà opportuno che io cerchi di mettere in luce anche i punti di accordo fra la sua e la mia teoria, i quali sono assai piú numerosi che quelli di disaccordo.

Per limitarmi a toccare gli argomenti che piú interessano la nostra trattazione, dirò che uno dei meriti maggiori di Kant, è di aver distinto i giudizi analitici da quelli sintetici. Affermando poi che le verità geometriche sono sintetiche a priori, egli ha saputo per primo comprendere la loro vera natura. E questa scoperta è ancor oggi degna di venir menzionata, perché esistono tuttora non pochi studiosi che la misconoscono. Se Kant ha errato per ciò che riguarda l'aritmetica, ciò non toglie, io credo, nulla di essenziale ai suoi meriti. L'importante era infatti per lui che vi fossero giudizi sintetici a priori: ha ben poca importanza che essi si presentino solo nella geometria o anche nell'aritmetica.

90. PER LA DIMOSTRAZIONE COMPLETA DELLA NATURA ANALITICA DELLE LEGGI ARITMETICHE SI RICHIEDEREBBE, OLTRE QUANTO FU ESPOSTO FINORA, UNA LUNGA CATENA DI RAGIONAMENTI SENZA LACUNE Col presente lavoro, non posso pretendere di aver reso altro che probabile la natura analitica delle proposizioni aritmetiche; al punto attuale, infatti, è ancora possibile dubitare che la loro dimostrazione possa venir comple-

tamente ricondotta a pure leggi logiche, o che in qualche punto di essa si inseriscano inavvertitamente degli argomenti di altro tipo.

Né bastano, per eliminare questo dubbio, i pochi cenni da me dati per la dimostrazione di alcuni teoremi; a tale scopo sarebbe necessario molto di piú: e cioè che, per ogni teorema, venisse data una catena completa di ragionamenti, priva di qualsiasi lacuna, entro la quale risultasse escluso qualsiasi passo non conforme ai pochi schemi di ragionamento riconosciuti come prettamente logici. Finora non venne forse data nemmeno una dimostrazione con questo metodo rigoroso; il matematico infatti si accontenta che ogni passaggio a un nuovo giudizio si mostri esatto, senza investigare la natura di questo "mostrarsi", senza esaminare se esso risulti logico o intuitivo. Un passo innanzi in una dimostrazione matematica è spesso qualcosa di molto complicato, ed equivale a svariate illazioni semplici, fra le quali non è escluso che si inserisca qualcosa di ricavato dall'intuizione. In questa scienza si procede a salti, ed è proprio per questo che i ragionamenti matematici sembrano spesso di tipi diversissimi; infatti, tanto maggiori sono i salti, tanto piú numerose saranno le combinazioni di illazioni semplici e di assiomi intuitivi che possono intervenire in essi. Tuttavia un passaggio del genere ora descritto può, in certi casi, apparirci immediatamente chiaro, pur senza che ne afferriamo i passaggi intermedi; e poiché, cosí abbreviato, esso non rientra nei soliti tipi di ragionamento riconosciuti come logici, ecco che ci troviamo subito indotti a ritenere di carattere intuitivo la sua evidenza e a pensare che il teorema cosí ricavato costituisca una verità sintetica (e ciò anche quando il campo di validità del teorema fuoriesce palesemente dal dominio dell'intuizione).

Attenendosi a questa via, non è possibile separare nettamente ciò che è sintetico, e riposa sull'intuizione, da ciò che è analitico. Non si riesce nemmeno a elencare con sicurezza, in un quadro completo, gli assiomi dell'intuizione; e perciò non si riesce a fare in modo che ogni dimostrazione matematica possa venir svolta con leggi logiche precise sul fondamento di quei soli assiomi.

91. La scrittura per concetti offre un rimedio alla mancanza ora denunciata Si rivela dunque assolutamente necessario evitare

tutti i salti nello sviluppo dei ragionamenti matematici. Che questo. però sia tutt'altro che semplice ce lo mostra la lungaggine di un procedere a un passo per volta. Se si adotta questo metodo, ogni dimostrazione — per poco complicata che sia — minaccia di assumere una mostruosa lunghezza. Si aggiunga, inoltre, che la straordinaria complessità delle forme logiche coniate dalla lingua comune, rende difficilissimo elencare un quadro preciso di forme deduttive, che risulti immediatamente afferrabile dal nostro intelletto, e si riveli sufficiente per tutti i casi che si incontrano nella ricerca matematica.

Per evitare questi molteplici inconvenienti, ho ideato la mia scrittura per concetti. Da un lato essa deve procurare alle nostre espressioni maggior brevità e comprensibilità, dall'altro deve muoversi, a mo' di calcolo, nello schema di poche forme precise, in modo da non permettere alcun passaggio che non avvenga secondo regole ben precise, stabilite una volta per sempre.[1] Allorché si adotta questa scrittura, nessun fondamento inavvertito riesce a inserirsi nascostamente nei nostri ragionamenti. Proprio per questa via io sono riuscito, senza trarre alcun assioma dall'intuizione, a dimostrare una proposizione che a prima vista potrebbe sembrare sintetica.[2] Essa può venir cosí enunciata:

Se la relazione di ogni termine di una successione col suo successivo è univoca, e se in questa serie tanto m quanto y seguono a x, allora, nella successione considerata, o y precede m, o coincide con esso, o lo segue.

Da questa dimostrazione si riesce a vedere assai bene che le proposizioni che ampliano le nostre conoscenze, possono risultare analitiche.[3]

[1] La mia scrittura deve però essere in grado di esprimere, non soltanto le forme logiche come la lingua simbolica di Boole, ma pure un contenuto.

[2] Si veda *Ideografia*, p. 204, formula 133.

[3] Si troverà sempre che questa dimostrazione è ancora troppo lunga, malgrado l'uso della mia scrittura per concetti; e si giudicherà, forse, che questo svantaggio non viene sufficientemente compensato dalla sicurezza, quasi incondizionata, di non commettere errori e di evitare lacune. Osservo però che, nella mia *Ideografia*, mi ero proposto lo scopo di ricondurre tutto al minor numero possibile di leggi logiche, le piú semplici possibili. Perciò applicai un unico tipo di inferenza. Accennai tuttavia già fin d'allora (Introduzione, p. 104) che, per una applicazione piú vasta del mio metodo, sarebbe stato utile ammettere anche altri modi inferenziali. Ciò è possibile, senza che ne derivi proprio alcun danno per la validità della nostra catena di ragionamenti. In questo modo si riesce a ottenere una semplificazione assai notevole delle dimostrazioni.

Altri tipi di numeri

92. SENSO ATTRIBUITO DA HANKEL AL PROBLEMA, SE UN CERTO NUMERO SIA O NO POSSIBILE Fin qui abbiamo limitato il nostro studio ai numeri naturali. Gettiamo, dunque, ancora uno sguardo ad altri tipi di numeri, e cerchiamo di utilizzare anche per questo campo piú vasto ciò che abbiamo scoperto in quello piú ristretto.

Cominciamo col riportare alcune parole di Hankel [1] che possono servirci a chiarire il senso del problema se un certo numero sia o no possibile.

"Il numero non è piú, oggi, un oggetto, una sostanza, fornita di esistenza sua propria, indipendente dal soggetto che la pensa e dagli oggetti che ne suggeriscono il pensiero; non si presenta piú quale un principio autonomo come ritenevano per esempio i pitagorici. Il problema della sua esistenza può quindi venire ricondotto unicamente al soggetto che pensa i numeri, o agli oggetti i cui rapporti sono espressi dai numeri. A rigor di termini risulta impossibile, agli occhi del matematico, soltanto ciò che è impossibile dal punto di vista logico, ossia ciò che è contraddittorio. Che non sia lecito ammettere numeri impossibili in quest'ultimo senso, è cosa chiara e non richiede alcuna dimostrazione. Ma se i numeri presi in esame sono possibili logicamente, se il loro concetto è definito in modo chiaro e preciso, e quindi senza contraddizioni, allora il domandarsi se essi risultino o no possibili può significare soltanto: domandarsi se esista un sostrato di essi nel campo del reale, dell'attuale, di ciò che è effettivo nell'intuizione, se esistano degli oggetti nei quali trovano modo di esprimersi i numeri considerati, cioè le relazioni intellettuali del genere fissato."

93. I NUMERI NON SONO NÉ FUORI DI NOI IN SENSO SPAZIALE, NÉ SOGGETTIVI A leggere le prime righe del passo citato, si può dubitare se, a giudizio di Hankel, i numeri esistano nel soggetto pensante o negli oggetti che ne suggeriscono il pensiero, o in entrambi. A ogni modo si può escludere che, nel senso spaziale, essi siano interni o esterni sia al soggetto che a un oggetto, sono, senza alcun dubbio, fuori dal

[1] HANKEL, *op. cit.*, pp. 6 sg.

soggetto, nel senso che non sono soggettivi. Mentre ogni individuo sente esclusivamente il suo dolore, il suo piacere, la sua propria fame, mentre percepisce soltanto le sue sensazioni di suono e di colore, i numeri invece possono costituire l'oggetto comune di molti individui: effettivi oggetti e non soltanto stati interni, piú o meno simili, di varie persone. Purtroppo, quando cerca di riferire la questione dell'esistenza al soggetto pensante, Hankel sembra confondere con la psicologia ciò che non ha nulla a che vedere con essa. La matematica non si interessa della natura del nostro animo; per essa è indifferente se si risponda nell'uno o nell'altro modo a un qualsiasi problema psicologico.

94. La non contraddittorietà di un concetto non garantisce che qualcosa cada sotto di esso, e richiede essa medesima una dimostrazione Va pure contestato che, all'occhio del matematico, risulti impossibile soltanto ciò che è contraddittorio. Come già abbiamo visto, un concetto è perfettamente ammissibile, anche se le sue note contengono una contraddizione; soltanto non si può, in questo caso, ammettere che qualcosa cada sotto di esso. D'altra parte, però, il fatto che un concetto non contenga alcuna contraddizione, non può ancora farci concludere che qualche oggetto debba necessariamente cadere sotto di esso. E del resto: in che modo si può dimostrare che un concetto non contiene alcuna contraddizione? Ciò non risulta sempre evidente. Dal fatto che non è visibile alcuna contraddizione, non si può dedurre, per certo, che non ne esista alcuna; la determinatezza della definizione non ci offre la benché minima garanzia in favore di ciò. Hankel dimostra [1] che un sistema limitato di numeri complessi piú elevato di quello comune non può venir sottoposto, senza contraddizione, a tutte le solite leggi dell'addizione e della moltiplicazione. Ora è chiaro che questo teorema va dimostrato, non essendo affatto evidente. Nulla esclude quindi che — mentre non se ne era ancor trovata una dimostrazione — qualche studioso cercasse di applicare un sistema di numeri complessi del tipo anzidetto, e raggiungesse per questa via risultati meravigliosi, di fondazione non piú difficile che certi teoremi sui determinanti dimostrati da Hankel per mezzo dei

[1] Hankel, *op. cit.*, pp. 106 sg.

cosiddetti numeri alternanti.[1] Chi ci garantisce infatti che anche nel concetto di questi ultimi numeri non si celi qualche profonda contraddizione, come in quelli? Del resto, anche ammettendo che si riuscisse a escludere in generale l'esistenza di una contraddizione per quante si vogliono unità alternanti, non ne seguirebbe ancora che queste unità esistano davvero. Eppure è proprio di tale esistenza che noi abbiamo bisogno.

Consideriamo ora un esempio tratto dalla geometria; prendiamo cioè in esame la proposizione 18 del primo libro degli *Elementi* di Euclide:

> "In un qualsiasi triangolo, al lato maggiore sta opposto l'angolo maggiore".

Per dimostrarla, Euclide stacca dal lato maggiore AC un segmento AD eguale al lato minore AB, e si richiama, a tale scopo, a una precedente costruzione. Evidentemente la dimostrazione andrebbe in rovina se non esistesse il punto D. Né basta, per salvarla, dimostrare che non si cela alcuna contraddizione nel concetto "punto di AC avente dall'estemo A una distanza eguale ad AB". In seguito Euclide congiunge B con D. Qui, di nuovo, l'esistenza del segmento BD è una proposizione, di cui la dimostrazione considerata non può far a meno.

95. Non si può riguardare senz'altro $(c-b)$ come un segno che risolve di per sé il problema della sottrazione A rigore, solo dimostrando che sotto un concetto cade qualche oggetto, si prova che questo concetto non è contraddittorio. La pretesa inversa (di ricavare l'esistenza di qualche oggetto dal carattere non contraddittorio di un concetto) è un errore.

Proprio in quest'errore cade Hankel [2] allorché — riferendosi all'equazione $x+b=c$ — scrive:

"Se $b>c$, non esiste evidentemente alcun numero nella successione 1, 2, 3... che risolva l'equazione considerata: la sottrazione è allora impossibile. Nulla ci impedisce però, in questo caso, di riguardare la differenza $(c-b)$ come un segno che risolva il problema proposto, e con cui si debba proprio operare come si opera coi numeri della successione 1, 2, 3, ..."

[1] *Ibid.*, § 35.

[2] Hankel, *op. cit.*, p. 5. Allo stesso modo procede Kossak, *op. cit.*, p. 17.

Contrariamente al parere di Hankel, vi è senza dubbio un ben chiaro motivo che ci impedisce di riguardare senz'altro il segno (2—3) come un ente capace di risolvere il problema anzidetto. Questo motivo è che un segno vuoto non risolve proprio alcun problema. Un puro segno senza contenuto è semplicemente un po' di inchiostro buttato su un pezzo di carta; esso ha proprietà fisiche, ma non proprietà matematiche, e quindi non può essere in grado di riprodurre il numero 2 se aggiunto al 3. Qualora avesse quest'ultima proprietà, non costituirebbe piú un semplice segno; e quindi il considerarlo come tale sarebbe un errore di logica. Anche nell'ipotesi $c > b$, la soluzione dell'equazione proposta non è data dal puro segno $(c - b)$, ma dal contenuto di questo segno.

96. Nemmeno il matematico può creare qualcosa ad arbitrio Se fosse lecito procedere come Hankel, si potrebbe dire con egual diritto: fra i numeri finora noti, non ve n'è alcuno che soddisfi contemporaneamente alle due equazioni

$$x+1=2 \quad \text{e} \quad x+2=1;$$

nulla ci impedisce però di introdurre un segno che risolva questo problema.

Si obietterà: il problema contiene già in sé stesso una contraddizione. Rispondo: certamente, se si esige di risolverlo con un numero reale o con un numero complesso di tipo ordinario; ma ampliamo il nostro sistema numerico e creiamo nuovi numeri che soddisfino alla condizione richiesta! Ciò fatto resteremo poi in attesa di qualcuno che sappia trovarvi una contraddizione. Chi può prevedere fin d'ora cosa accadrà nel nuovo sistema numerico? Senza dubbio sarà impossibile, in esso, conservare l'univocità della sottrazione; ma questo non è proprio nulla di strano: già introducendo i numeri negativi abbiamo dovuto rinunciare all'univocità dell'estrazione di radice, e, introducendo i numeri complessi, all'univocità del logaritmo.

Né basta; poiché siamo per questa via, creiamo anche dei numer che ci permettano di sommare delle serie divergenti!

No. Il matematico non può creare qualcosa ad arbitrio, proprio come

non lo può il geografo. Sia l'uno che l'altro possono soltanto scoprire quel che già esiste, e dargli un nome.[1]

L'errore ora messo in luce vizia allo stesso modo la teoria delle frazioni, dei numeri negativi, dei complessi.[2] Si pretende che le note regole di calcolo, valide per i vecchi sistemi numerici, rimangano valevoli nella piú larga misura possibile anche per i nuovi numeri, e si deducono di qui proprietà generali di questi nuovi numeri e relazioni generali fra essi. Si ritiene poi giustificato un tale operare se non si urta mai, di fatto, in qualche contraddizione; come se una contraddizione non potesse, ciò malgrado, nascondersi in qualche punto non visto, e come se la pura e semplice non contraddizione equivalesse di per sé all'esistenza.

97. Occorre distinguere i concetti dagli oggetti Che si commetta quest'errore con tanta disinvoltura, dipende senza alcun dubbio da un'insufficiente distinzione fra oggetti e concetti.

Nulla ci impedisce certamente di usare il concetto "radice quadrata di -1"; ma nulla ci dà il diritto di anteporre senz'altro a queste parole l'articolo determinativo, riguardando come fornita di senso l'espressione "la radice quadrata di -1".

Nell'ipotesi che sia $i^2 = -1$, possiamo dimostrare la formula che esprime il seno di un qualsiasi multiplo dell'angolo α in funzione del seno e coseno di α stesso; non ci sarà lecito però dimenticare, che la formula cosí dimostrata trascina con sé la condizione $i^2 = -1$, da cui non ci è permesso prescindere senza ulteriori considerazioni. Se non vi fosse alcunché il cui quadrato valesse -1, la formula anzidetta potrebbe non essere giusta, malgrado la nostra dimostrazione;[3] questa infatti sembra far dipendere la validità della formula dalla condizione $i^2 = -1$. Accadrebbe proprio come se, in una dimostrazione geometrica, facessimo ricorso a qualche linea ausiliaria che non può venir tracciata.

98. Definizione dell'addizione proposta da Hankel Hankel[4] introduce due generi di operazione, cui dà il nome di litica (*lytische*),

[1] [Su questo delicato argomento si veda la parte quinta, sezione prima, § 2.]

[2] Difficoltà analoga si verifica per i numeri infiniti di Cantor.

[3] Essa potrebbe tuttavia venir dimostrata in modo rigoroso per altra via.

[4] Hankel, *op. cit.*, pp. 6 sg.

e tetica (*thetische*), e le determina con certe speciali proprietà che esse dovrebbero, secondo lui, avere. Contro di ciò non vi è proprio nulla da opporre, finché, naturalmente, non si faccia l'ipotesi che esistano tali operazioni ed esistano oggetti che possano costituirne i risultati.[1] Piú tardi poi,[2] denota con $(a+b)$ una certa operazione tetica, associativa, completamente univoca, e invece con $(a-b)$ la corrispondente operazione litica, altrettanto univoca. Ma che intendiamo per una operazione del tipo accennato? Quale operazione? Una arbitraria? Se cosí fosse, non avremmo una vera e propria definizione di $(a+b)$. Che dire poi se non esistesse alcuna operazione del genere? Se la parola "addizione" non avesse ancora un significato, sarebbe logicamente ammissibile dire: chiameremo addizione un'operazione come quella ora descritta. Invece non si può dire, finchè non si sia stabilito che esiste una e una sola operazione siffatta: essa va chiamata "l'addizione" e va rappresentata col segno $(a+b)$. Non è lecito, in un'uguaglianza che serve per definizione, fare uso da una parte dell'articolo determinativo, e dall'altra di quello indeterminativo. Invece Hankel scrive: "il modulo dell'operazione", e proprio senz'aver dimostrato che ve n'è una e una sola.

99. Insufficienza della teoria formale In breve: questa teoria formale non è sufficiente. Una cosa sola, in essa, è degna di interesse: prima vi si dimostra in generale che quando qualche operazione gode di certe proprietà come l'associativa e la commutativa, devono valere per essa certi determinati teoremi; e poi si prova che l'addizione e la moltiplicazione già note godono per l'appunto di tali proprietà, onde si può concludere, senza dover ripetere ogni volta per intero la dimostrazione, che anche per esse valgono gli anzidetti teoremi.

Però soltanto con questa applicazione a operazioni già date per altra via riusciremo a giungere col metodo ora descritto ai noti teoremi dell'aritmetica. In nessun modo invece potremo crederci giustificati a ritenere che esso ci ponga in grado di introdurre nell'aritmetica l'addizione e la moltiplicazione. Esso ci indica unicamente ove dovranno trovarsi le definizioni di queste operazioni; non riesce tuttavia a procu-

[1] Hankel fa già quest'ipotesi, quando scrive l'uguaglianza $\Theta(c, b) = a$.

[2] Hankel, *op. cit.*, p. 29

rarcele. Ci dice: "Il nome di 'addizione' potrà venir dato soltanto ad una operazione tetica, perfettamente univoca e associativa", ma ciò non basta ancora a procurarci l'operazione che dovrebbe venir denotata col nome anzidetto. Qualora si applicasse esclusivamente il puro metodo formale, nulla si opporrebbe ad attribuire alla moltiplicazione il nome di addizione indicandola con $(a+b)$; allora nessuno potrebbe sapere con certezza se 2+3 valga 5 o valga 6.

100. TENTATIVO DI GIUSTIFICARE I NUMERI COMPLESSI INVOCANDO IL FATTO CHE IL SIGNIFICATO DELLA MOLTIPLICAZIONE RISULTA IN ESSI AMPLIATO IN UN DETERMINATO MODO Se rinunziamo a questo modo di trattazione puramente formale, può parere che ci si offra subito un'altra via, per la circostanza che, simultaneamente all'introduzione di nuovi numeri, risulta ampliato il significato dei termini "somma" e "prodotto". Si considera un oggetto qualunque, per esempio la Luna, e si stabilisce: quest'oggetto moltiplicato per sé stesso dà —1. In tal modo avremo nell'oggetto "Luna" una radice quadrata di —1. Ciò sembra perfettamente lecito, perché, dal significato finora valido per la moltiplicazione, non scaturisce affatto il senso di un simile prodotto, e perciò, trattandosi di ampliare tale significato, si può stabilire perfettamente ad arbitrio il senso di quel nuovo tipo di prodotto. Però è chiaro che ci occorre pure qualcosa d'altro, e cioè il prodotto di un qualsiasi numero reale per la radice quadrata di — 1.

Invece di scegliere, come abbiamo suggerito poco fa, la Luna quale radice di — 1, sarà quindi piú opportuno scegliere per lo stesso ufficio l'intervallo di tempo di un minuto secondo. Fatta questa nuova scelta, indichiamo tale intervallo con la lettera i; allora intenderemo per $2i$, $3i$, ecc. l'intervallo di 2 secondi, 3 secondi, ecc.[1] Sorge però subito una nuova difficoltà: quale oggetto verrà denotato col simbolo $2+3i$? Quale significato dovremo attribuire, in questo caso, al segno $+$? Ciò va, naturalmente, stabilito in generale, il che sarà senza dubbio

[1] Con analogo diritto si potrebbe scegliere, come radice quadrata di —1, una certa quantità di elettricità, oppure una certa area, ecc.; allora sarebbe ovviamente necessario indicare pure con simboli diversi queste diverse radici quadrate. Che si possano cosí, apparentemente, creare tante radici quadrate di —1 quante si vuole, riesce meno strano, se si riflette che il significato della radice quadrata non costituisce — secondo questo modo di pensare — qualcosa di ben stabilito prima delle definizioni ora accennate, ma qualcosa che risulta determinato soltanto con esse.

abbastanza difficile. Supponiamo tuttavia di aver assicurato un senso a tutti i segni della forma $a+bi$, e di averlo fatto proprio in modo che continuino a valere per esso i soliti teoremi dell'addizione. Allora dovremo di nuovo stabilire qualcos'altro, e cioè stabilire la validità generale della formula

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+i(ad+bc)\,,$$

da cui risulta ulteriormente determinata la moltiplicazione.

101. La possibilità di una tale giustificazione dei numeri complessi non è indifferente per la forza conclusiva di una dimostrazione Ora saremmo in grado di dimostrare la formula poco fa accennata per $\cos(n\alpha)$, se sapessimo che, dall'uguaglianza di due numeri complessi, segue in ogni caso l'uguaglianza delle loro rispettive parti reali. Quest'ultimo fatto dovrebbe ricavarsi dal senso dell'espressione $a+bi$, che poco fa abbiamo supposto di aver precisato in modo da conservare validi per $a+bi$ i soliti teoremi dell'addizione. Naturalmente la nostra dimostrazione non sarebbe valida in generale, ma soltanto per quel particolare senso, da noi stabilito, dei numeri complessi, della loro somma e del loro prodotto.

Orbene, poiché, se n e α sono reali, non entra piú nella nostra formula di $\cos(n\alpha)$ l'unità immaginaria i, si è cercato di concludere: è dunque completamente indifferente che i rappresenti un secondo, o un millimetro, o un altro oggetto qualsiasi, purché valgano per esso le nostre solite regole di addizione e di moltiplicazione; queste sole hanno importanza; tutto il resto non deve affatto preoccuparci. Rispondo: è forse possibile stabilire in modo diverso il significato di $a+bi$, della somma e del prodotto, facendo sempre in maniera che le anzidette regole continuino a valere; non è tuttavia indifferente che si possa in generale scoprire un qualche senso siffatto per questa espressione.

102. Il puro e semplice esigere che una certa operazione debba risultare eseguibile, non equivale ancora ad averla resa realmente eseguibile Spesso si agisce come se la pura e semplice esigenza equivalesse già al soddisfacimento di essa. Si esige che la sottrazione,[1]

[1] Cfr. Kossak, *op. cit.*, p. 17.

la divisione, l'estrazione di radice risultino sempre eseguibili, e si ritiene con ciò di aver fatto abbastanza. Ma, allora, perché non pretendere che per tre punti arbitrari passi sempre una retta? Perché non esigere che per un sistema di numeri complessi a tre dimensioni valgano tutte le solite regole di addizione e di moltiplicazione, proprio come i numeri reali? Evidentemente, perché queste ultime due pretese contengono una contraddizione. Prima di affermare che quelle altre esigenze sono soddisfatte, si dimostri dunque che anche in esse non è contenuta alcuna contraddizione. Fin quando non si sarà compiuta una tale dimostrazione, tutto il rigore di cui tanto si parla, non potrà essere che mera parvenza.

In un teorema geometrico non compare la linea ausiliaria che deve venir tracciata per la sua dimostrazione. Forse, di queste linee ne sono possibili molte, potendosi per esempio scegliere ad arbitrio un punto di esse. In questo caso, per quanto ogni singola linea possa risultare non necessaria, è chiaro però che la forza dimostrativa del teorema dipende in modo ineliminabile dal fatto che si possa in qualche maniera tracciare una linea del tipo richiesto. Il puro e semplice esigere che si tracci una tal linea, non basta.

Lo stesso accade anche per il teorema accennato nel paragrafo 101; per la sua dimostrazione non è indifferente che "$a+bi$" abbia un senso o sia una pura e semplice macchia d'inchiostro. Non basta, in vista di essa, esigere che "$a+bi$" abbia un senso, o asserire che questo senso è costituito dalla somma di a e di bi; per poter parlare della somma di a e di bi occorre prima spiegare che cosa significhi in questo caso il termine somma e giustificare l'uso dell'articolo determinativo.

103. La spiegazione dei numeri complessi data da Kossak è soltanto un'indicazione di quella che può essere la loro definizione, e non evita l'intromissione di elementi estranei. La rappresentazione geometrica Contro la determinazione del senso di i, esaminata nei paragrafi precedenti, si possono senza dubbio elevare molte obiezioni. Con essa noi inseriamo nell'aritmetica qualcosa di completamente estraneo, il tempo. Non esiste alcuna relazione intrinseca fra il minuto secondo e i numeri reali. Qualora non si potesse trovare per i alcun altro senso, le proposizioni aritmetiche dimostrate per mezzo dei

numeri complessi risulterebbero (salvo a scoprire un modo diverso di dimostrarle) dei giudizi a posteriori, o, comunque, sintetici. E invece sappiamo che, per prima cosa, occorre sempre che si tenti di provare il carattere analitico di tutte le proposizioni aritmetiche.

Allorquando Kossak,[1] riferendosi al numero complesso, scrive "Esso è la rappresentazione composta di gruppi eterogenei di elementi, ove gli elementi di ciascun gruppo sono fra loro eguali",[2] sembra, a prima vista, che egli riesca con ciò a evitare l'intromissione di elementi estranei nell'aritmetica. Questa parvenza deriva però soltanto dall'indeterminatezza dell'espressione da lui usata. Tale espressione non risponde infatti alla domanda, che cosa significhi propriamente $1+i$; denota forse la rappresentazione di una mela e di una pera, o quella del mal di denti e della podagra? Tutte e due contemporaneamente non può denotarle, poiché, altrimenti, $1+i$ non sarebbe sempre eguale a $1+i$. Si risponderà: ciò dipende dalla convenzione speciale, fatta all'inizio della teoria. Dunque, ne concludo, noi non abbiamo nemmeno nella spiegazione di Kossak una vera e propria definizione del numero complesso: essa ci offre soltanto una direzione, in cui potremo trovarla. Ma noi abbiamo, in realtà, bisogno di qualcosa di piú preciso: dobbiamo sapere esattamente che cosa significhi "i". Seguendo quella direzione, nulla ci impedirebbe di asserire che "i denota una pera"; e queste parole finirebbero di introdurre di nuovo, come già facevano le teorie poco fa criticate, qualcosa di estraneo nell'aritmetica.

Ciò che si suol chiamare rappresentazione geometrica dei numeri complessi ha, rispetto ai tentativi finora esaminati, per lo meno questo vantaggio: che nella rappresentazione geometrica 1 ed i appaiono non completamente senza rapporto reciproco e di genere non del tutto diverso fra loro. Infatti il segmento che si assume come immagine di i sta in una relazione ben determinata col segmento immagine di 1. A voler essere rigorosi, non si può del resto affermare nemmeno qui che 1 significhi un certo segmento, e i significhi un altro segmento perpendicolare ad esso: il numero 1 significa, qui come altrove, sempre

[1] KOSSAK, *op. cit.*, p. 17.

[2] Sul termine "rappresentazione" si ricordi quanto fu esposto nel paragrafo 27; per il significato della parola "gruppo" si ricordi invece quanto venne detto nei paragrafi 23 e 25 a proposito del termine "aggregato"; sull'uguaglianza degli elementi si ricordino infine i paragrafi 34 e 39.

la stessa cosa.[1] Un numero complesso ci indica, nella rappresentazione geometrica, in qual modo il segmento, che vale come sua immagine, provenga da un determinato segmento (segmento unitario) per moltiplicazione, divisione e rotazione.[2] In conclusione però ogni teorema che debba venir dimostrato facendo ricorso ai numeri complessi risulta — anche ora — di carattere sintetico perché risulta fondato sull'intuizione geometrica.

104. INNANZI A UN NUOVO TIPO DI NUMERI, L'IMPORTANTE È STABILIRE ESATTAMENTE IL SENSO DI UN GIUDIZIO CON CUI POSSANO VENIR RICONOSCIUTI

Per qual via dovranno dunque esserci dati i numeri fratti, gli irrazionali e i complessi? Se per definirli facciamo appello all'intuizione introduciamo con ciò nell'aritmetica qualcosa di estraneo. Se invece ci limitiamo a determinare il concetto di ogni nuovo numero per mezzo delle sue note caratteristiche, se ci limitiamo a esigere che il numero definito abbia certe proprietà, allora nulla ci garantisce che qualche oggetto cada davvero sotto il concetto di nuova formazione e corrisponda alle condizioni da noi richieste; eppure le dimostrazioni dei teoremi aritmetici devono proprio appoggiarsi sull'esistenza di tali oggetti. Per uscire da questa difficoltà, cominciamo a domandarci che cosa avviene coi numeri naturali. È o non è possibile parlare del numero $1000^{1000^{1000}}$, prima che altrettanti oggetti ci vengano dati nell'intuizione? Dovremo dire che, fin quando non si ottiene una tal intuizione, questo numero è un puro segno vuoto di senso? No. Esso ha un senso perfettamente determinato, sebbene risulti psicologicamente impossibile, relativamente alla brevità della nostra vita, portare nella nostra coscienza un cosí gran numero di oggetti;[3] il numero $1000^{1000^{1000}}$ è un oggetto di cui possiamo conoscere assai bene le proprietà, per quanto non sia intuitivo. Di questo ci assicurano le regole per le potenze, dalle quali si ricava che a^n esprime sempre uno e un solo numero positivo, se a e n sono interi positivi. Sarebbe troppo lungo esporre in tutti i particolari come ciò possa accadere. Ad ogni modo il metodo con

[1] [I due segmenti accennati costituiscono soltanto una immagine di 1 e di i; non costituiscono il loro significato.]

[2] Per semplicità, prescindo qui dai segmenti incommensurabili.

[3] Un calcolo approssimativo mostra che, a tale scopo, non basterebbero milioni di anni.

cui nel paragrafo 74 abbiamo spiegato lo zero, nel paragrafo 77 l'uno, nel paragrafo 84 il numero ∞_1, e l'accenno alla dimostrazione del teorema che, nella successione serie dei numeri naturali, ogni termine è immediatamente seguito da un altro (§ 82 e § 83), ci indicheranno in generale come si debba procedere per introdurre nuovi numeri.

Come nella definizione dei numeri naturali, anche in quella delle frazioni, dei numeri complessi, ecc. il punto piú importante sarà questo: cercare un contenuto giudicabile, che si possa trasformare in un'equazione fra due membri, ciascuno dei quali sia proprio costituito dai nuovi numeri. In altre parole: noi dovremo stabilire esattamente il senso di un giudizio con cui tali numeri possano venir riconosciuti.

In tutto ciò bisognerà tenere ben presenti le difficoltà, che già una volta abbiamo esaminate (§§ 63-68), insite nell'anzidetta trasformazione. Procedendo esattamente come nei paragrafi citati, si troverà che i nuovi numeri si presentano, essi pure, come estensioni di concetti.

105. IL FASCINO DELL'ARITMETICA RISIEDE NEL SUO CARATTERE DI RAZIONALITÀ La concezione, ora accennata, dei numeri,[1] mi sembra possa spiegarci facilmente qual è l'origine del fascino che l'aritmetica e l'analisi esercitano su chi le studia. Modificando una nota affermazione, si potrebbe dire: il vero e proprio oggetto della ragione è la ragione. Ebbene, studiando l'aritmetica, noi ci occupiamo proprio di oggetti, i quali non si presentano a noi come qualcosa di estraneo, come oggetti conoscibili solo dal di fuori per mezzo dei sensi, ma come oggetti che sono dati direttamente alla nostra ragione, oggetti che essa può scrutare fin nelle piú profonde intimità, poiché le appartengono integralmente.[2]

Eppure, malgrado questo loro carattere razionale, anzi proprio a cagione di esso, gli oggetti dell'aritmetica non sono chimere soggettive. Tutt'al contrario: non vi è nulla di piú oggettivo che le leggi dell'aritmetica.

[1] Si potrebbe dire che anch'essa è una concezione formale. Però è completamente diversa da quella indicata con questo stesso nome nelle pagine precedenti.

[2] Non voglio con ciò negare che, senza impressioni sensoriali, noi saremmo totalmente stolidi e non sapremmo nulla nè di numeri né di alcun altro argomento; ma questa constatazione di carattere psicologico non ci riguarda. Ancora una volta insisto su ciò, a causa del continuo pericolo di confondere fra loro due problemi, per principio tanto diversi.

106. SGUARDO RETROSPETTIVO Prima di terminare, gettiamo ancora, brevemente, uno sguardo retrospettivo al corso della nostra ricerca.

Per prima cosa abbiamo stabilito che il numero non è un aggregato di oggetti, né una proprietà di qualcuno di essi; e d'altra parte esso non è nemmeno il risultato di un processo psichico. L'attribuzione di un numero asserisce qualcosa di oggettivo intorno a un concetto.

In seguito abbiamo tentato di definire i numeri 0 e 1, e di spiegare in che consista il procedere da un termine all'altro nella successione dei numeri naturali.

Il primo tentativo è fallito, perché in esso abbiamo soltanto definito un'affermazione intorno a concetti, contenente come sue parti lo 0 e l'1, e non abbiamo definito invece lo 0 e l'1 presi in sé stessi. Ciò aveva come conseguenza che non saremmo stati mai in grado di dimostrare l'uguaglianza fra i numeri.

Si è mostrato poi che il numero, di cui si occupa l'aritmetica, non va riguardato come un attributo (che dipende per sua natura da qualche cosa di altro da sé) ma come un sostantivo.[1]

Il numero è apparso pertanto come un oggetto riconoscibile, anche se non fisico, né spaziale, e anche se la nostra fantasia non riesce a procurarci alcuna immagine di esso.

A tal proposito abbiamo stabilito il principio fondamentale, che il significato di una parola non va spiegato considerando questa parola isolatamente, ma considerandola nel contesto di una proposizione. Solo in conseguenza di questo principio è possibile evitare la concezione fisica del numero senza cadere in quella psicologica.

Vi è soltanto un tipo di proposizioni che devono avere un senso per qualsiasi oggetto; sono queste le proposizioni che esprimono un riconoscimento. Per il caso dei numeri, tali proposizioni portano i nomi di uguaglianze. Anche l'attribuzione di un numero — come abbiamo visto — va concepita come un'uguaglianza.

Fu quindi della massima importanza stabilire il senso di un'uguaglianza numerica ed esprimerlo senza far uso di termini numerici o della

[1] La differenza fra attributo e sostantivo corrisponde alle differenza fra l'aggettivo "azzurro" e il sostantivo "colore del cielo".

parola "numero". La possibilità di far corrispondere biunivocamente gli oggetti che cadono sotto un concetto *F* a quelli che cadono sotto un concetto *G* venne considerata come contenuto di un giudizio di riconoscimento di numeri. La nostra definizione dovette dunque porre tale possibilità come avente lo stesso significato di un'uguaglianza numerica. E, per essere piú chiari, menzionammo casi analoghi: la definizione della direzione di una retta per mezzo del parallelismo, la definizione della forma di una figura per mezzo della similitudine, ecc.

Si è posto poi il seguente problema: in quali occasioni si ha il diritto di concepire un contenuto come contenuto di un giudizio di riconoscimento? La risposta è stata: si ha tale diritto quando è possibile sostituire, in qualsiasi giudizio, un membro dell'uguaglianza in esame con l'altro, senza che abbia per ciò a variare la verità di quel giudizio. Ora, nessuna affermazione è piú nota — senza che si debbano aggiungere ulteriori definizioni — che l'affermazione che i due membri dell'uguaglianza considerata sono uguali. Si rivelò quindi necessaria una cosa sola: dimostrare l'anzidetta sostituibilità in un'uguaglianza.

Vi rimase però ancora un dubbio. È chiaro che una proposizione di riconoscimento deve possedere sempre un senso. Orbene: se noi interpretiamo come un'uguaglianza la possibilità di porre una corrispondenza biunivoca fra gli oggetti che cadono sotto *F* e quelli che cadono sotto *G* (dicendo a tale scopo "Il numero spettante al concetto *F* è uguale al numero che spetta al concetto *G*" e introducendo cosí l'espressione "il numero che spetta al concetto *F*"), allora si vede che otteniamo un senso per l'uguaglianza presa in esame soltanto se i suoi due membri presentano la forma ora menzionata. Dunque, stando alla nostra definizione, non potremmo giudicare la verità o falsità di una certa uguaglianza, allorchè uno solo dei suoi due membri presentasse la forma anzidetta.

Tutto ciò ci ha condotti alla seguente definizione:

Il numero, che spetta al concetto *F*, è l'estensione del concetto "ugualmente numeroso ad *F*"; ove si sia convenuto di asserire che il concetto *F* risulta ugualmente numeroso al concetto *G*, quando sussista l'anzidetta possibilità di far corrispondere in modo biunivoco gli oggetti che cadono sotto di essi.

In questa definizione si presuppone conosciuto il senso dell'espressione "estensione del concetto".

Il nostro modo si superare la difficoltà or ora esposta non troverà certo un consenso generale; ed è probabile che qualcuno preferirà superarla in altra maniera. Io stesso non attribuisco alcuna importanza decisiva al fatto che si invochi proprio l'estensione di un concetto.

Rimaneva ancora da spiegare la corrispondenza biunivoca. Noi l'abbiamo ricondotta a rapporti puramente logici.

In seguito, dopo aver accennato alla dimostrazione del teorema "il numero spettante al concetto F è eguale al numero spettante al concetto G, se F e G sono fra loro ugualmente numerosi", abbiamo definito lo 0, poi abbiamo definito l'espressione "n segue immediatamente m nella successione dei numeri naturali", e infine abbiamo definito l'1, mostrando che nella successione dei numeri naturali 1 segue immediatamente a 0.

Ciò fatto, abbiamo citato alcune proposizioni che — da chi sia giunto al nostro punto — si lasciano dimostrare senza difficoltà. Abbiamo esaminato poi un po' piú da vicino l'importante teorema da cui risulta l'infinità della successione numerica:

"Ad ogni numero ne segue un altro nella successione dei numeri naturali."

Per provare tale teorema abbiamo dovuto risalire al concetto di "appartenente alla successione dei numeri naturali che ha termine con n"; e abbiamo dimostrato per sommi capi che il numero spettante a una successione siffatta segue immediatamente n nella successione dei numeri naturali. Allo scopo di definire il concetto ora accennato, abbiamo fatto appello al "seguire di un oggetto y a un oggetto x in una φ-successione generica". Anche il senso di questa espressione, come già quello di altre precedenti, è stato ricondotto a rapporti puramente logici. Cosí siamo riusciti a giustificare, riconducendolo a metodi generali di deduzione logica, il ragionamento da n ad $(n+1)$, che è comunemente riguardato come caratteristico per la matematica.

Per dimostrare l'infinità della successione numerica, è stato sufficiente un ultimo teorema: che nessun numero finito segue sé stesso

nella successione dei numeri naturali. E siamo cosí giunti ai due concetti di numero finito e di numero infinito.

Abbiamo mostrato infine che il numero infinito non è, in fondo, qualcosa di meno logico del numero finito. E vennero citati, per confrontarli col nostro numero infinito, i numeri infiniti di Cantor, e il suo concetto del "seguirsi in una successione". A tal proposito si accennarono le diversità di nomenclatura fra la teoria di Cantor e la mia.

Da tutto quanto era stato precedentemente esposto si è concluso che, molto probabilmente, le verità aritmetiche sono di natura analitica e a priori. Siamo arrivati in tal modo a una correzione della teoria di Kant. Abbiamo visto poi che cosa manca ancora per trasformare quella probabilità in certezza, e abbiamo indicato la via che deve condurci a tale trasformazione.

Infine ci siamo avvalsi dei precedenti risultati per la critica delle teorie formali dei numeri negativi, fratti, irrazionali e complessi: essa ha messo in luce l'insufficienza di tali teorie. I loro due fondamentali errori sono risultati essere questi: che esse ammettono come provata la non contraddittorietà di un concetto quando in esso non si incontra di fatto alcuna contraddizione, e che interpretano la non contraddittorietà di un concetto quale garanzia sufficiente per l'esistenza di qualche oggetto in esso contenuto. Queste teorie suppongono che basti porre con esattezza delle pretese, risultando poi di per sé evidente che tali pretese debbano trovarsi soddisfatte. Chi condivide simile punto di vista, attribuisce a sé stesso un potere divino, ritenendo di poter creare, con la sola sua parola, ciò di cui ha bisogno.

Abbiamo dovuto anche biasimare che la pura indicazione di una definizione venga talvolta spacciata essa stessa come vera e propria definizione. E abbiamo visto che, sviluppando quell'indicazione, si può non di rado pervenire a introdurre nell'aritmetica qualcosa di estraneo, sebbene tale indicazione sembri senza dubbio libera da questo difetto (ma proprio perché essa indica soltanto la via della definizione, senza definire in realtà nulla).

Cosí è risultato che le teorie formali possono incorrere nel pericolo di ricadere nell'a posteriori o per lo meno nel sintetico, per quanto esse

suscitino a prima vista l'impressione di librarsi fra le piú alte vette dell'astrazione.

La nostra trattazione dei numeri naturali ci ha mostrato invece la possibilità di evitare, anche nell'introduzione di nuovi tipi di numeri, tutti e due i pericoli anzidetti: quello di inserire nell'aritmetica oggetti a essa estranei, e in particolare intuizioni geometriche, e quello di cadere negli errori delle teorie formali. Tanto per i nuovi tipi di numeri quanto per i numeri naturali, l'essenziale è stabilire con esattezza il contenuto di un giudizio di riconoscimento. Se immaginiamo introdotti i nuovi tipi di numeri con tutte queste cautele critiche, allora i negativi, i fratti, gli irrazionali, e i complessi ci appariranno come qualcosa di altrettanto poco misterioso quanto i numeri naturali; e questi a loro volta ci appariranno come non aventi in sé nulla di piú effettivo, piú comprensibile, piú reale di quelli.

PARTE TERZA

SCRITTI VARI

1885-94

[Gli scritti contenuti in questa terza parte della nostra raccolta, eccezion fatta per la recensione a Cohen, apparsa nel 1885, appartengono tutti al periodo 1891-94, che può essere senza dubbio considerato il piú fecondo e felice per la produzione scientifica di Frege (a questo periodo appartiene anche (1893) il primo volume dei *Princípi*, per cui rimandiamo alla parte quinta).

Dei lavori qui presentati, l'articolo *Senso e significato*, del 1892, è senza dubbio il piú importante: la teoria del significato in esso prospettata rappresenta infatti uno dei contributi piú originali e interessanti che Frege abbia dato allo sviluppo posteriore della logica. D'altra parte, pur senza possedere un tale carattere d'originalità, i lavori rimanenti sono altrettanto significativi per un approfondimento e una puntualizzazione precisa del pensiero freghiano. La recensione a Cohen è da un lato un invito a una esposizione chiara e logicamente corretta, dall'altro un richiamo a una piú attenta considerazione dei concetti scientifici che possono venir posti a fondamento di indagini filosofiche. Anche la recensione a Cantor (1892), piú che toccare punti essenziali del pensiero matematico cantoriano, solleva la questione generale della definizione dei concetti matematici; e le critiche che Frege muove ai procedimenti definitori seguiti da Cantor nella sua opera sono sostanzialmente esatte. La recensione a Husserl (1894) — che abbiamo voluto inserire, oltre che per il suo valore intrinseco, anche in considerazione dell'accentuato interesse che in Italia circonda in questi ultimi anni il pensiero husserliano — porta invece un vigoroso attacco all'indirizzo psicologistico della logica, cui Husserl aderiva nel lavoro preso qui in esame da Frege. Le obiezioni contenute nell'efficacissima nota di Frege, concorreranno sensibilmente a determinare quella che Beth chiama la "conversione di Husserl". A un argomento direttamente collegato a quello svolto in tale recensione, Frege aveva già dedicato nel 1891 alcune pagine — qui riportate sotto il titolo di *Concetto e rappresentazione* — nel corso di un lungo articolo sul principio d'inerzia: in esse Frege esprime appunto l'esigenza di separare nettamente il concetto, di cui ribadisce la natura logica, dalla rappresentazione che, a suo parere, va invece ascritta alla psicologia. Infine *Oggetto e concetto*, del 1892, porta nuovi argomenti a favore della necessità di una rigorosa distinzione fra oggetto e concetto: questo tema, ripreso dai *Fondamenti* e qui ulteriormente sviluppato, è uno dei piú caratteristici

del pensiero freghiano, e si connette strettamente alla questione dell'esistenza degli enti matematici.

Il tenore critico-polemico comune alla maggior parte dei lavori sopra menzionati li innesta nella migliore tradizione critica di Frege — per intenderci, quella dei *Fondamenti* — per la serena obiettività delle polemiche, sempre condotte con misurate argomentazioni.]

1.

Concetto e rappresentazione

[Le seguenti pagine sono ricavate dall'articolo di Frege *Sul principio di inerzia*, dedicato all'esame dell'opera *L'evoluzione storica del concetto di movimento e il suo prevedibile risultato definitivo* [1] di Ludwig Lange. In esso il nostro autore, dopo una limpida analisi del problema scientifico della definizione del movimento, si eleva a considerazioni di carattere logico generale, criticando la dannosa abitudine (condivisa per l'appunto da Lange) di confondere fra loro concetto e rappresentazione e contrapponendo con chiarezza il carattere oggettivo del primo alla soggettività della seconda. Particolarmente importante l'affermazione che il concetto, nella sua realtà extra-mentale, non può trovarsi sottoposto ad alcuna evoluzione. Le pagine qui tradotte sono appunto quelle rivolte al problema logico.]

Possono trovare qui posto alcune osservazioni circa i due termini "concetto" e "rappresentazione".

Io credo che il primo vada preferibilmente assegnato alla logica. Questa infatti possiede senza dubbio il piú antico diritto sul termine "concetto" e ha bisogno di esso per poter enunciare le proprie leggi. A tale scopo la logica deve esigere dal concetto che risulti esattamente delimitato; non invece che risulti privo di contraddizioni.

Ciò che non rivela una precisa delimitazione non può venir riconosciuto in logica quale concetto, come in geometria non può venir riconosciuto quale punto ciò che non è privo di estensione (ché altrimenti non si potrebbero stabilire gli assiomi geometrici).

Lo scopo che, in qualunque scienza, deve guidarci alla formazione di una sua lingua tecnica, è di riuscire a enunciare le leggi di tale scienza nella forma piú semplice possibile e pure assolutamente esatta. Proprio

[1] [L. Lange, *Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffs und ihr voraussichtliches Endergebnis* (Engelmann, Lipsia 1886).]

da questo punto di vista, io debbo deplorare che il termine "concetto" venga oggi usato, assai spesso, in locuzioni che sono assolutamente incompatibili col suo senso logico.

Per il concetto logico rigorosamente inteso non esiste, a mio parere, alcuno sviluppo, alcuna storia, almeno nel senso che si è soliti attribuire a questi termini. Non posso quindi accordarmi con Lange nel ritenere che si debba assolutamente poter parlare di una evoluzione storica del concetto; ritengo anzi che vi siano motivi assai fondati per evitare questa locuzione. Mi sembra molto piú appropriato parlare di "storia dei tentativi per comprendere un concetto" o "storia della comprensione del concetto". Il concetto infatti è qualcosa di oggettivo, che non viene costruito per opera nostra, né si forma in noi; qualcosa che noi possiamo soltanto cercar di afferrare, e che dopo vari tentativi speriamo infine di riuscir davvero a comprendere se non abbiamo cercato erroneamente qualcosa dove non vi era nulla.

La proposizione "il numero 3 cade sotto il concetto di numero primo" costituisce una verità oggettiva. I pensieri che ci vengono in mente all'atto di enunciarla, non possono affatto venire cosí descritti: "Io trovo in me una rappresentazione che chiamo 'tre' e un'altra che chiamo 'numero primo', e queste stanno l'una con l'altra in una speciale relazione caratteristica. Bisogna poi stabilire se vi siano rappresentazioni simili anche negli altri uomini e se anche esse stiano nella relazione predetta. Non posso sapere a priori, ma dovrò determinare con l'esperienza, se la rappresentazione che chiamo 'numero primo' non si altererà a poco a poco in modo tale da non star piú con la rappresentazione 'tre' in quel rapporto caratteristico". Se pensassimo davvero a tutto ciò, ci lasceremmo palesemente sfuggire in modo completo il senso effettivo della proposizione "Il numero 3 cade sotto il concetto di numero primo". Né le cose andrebbero meglio qualora dicessimo "mi formo questi concetti", invece di "trovo in me queste rappresentazioni". Qui di nuovo noi accenneremmo infatti a un processo interno, a qualcosa che si svolge in noi. Ciò che si intende asserire con l'anzidetta proposizione è invece qualcosa di completamente indipendente dalla circostanza che noi vegliamo o dormiamo, viviamo o no; qualcosa che vale e varrà oggettivamente sempre, non importando se esistono o esisteranno esseri che riconoscono o no questa verità.

Il Lange pensa che "un concetto ancora capace di svilupparsi sia, per propria natura, non immune da contraddizioni interne; ché, se ne fosse davvero immune, non rimarrebbe alcun motivo per un suo ulteriore sviluppo". Questa osservazione mi sembra completamente falsa. Una contraddizione insita in un concetto non costituisce affatto un motivo per il suo sviluppo. Per esempio, il concetto "disuguale da sé stesso" contiene una contraddizione, e ciò malgrado rimane quel che è e quel che è sempre stato, né accenna affatto a mutarsi. Esso deve venir riconosciuto a buon diritto come concetto logico, perché la sua delimitazione è tanto precisa quanto si vuole; e di fatto può venir utilmente usato per la definizione del numero zero, come mostrai nel mio libro sui fondamenti dell'aritmetica.[1]

Anche nel caso del movimento non sono contraddizioni insite nel suo concetto quelle che ci spingono a trasformarlo. Certamente si rivelarono in esso contraddizioni, ma non perché nella definizione del movimento risultino riunite caretteristiche che si contraddicono a vicenda, bensí perché si è considerato come concetto qualcosa che a rigore logico non lo è, mancando di una precisa delimitazione. Si cercava una linea di demarcazione, e si comprese, a causa delle contraddizioni che ne sorgevano, che i confini supposti erano incerti e confusi e comunque non erano quelli cercati.

Furono certamente le contraddizioni a spingere innanzi lo spirito ricercatore; ma non contraddizioni insite nel concetto, poiché queste portano sempre con sé una delimitazione precisa (si sa invero che nulla cade sotto un concetto contraddittorio, e non è neanche possibile dubitare, appena riconosciuta la sua contraddizione, che qualcosa cada o no sotto di esso); ciò che ci spinge innanzi è il percepire che vi è una delimitazione confusa.

Cosí, anche nel caso del movimento, tutti gli sforzi furono diretti a cercare una delimitazione precisa del suo concetto. Ed oggi si può ben dire che essi risultarono vani, perché non esiste alcuna linea di demarcazione là dove la si cercava. Se ne è quindi scoperta un'altra, non fra moto e quiete, ma fra moto inerziale e quiete inerziale, e a

[1] *Fondamenti*, § 74 [in questo volume pp. 314 sgg.].

Lange spetta il merito di avere per primo tracciato chiaramente questa linea di confine.

Come non concordo con l'autore esaminato sull'uso del termine "concetto", cosí non posso dichiararmi d'accordo con lui sull'uso del termine "rappresentazione". Mentre il primo va attribuito alla logica, il secondo va utilmente attribuito alla psicologia. Con ciò, invero, si rimane nel piú stretto contatto non soltanto con l'uso della lingua comune, ma anche con l'origine psicologica di quel termine.

Quando diciamo "mi rappresento qualcosa", noi pensiamo a un processo spirituale interno e intendiamo per rappresentazione una immagine interna. Perciò non si dovrebbe mai, nella fisica, nella matematica, nella logica, usare il termine "rappresentazione", o tutt'al piú si dovrebbe parlare di esso per ripudiarlo come non idoneo. La fisica, per esempio, ha a che fare con corpi e come tutte le scienze anche con concetti, non però con rappresentazioni: queste vanno riservate alla psicologia.

Non si dovrebbe mai propriamente parlare in termini scientifici di una rappresentazione, senza specificare chi se la rappresenti, chi la possegga. E infatti la rappresentazione dell'uno è cosí poco identica a quella dell'altro, come il naso dell'uno non è quello dell'altro anche se sono congruenti. L'usare senz'alcun riferimento il termine "rappresentazione" è, da un punto di vista scientifico, cosí condannabile come usare senz'alcun riferimento il termine "moto".

2.

Oggetto e concetto

[In una serie di otto lunghi articoli, pubblicati sulla rivista di Avenarius, "Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie", e dedicati al problema dell'intuizione e della sua elaborazione psichica,[1] il professor Benno Kerry aveva avuto occasione di esporre e criticare qua e là il punto di vista logico di Frege. Appena terminata la pubblicazione dell'ultimo articolo, il nostro autore gli rispose sulla stessa rivista con la nota che viene qui quasi integralmente tradotta.

Essa può riguardarsi come un'appendice all'opera sui fondamenti dell'aritmetica, tradotta nella parte seconda di questo volume, poiché ne illustra e chiarisce alcune pagine di particolare difficoltà e ne mette in evidenza il significato e il valore logico. È sopra tutto utile per comprendere chiaramente la *teoria del concetto*, che costituisce uno dei punti piú originali e fondamentali del pensiero di Frege.

Mentre in altri scritti il concetto viene esaminato sotto aspetti piú filosofici, sopra tutto per quanto riguarda il suo carattere sopra-soggettivo, antipsicologistico, antistorico, questa nota lo esamina invece sotto un aspetto prettamente logico, e cioè per quel carattere che fornisce al concetto una sua consistenza specifica, inconfondibile: vogliamo dire il carattere *predicativo*.

Data la sua forma di appendice, l'articolo è composto di varie glosse e osservazioni tutte egualmente notevoli e tutte straordinariamente sottili. Nessun paragrafo quindi può riguardarsi come centrale e nessuno come secondario; volendo a ogni costo fare una graduatoria fra essi, possiamo dire che i piú importanti sono i primi tre, e il piú notevole per chiarezza e sottigliezza il terzo.

La lettura di *Oggetto e concetto* chiarirà come esso costituisca il vero e proprio anello di congiunzione fra le idee e i metodi dei *Fondamenti dell'aritmetica* e quelli delle opere posteriori: in ispecie quelli contenuti nell'importante articolo *Senso e significato*, inserito come terzo scritto in questa terza parte.]

1. La parola "concetto" viene usata in sensi diversi, ora in senso psicologico, ora in senso logico, e ora in un senso misto assai poco

[1] [B. KERRY, *Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung.*]

chiaro. Questa libertà trova la sua naturale limitazione nell'esigenza che, una volta accettato un senso, ci si mantenga fermi a esso. Per soddisfarvi, io ho deciso di attenermi rigorosamente a un uso puramente logico.

Lascerò da parte come meno essenziale il problema se sia piú idoneo questo o un altro uso. Ci si intenderà piú facilmente sulla scelta dei termini, una volta che si sarà riconosciuta l'esistenza di qualcosa che merita una denominazione speciale.

Mi sembra che i malintesi di Kerry provengano dal fatto che egli confonde involontariamente il suo col mio modo di usare il termine "concetto". Ne seguono facilmente contraddizioni, delle quali io non posso venir considerato colpevole.

Kerry combatte ciò che egli chiama la mia definizione del concetto. Io vorrei però obiettargli subito che la mia spiegazione non va pensata come una vera e propria definizione. Non si può pretendere dal logico che definisca tutto, come non si pretende dal chimico che decomponga ogni sostanza. Gli elementi chimici non possono venir decomposti, e cosí non può, a rigore, venir definito ciò che è logicamente semplice. Pur non essendo decomponibili, tali elementi non costituiscono tuttavia ciò che si presenta per primo nella ricerca scientifica. Cosí ciò che è logicamente semplice non coincide con quello che ci viene dato a priori: esso pure, come gli elementi chimici, rappresenta piuttosto una conquista della nostra elaborazione. Orbene, una volta che si è trovato qualcosa di semplice, o almeno qualcosa che debba valere come semplice rispetto al resto, bisognerà — per designarlo — coniare un qualche nuovo nome, non avendo originariamente la lingua alcuna espressione che serva in modo esatto a questo scopo. In tal caso non si potrà fare altro, se non guidare con cenni il lettore o l'uditore a comprendere mediante quella parola ciò che noi abbiamo pensato.

Kerry non vuol considerare come assoluta la differenza fra concetto e oggetto. Egli scrive: "Avevamo precedentemente espresso l'opinione che il rapporto fra contenuto del concetto e oggetto del concetto sia, per un certo lato, qualcosa di caratteristico e irriducibile; ciò non implica tuttavia che la proprietà di essere concetto e quella di essere oggetto si escludano a vicenda; questa opinione segue cosí poco dalla prima, come dal fatto che il rapporto fra padre e figlio è qualcosa di irriducibile,

non segue per nulla l'impossibilità di essere contemporaneamente padre e figlio (sebbene, com'è naturale, sia impossibile essere padre di quella stessa persona di cui si è figlio)."

Ebbene, prendiamo pure le mosse da questo paragone. Se esistessero degli esseri che fossero padri senza poter essere figli, è chiaro che essi risulterebbero di natura totalmente diversa dagli uomini, che sono figli. Proprio lo stesso ha luogo nel nostro caso. Il concetto — inteso nel senso che io attribuisco a questa parola — è predicativo,[1] mentre il nome di un oggetto non è assolutamente in grado di fungere da predicato grammaticale. Dunque fra essi vi è una differenza assoluta.

Il nostro ragionamento richiede qualche spiegazione per non sembrare falso.

Non si può forse dire altrettanto bene che un dato essere è Alessandro Magno o è il numero 4 o è il pianeta Venere, come si dice che è verde o che è un mammifero? Chi pensasse realmente cosí, mostrerebbe con ciò di non saper distinguere i vari modi nei quali viene usato il verbo "è". Negli ultimi due esempi esso funziona da copula, e può venire talvolta soppresso, trasformando in verbo il predicato nominale; si può dire per esempio "Il prato verdeggia" invece di dire "Il prato è verde". In tal caso affermiamo che l'oggetto considerato cade sotto un concetto, e che il predicato grammaticale denota questo concetto. Al contrario, nei primi tre esempi l' "è" viene usato, come nell'aritmetica il segno di "uguale", per esprimere un'uguaglianza.[2] Dicendo "La stella del mattino è Venere" abbiamo due nomi propri, "stella del mattimo" e "Venere", per denotare lo stesso oggetto. Trasformando la nostra proposizione in quest'altra "La stella del mattino è un pianeta", abbiamo invece un nome proprio "la stella del mattino" e il nome di un concetto "un pianeta". Linguisticamente non è accaduto nulla, salvo la sostituzione del termine "Venere" col termine "un pianeta"; realmente però la relazione è diventata completamente diversa.

Un'uguaglianza è una relazione invertibile; il cadere di un oggetto sotto un concetto è invece una relazione non invertibile. L' "è" della proposizione "La stella del mattino è Venere" non costituisce, come

[1] Costituisce, cioè, il significato di un predicato nominale.

[2] Uso il termine "uguale" e il segno "=", nel senso di "lo stesso che", "non altro che", "identico a".

risulta ovvio, una semplice copula, ma una parte essenziale del predicato; onde questo non è contenuto per intero nella parola "Venere".[1] Potrebbe dirsi in suo luogo "La stella del mattino non è altro che Venere", ove si esprime in quattro parole ciò che prima veniva detto con il semplice verbo "è". L' "è" dell'espressione "non è altro che" risulta questa volta davvero una copula. Ciò che viene predicato della stella del mattino non è "Venere", ma "non altro che Venere", e tale insieme di parole denota proprio un concetto. (Sebbene sotto di esso cada un unico oggetto, bisognerà, però tenerlo ben distinto da questo.[2])

Abbiamo dunque una parola, "Venere", che a rigore non può mai fungere da predicato, per quanto possa essere parte di un predicato. Ciò che essa significa [3] sarà perciò un oggetto, ma non mai un concetto. Sono certo che lo stesso Kerry non vorrà negare questo fatto. Mi sembra però che, riconoscendolo, si viene per forza ad ammettere una differenza molto notevole fra ciò che può comparire come oggetto e tutto il resto.

2. La differenza ora descritta non verrebbe nemmeno a scomparire se fosse vero — come pensa Kerry — che esistono concetti i quali possono anche risultare oggetti. Si danno in realtà dei casi che sembrano proprio confermare questa esistenza. Io stesso [4] ho accennato al fatto che un concetto può cadere sotto un concetto superiore, senza che questo loro rapporto vada confuso con la subordinazione dei concetti.

Kerry preferisce non appellarsi al mio esempio, ma ne dà un altro: "Il concetto 'cavallo' è un concetto facilmente costruibile". Egli pensa che il concetto "cavallo" sia qui un oggetto, e precisamente uno degli oggetti che cadono sotto la categoria "concetti facilmente costruibili". Giustissimo! Le tre parole "il concetto 'cavallo' " denotano davvero un oggetto, ma proprio perciò non denotano piú un concetto, nel senso da me attribuito a questo termine.

Ciò si accorda perfettamente con la regola, da me piú volte enunciata,[5] secondo cui l'articolo determinativo, usato al singolare, accenna sempre a un soggetto, mentre l'articolo indeterminativo accompagna le

[1] Si veda *Fondamenti*, § 66 e p. 304, n. 1.
[2] *Fondamenti*, § 51.
[3] [L'autore rinviava qui all'articolo — allora in corso di stampa — *Senso e significato.*]
[4] *Fondamenti*, § 53 in fine (p. 289).
[5] *Fondamenti*, § 51 (pp. 286-87); § 66 (p. 304, n. 1) e § 68 (p. 306, n. 1).

parole che denotano concetti. È vero che, secondo Kerry, non si possono stabilire regole logiche sulla base di distinzioni linguistiche; nessuno però che stabilisca tali regole, può evitare di fondarsi su distinzioni linguistiche proprio come faccio io, perché noi ci possiamo intendere gli uni con gli altri soltanto per mezzo della lingua, e siamo quindi costretti a ricorrere in ultimo alla fiducia che i nostri interlocutori intendano come noi le parole, le forme, e la struttura dei periodi.

Come già dissi, io non ho mai preteso, con la mia regola, di definire il concetto; ho voluto indicare soltanto ove esso si trovi, appellandomi a tal fine a quel che è il sentimento linguistico generale. E in ciò mi torna sommamente utile che la differenza linguistica si accordi cosí bene con quella effettiva.

Per quanto riguarda l'articolo indeterminativo non si hanno da registrare eccezioni alla mia regola, salvo qualche forma antiquata. Le cose non vanno invece cosí lisce per l'articolo determinativo, specie al plurale; ma, per l'appunto, la mia regola non si riferisce a questo caso. Al singolare la cosa può essere dubbia, a mio giudizio, esclusivamente quando il singolare sta per il plurale, come nelle proposizioni "Il turco assediò Vienna", "Il cavallo è un quadrupede". Questi però sono casi cosí speciali che non possono diminuirne il valore. È chiaro che, nella prima proposizione "il turco" è nome proprio di un popolo. Quanto poi alla seconda, il modo piú conveniente di intenderla è di vedere in essa l'espressione di un giudizio generale, e cioè "Tutti i cavalli sono quadrupedi" ovvero "Tutti i cavalli di costituzione normale sono quadrupedi"; su questo tipo di giudizio tornerò ancora fra poco.[1]

[1] Qualcuno si sentirà probabilmente indotto a esagerare le cose, affermando che due proposizioni linguistiche diverse non sono mai totalmente equivalenti, e che una parola non può mai venir tradotta con esattezza in un'altra lingua. Si potrebbe forse andar ancor oltre, affermando che la stessa parola non viene mai interpretata in modo esattamente identico nemmeno da due persone che parlano la medesima lingua. Non voglio qui discutere quanta verità risieda in questi asserti; ricorderò soltanto che, malgrado ciò, vi è non di rado qualcosa di comune in espressioni diverse (è per l'appunto quello che io chiamo "senso", e, nel caso delle proposizioni, "pensiero"). In altre parole: non può venir disconosciuto che si riesce a esprimere il medesimo senso (il medesimo pensiero) in modi diversi, la differenza dei quali riguarda soltanto l'intonazione, la colorazione del senso, e non il senso stesso, sicché non può interessare la logica. È possibilissimo che una proposizione non dià né piú né meno notizie di un'altra. Malgrado tutte le particolarità delle lingue, l'umanità ha tuttavia un tesoro di pensieri comuni. Se si volesse proibire ogni mutamento delle espressioni, con il pretesto che esso ne cambierebbe anche il contenuto, si finirebbe col paralizzare assolutamente la logica, poiché il compito della logica non può venir adempiuto, se non tentando di riconoscere il pensiero nelle sue molteplici forme. Anche ogni definizione dovrebbe venire ripudiata come falsa.

Se infine Kerry ritiene non calzante la mia regola, perché afferma che nella proposizione "Il concetto di cui sto ora precisamente parlando, è un concetto individuale" le prime otto parole denotano senza dubbio un concetto (malgrado l'articolo determinativo), gli risponderò che in questo modo egli dimostra di intendere la parola "concetto" in senso diverso dal mio, e perciò la contraddizione da lui notata non risiede nella mia regola. Nessuno potrà invero pretendere che il mio modo di esprimermi debba per forza accordarsi con quello di Kerry.

Non può venir disconosciuto che si ha certamente una inevitabile dissonanza linguistica, quando si afferma: il concetto "cavallo" non è un concetto;[1] mentre è pur vero, d'altra parte, che la città di Berlino è una città e il vulcano Vesuvio è un vulcano. La lingua si trova qui in una situazione forzata, la quale giustifica l'anomalia.

E del resto, che il nostro caso sia alquanto speciale, lo accenna Kerry medesimo, chiudendo fra virgolette il termine "cavallo". Non vi è invece alcun motivo per scrivere, tra virgolette, "Berlino" e "Vesuvio".[2] Nelle ricerche logiche si ha non di rado bisogno di affermare qualcosa di un concetto e di dare la forma comune a tali affermazioni, in modo cioè che esse risultino costituite di un soggetto e di un predicato. Allora ci si aspetterebbe che il significato del soggetto grammaticale fosse proprio il concetto in questione; questo però non può senz'altro apparire nella veste di soggetto a causa della sua natura predicativa. Prima deve venire trasformato in oggetto o, piú esattamente, deve venire rappresentato da un oggetto. Anteponendogli le parole "il concetto", noi intendiamo per l'appunto di rivolgerci a questo oggetto.

Cosí accade per esempio nella proposizione

"Il concetto 'uomo' non è vuoto."

In essa, le prime tre parole vanno concepite come costituenti un nome

[1] Un caso completamente analogo si presenta allorché — riferendoci alla proposizione "Questa rosa è rossa" — noi affermiamo: "Il predicato grammaticale 'è rossa' spetta al soggetto 'questa rosa'." Nel nostro asserto, le parole "il predicato grammaticale 'è rossa'" non costituiscono il predicato grammaticale, ma il soggetto. Proprio per il fatto che lo chiamiamo espressamente predicato, gli togliamo questa proprietà.

[2] [Il notevole significato logico delle virgolette venne — in questi ultimi anni — esaminato a fondo e posto in primissima luce da uno dei piú celebri seguaci della scuola viennese (si ricordi la nota 1 p. 257), Rudolf Carnap, nell'opera *Logische Syntax der Sprache* (Springer, Vienna 1934), trad. it. di A. Pasquinelli, *Sintassi logica del linguaggio* (Silva, Milano 1961).]

proprio,[1] che non può venir usato in forma predicativa, come non lo possono i due nomi "Berlino" e "Vesuvio".

Se diciamo:

"Gesú cade sotto il concetto di 'uomo' "

il predicato della nostra proposizione (prescindendo dalla copula) è "cadente sotto il concetto di 'uomo' "; esso significa la stessa cosa che "un uomo". Invece le parole "il concetto di 'uomo' " costituiscono soltanto una parte di tale predicato.

Contro la natura predicativa del concetto si potrebbe obiettare che, talvolta, si parla pure di un concetto del soggetto. Ma anche in tali casi, come per esempio nella proposizione

"Tutti i mammiferi hanno sangue rosso"

non può venir disconosciuta la natura predicativa[2] del concetto; è infatti lecito usare, in luogo di tale proposizione, una di queste altre:

"Gli esseri che sono mammiferi hanno sangue rosso",

"Se un essere è un mammifero, ha sangue rosso."

Quando scrissi i miei *Fondamenti dell'Aritmetica*, non avevo ancora stabilito la differenza fra senso e significato,[3] e perciò riunivo ancora nella sola espressione "contenuto giudicabile" ciò che ora distinguo con i due termini "pensiero" e "valore di verità". Ne segue che ora non posso piú sottoscrivere integralmente, parola per parola, quanto spiegai nei *Fondamenti* (§ 66), sebbene io rimanga ancora in sostanza della stessa opinione.

In breve, la mia opinione può ora venire cosí enunciata (ove intendo "predicato" e "soggetto" in senso linguistico): concetto è il significato di un predicato; oggetto invece è ciò che non può mai costituire tutto il significato di un predicato, ma può costituire tutto il significato di un soggetto.

Bisogna, a questo proposito, osservare che i termini "tutti", "ogni", "nessuno", "alcuno" precedono le parole indicanti concetti. Nelle

[1] Chiamo nome proprio un qualunque segno che denoti un oggetto.

[2] Ciò che chiamo, qui, natura predicativa del concetto è soltanto un caso speciale di quella "necessità di venir completato" ovvero "non saturazione", che indicai come proprietà caratteristica delle funzioni nel mio scritto *Funktion und Begriff* [Funzione e concetto] [Discorso tenuto nella seduta del 9 gennaio 1891 della Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft, Jena, 1891]. In esso non fu possibile evitare l'espressione "la funzione $f(x)$", e anche lì sorse la dissonanza che il significato di tale espressione non è una funzione.

[3] [Cfr. *Senso e significato.*]

proposizioni affermative e negative, particolari e generali, noi esprimiamo rapporti fra concetti. I termini anzidetti ("tutti", "ogni", ecc.), che indicano il tipo speciale di questo rapporto, non vanno però collegati alle parole immediatamente seguenti in modo piú stretto che non alle altre; essi vanno riferiti piuttosto all'intera proposizione. Lo si vede chiaramente allorché si cerca di negare la proposizione asserita.

Consideriamo per esempio la proposizione:

"Tutti i mammiferi vivono sulla terraferma."

Se il nesso di parole "tutti i mammiferi" ne costituisse il soggetto logico rispetto al predicato "vivono sulla terraferma", per negare l'intera proposizione sarebbe necessario negarne il predicato, dicendo "non vivono sulla terraferma". Sappiamo invece che, a tale scopo, bisogna premettere il "non" al termine "tutti". Se ne conclude che questo termine appartiene logicamente, non al soggetto, ma al predicato.

Al contrario se si tratta di negare la proposizione:

"Il concetto di 'mammifero' è subordinato a quello di 'vivente sulla terra' ",

bisognerà proprio negarne, anche grammaticalmente, il predicato; bisognerà dire cioè "non è subordinato...".

Le obiezioni di Kerry cadono già, per la massima parte, non appena si comprenda che, nel linguaggio da me adottato, le espressioni del tipo "il concetto *F*" non denotano piú un concetto. Non restano ora che da esaminare poche altre sue critiche.

Kerry pensa che io abbia identificato il concetto con l'estensione del concetto. Gli rispondo che ciò è erroneo. Io ho soltanto espresso l'opinione che, nell'asserto "il numero naturale che spetta al concetto *F* non è altro che l'estensione del concetto 'ugualmente numeroso a *F*' ", sia lecito sostituire le parole "estensione del concetto" con la parola "concetto". E si osservi bene che, nel nostro caso, la parola "concetto" è preceduta dall'articolo determinativo. L'opinione ora accennata costituisce, del resto, soltanto un'osservazione laterale su cui, nel mio libro, non è fondata alcuna conseguenza.

3. Ecco ora una questione piú importante.

Mentre, come abbiamo visto, Kerry non riesce a colmare l'abisso fra oggetto e concetto, qualcun altro potrebbe voler utilizzare al suo

medesimo scopo la mia stessa teoria. Egli potrebbe ricordare a tal fine quanto ho scritto nel paragrafo 46 dei *Fondamenti dell'Aritmetica*, e cioè che l'attribuzione di un numero contiene un'affermazione intorno a un concetto; e inoltre quanto ho scritto nel paragrafo 53, ove parlo di proprietà che vengono attribuite a un concetto e faccio cadere un concetto sotto un altro superiore. Infine potrebbe ricordare che io ho chiamato l'esistenza "proprietà di un concetto".

Per analizzare nel modo piú chiaro il mio pensiero, sarà opportuno fermarci su un esempio.

Nella proposizione

"C'è almeno una radice quadrata di 4"

non viene affermato proprio nulla né del numero 2 né del numero —2, ma di un concetto, cioè di "radice quadrata di 4", e precisamente viene affermato che esso non è vuoto Se invece esprimiamo lo stesso pensiero in quest'altra forma:

"Il concetto 'radice quadrata di 4' non è vuoto",

le prime sei parole "il concetto 'radice quadrata di 4' " costituiscono, come sappiamo, un oggetto, e questa volta è proprio su quest'oggetto che si afferma qualcosa. Ma si badi bene che la seconda affermazione non è identica alla prima. Ciò può risultare strano solo per chi disconosca che lo stesso pensiero può venire scomposto in piú modi, e quindi ora questo e ora quello possono comparire in esso come soggetto e come predicato.

Il puro e semplice pensiero non determina ciò che va preso in esso come soggetto. Se si dice "soggetto di questo giudizio", si indica con tali parole qualcosa di determinato unicamente se si specifica il modo di scomporre quel giudizio. Il piú delle volte lo si fa riferendosi proprio a un testo determinato. Non bisognerà però mai dimenticare che diverse proposizioni possono esprimere lo stesso pensiero. Cosí, il nostro pensiero di poco fa potrebbe anche venire interpretato come un'affermazione intorno al 4; prenderebbe allora la seguente forma:

"Il numero 4 ha la proprietà, che esiste qualche numero naturale il cui quadrato è 4."

La lingua dispone di vari mezzi per far apparire come soggetto ora questa ora quella parte del pensiero. Uno dei piú conosciuti è la riduzione della forma attiva in passiva. Non è quindi impossibile che lo

stesso pensiero si presenti, una volta sotto la veste di giudizio singolare, un'altra volta di giudizio particolare, e una terza di giudizio universale. Non dovremo dunque stupirci se la stessa proposizione può venire concepita come affermazione intorno a un soggetto e come affermazione intorno a un concetto; bisognerà badare soltanto al fatto che queste due affermazioni sono diverse.

È impossibile, nella proposizione "C'è almeno una radice quadrata di 4" sostituire la parola "una radice quadrata di 4" con le altre "il concetto 'radice quadrata di 4' "; e cioè l'affermazione in esame si addice al concetto, non all'oggetto.

Sebbene la nostra proposizione non faccia apparire il concetto nella funzione di soggetto, afferma però qualcosa intorno a esso. La si può interpretare come se esprimesse il cadere di un concetto sotto un altro superiore.[1]

È necessario tuttavia osservare che, con ciò, non viene affatto abolita la differenza fra oggetto e concetto. Ed invero, nella proposizione "C'è almeno una radice quadrata di 4" il concetto non rinnega per nulla la sua natura predicativa. È infatti possibile enunciare la stessa proposizione in quest'altra forma:

"C'è qualcosa che ha la proprietà di farci ottenere 4 se moltiplicata per sé stessa."

Di conseguenza non risulterà mai possibile affermare di un oggetto ciò che qui viene affermato di un concetto, poiché un nome proprio non può in nessun caso esprimere un predicato, ma soltanto una parte di esso. E si badi bene: non intendiamo dire che sia falso affermare di un oggetto ciò che qui viene affermato di un concetto; intendiamo dire qualcosa di piú: è impossibile affermarlo, è privo di senso.

Per esempio la proposizione

"C'è Giulio Cesare"

non è né vera né falsa, ma priva di senso. Ha invece un senso la proposizione

"C'è un uomo di nome Giulio Cesare",

[1] Concetti di tale tipo vennero da me chiamati "di secondo ordine" nel paragrafo 53 dei *Fondamenti dell'aritmetica*, e "di secondo grado" nello scritto *Funzione e concetto*.

in cui compare di nuovo un concetto, come risulta dall'articolo indeterminato.[1]

Se viceversa nella proposizione

"Il concetto 'radice quadrata di 4' non è vuoto"

sostituiamo, in luogo del nome proprio costituito dalle prime sei parole, il nome proprio "Giulio Cesare", otteniamo una proposizione che è falsa ma fornita di senso. (Essa è falsa, perché il "non esser vuoto" — nel senso in cui questa espressione è stata da me usata — può venir affermato soltanto di oggetti di un tipo speciale; cioè di quelli che possono venir denotati con nomi propri della forma "il concetto *F*").

Le parole "il concetto 'radice quadrata di 4' " si comportano dunque, rispetto alla loro sostituibilità, in modo essenzialmente diverso dalle parole "una radice quadrata di 4"; e cioè: i significati di questi due complessi di parole sono essenzialmente diversi.

Ciò che venne qui mostrato in un esempio, vale in generale: il concetto si comporta in modo essenzialmente predicativo, anche allorché noi affermiamo qualcosa intorno ad esso; pure in questi casi dunque non può venir sostituito da un oggetto ma solo da un altro concetto. L'affermazione che si fa intorno ad un concetto non può quindi venire ripetuta per un oggetto.[2]

I concetti di secondo grado sotto cui cadono concetti, sono essenzial-

[1] Lo stesso accade nel famoso ritornello "Esiste soltanto una Vienna" (*Es gibt nur ein Wien*). Qui non dobbiamo lasciarci ingannare dal fatto che la lingua usa lo stesso vocabolo talvolta come nome proprio, talaltra come nome di concetto. Il numerale mostra che si tratta, nel ritornello considerato, di questo secondo caso. "Vienna" è qui nome di concetto, come "città imperiale"; in questo senso si può dire "Trieste non è una Vienna".

[2] [Il pensiero di Frege potrebbe, in termini piú moderni, venire cosí espresso: le funzioni proposizionali (cioè le espressioni incomplete che, completate, dànno luogo a una proposizione) si distinguono in due categorie fra loro totalmente diverse: funzioni proposizionali che vanno completate con un nome di concetto e funzioni proposizionali che vanno completate con un nome di oggetto. Se noi prendiamo una funzione proposizionale della prima categoria, per esempio "c'è..." e la com pletiamo con un nome di concetto, potremo ottenere proposizioni vere ("C'è un mammifero", "C'è una radice quadrata di 4", "C'è un uomo di nome Giulio Cesare") o delle proposizioni false ("C'è un circolo quadrato"), ma sempre proposizioni fornite di senso. Se invece cerchiamo di completarla con un nome di oggetto, otteniamo proposizioni prive di senso (per esempio "C'è Giulio Cesare"). Proprio il contrario accade prendendo una funzione proposizionale della seconda categoria; prendendo per esempio la funzione proposizionale "...è vuoto" o "...non è vuoto". Se la completiamo con un nome di oggetto, essa darà luogo a proposizioni vere ("Il concetto 'radice quadrata di 4' non è vuoto") o false ("Il concetto 'circolo quadrato' non è vuoto", "Giulio Cesare non è vuoto"), ma sempre fornite di senso. Se, invece, la completiamo con un nome di concetto, essa darà luogo a una proposizione priva di senso ("Un mammifero non è vuoto").]

mente diversi da quelli di primo grado sotto cui cadono oggetti.[1] Il rapporto fra un oggetto e un concetto di primo grado (sotto cui cade tale oggetto) è diverso, sebbene simile, dal rapporto che intercede fra un concetto di primo e uno di secondo grado. Per mettere in luce tanto la somiglianza quanto la differenza fra i due rapporti, potremmo forse usare le seguenti espressioni: un oggetto cade *sotto* un concetto di primo grado, e un concetto di primo grado cade *entro* uno di secondo grado.

La differenza fra concetto ed oggetto sussiste in ogni caso con tutta la sua rigidezza.

4. A quanto ora detto si connette ciò che ho scritto nel paragrafo 53 dei *Fondamenti dell'aritmetica* circa l'uso da me adottato dei due termini "proprietà" e "nota caratteristica". Le osservazioni di Kerry mi inducono a tornare ancora una volta su tale argomento. I due termini anzidetti servono a designare dei rapporti nelle proposizioni di uno dei seguenti due tipi: "Φ è proprietà di Γ" e "Φ è nota caratteristica di Ω". Orbene: secondo il linguaggio da me adottato, qualcosa può essere contemporaneamente proprietà e nota caratteristica, ma non dello stesso ente.

Chiamo proprietà di un oggetto i concetti sotto i quali esso cade; di modo che

"L'essere Φ costituisce una proprietà di Γ"

e

"Γ cade sotto il concetto Φ"

rappresentano per me due espressioni diverse dello stesso fatto.

Un po' piú lungo è spiegare che cosa io intenda per "nota caratteristica". Se l'oggetto Γ ha le proprietà Φ, X, Ψ, posso sintetizzare queste tre proprietà nell'unica proprietà Ω intendendo che risulti lo stesso affermare

"Γ gode di Ω"

oppure

"Γ gode simultaneamente di Φ, X, Ψ."

In questa ipotesi io chiamo "note caratteristiche del concetto Ω" le

[1] [La distinzione fra concetti di gradi od ordini diversi, scoperta da Frege, fu poi ripresa, approfondita e ampliata da Bertrand Russell. È per l'appunto da essa che prende lo spunto la sua famosa teoria dei tipi.]

Φ, X, Ψ considerate; e, nello stesso tempo, continuo a chiamarle "proprietà di Γ". Risulta chiaro che il rapporto di una di esse, per esempio di Φ, con Γ è totalmente diverso dal rapporto di essa con Ω. Sarà dunque opportuno usare, per questi rapporti, due denominazioni diverse.

L'oggetto Γ cade sotto il concetto Φ; ma Ω, che è esso pure un concetto, non può cadere sotto il concetto di primo grado Φ. In un rapporto simile, Ω potrebbe stare soltanto con un concetto di secondo grado. Invece di dire che Ω cade sotto Φ, diremo che gli è subordinato.

Chiariamo la cosa con un esempio.

Invece di asserire

"2 è un numero positivo" e

"2 è un numero intero" e

"2 è minore di 10",

possiamo dire con una sola espressione

"2 è un numero intero positivo minore di 10".

In quest'esempio, i tre fatti di

"essere un numero positivo"

"essere un numero intero"

"essere minore di 10"

costituiscono, contemporaneamente, tre proprietà dell'oggetto 2, e tre note caratteristiche dell'unico concetto "numero intero positivo minore di 10". Questo concetto non coincide né con quello di numero positivo, né con quello di numero intero, né con quello di numero minore di 10. Sarebbe tuttavia erroneo affermare che questo nuovo concetto cade sotto uno dei tre concetti componenti, per esempio sotto il concetto di numero intero; io dirò invece, per designare questo tipo speciale di rapporto, che il nuovo concetto è subordinato a ciascuno dei tre precedenti.[1]

5. Io non contesto a Kerry il diritto di usare le parole "oggetto" e "concetto" nel modo da lui preferito, ma voglio conservare lo stesso diritto per me, e voglio sostenere che, usandoli nel modo che ho spiegato, io riesco a mettere in luce una distinzione della massima impor-

[1] [Segue, nel testo tedesco, una lunga analisi del modo, assai impreciso, nel quale Kerry usa le due espressioni "concetto" e "nota caratteristica" ora definite, e del modo in cui le applica quando cerca di spiegare il numero 4 come risultato dell'addizione di 3 con 1.]

tanza. Senza dubbio in questa maniera incontro qualche difficoltà a farmi intendere dal lettore, perché le mie espressioni — prese completamente alla lettera — tradiscono talvolta il pensiero (in alcuni casi, infatti, necessità linguistiche ci fanno parlare di un oggetto mentre di fatto pensiamo a un concetto). In tali casi non posso che appellarmi al benevolo spirito di comprensione del lettore.

Si penserà forse che io abbia creato artificiosamente queste difficoltà; che non sia necessario prendere in considerazione qualcosa di così poco maneggevole come ciò che ho chiamato concetto; che si possa interpretare, con Kerry, il cadere di un oggetto sotto un concetto come un rapporto, in cui una volta può comparire come oggetto ciò che un'altra volta compare come concetto. I due termini "concetto" e "oggetto" servirebbero allora all'unico scopo di indicare la diversa posizione occupata in quel rapporto.

Nulla impedisce di condividere questa opinione. Ma chi credesse di evitare, in tal modo, la difficoltà sopra accennata, errerebbe di molto. In realtà egli la sposterebbe, non la eviterebbe.

Non tutte le parti di un pensiero possono essere sature; una almeno deve essere in qualche modo non satura, ossia deve essere predicativa. Altrimenti non potrebbero connettersi l'una all'altra. Per esempio, non è possibile connettere il senso delle parole "il numero 2" al senso dell'espressione "il concetto di 'numero primo' ", senza qualcosa che li leghi l'uno all'altro. Noi esprimiamo questo legame affermando "Il numero 2 cade sotto il concetto di 'numero primo' ". Esso è contenuto nelle parole "cade sotto", che richiedono di venir completate con un oggetto e un complemento, e che soltanto per questa loro incompletezza bilaterale possono servire come strumento di connessione. Esse avranno un senso completo, enunceranno un pensiero, soltanto se completate da ambo le parti: esse esprimono un rapporto.

Orbene, per spiegare questo rapporto noi ci troviamo di fronte a quella stessa difficoltà che si era voluta evitare ripudiando la mia teoria del concetto. Infatti, il nesso di parole "rapporto del cadere di un oggetto sotto un concetto" non denota un rapporto ma un soggetto, ossia è un nome proprio; e i tre nomi propri "il numero 2", "il concetto di 'numero primo' ", "il rapporto del cadere di un oggetto sotto un concetto" sono così estranei l'uno all'altro, come lo erano i due primi da

soli. Comunque si cerchi di riunirli, non si ottiene alcuna proposizione.

Bisogna pertanto riconoscere che la difficoltà, dovuta al carattere di "non saturazione" di alcune parti del pensiero, può venire soltanto spostata ma non evitata. Certamente i due termini "chiuso" e "non saturo" sono soltanto espressioni figurative, ma qui io non voglio né posso far altro che dare un cenno, un'indicazione.

Il lettore potrà comprendere piú facilmente la questione, se conosce il mio scritto *Funzione e concetto.* Nel problema, infatti, di spiegare che cosa l'analisi matematica intenda per "funzione", si urta proprio contro la stessa difficoltà.

In un esame piú approfondito si troverebbe che è dovuto alla natura stessa delle cose e alla natura della nostra lingua, se non è possibile evitare una certa incongruenza dell'espressione linguistica e se non è possibile far altro che prender nota di essa e tenerne conto in ogni momento.

3.

Senso e significato[1]

[Questo notevole studio, pubblicato nel 1892, contiene un esame sottilissimo del principio di identità dal punto di vista della logica formale moderna. Le difficoltà insite in tale principio vengono risolte da Frege facendo ricorso alla distinzione fra senso e significato.

Il capitolo presenta uno speciale interesse sotto vari aspetti:

a) perché ci offre l'esempio di un'analisi logica ricca di motivi che riguardano la filosofia generale;

b) perché quest'analisi è svolta in modo assai piano, con esempi concreti e comprensibili a tutti, senza far ricorso — come si suole nella maggior parte dei trattati moderni — all'ausilio di lingue simboliche, sempre un po' ostiche per i non specialisti; ciò malgrado essa è svolta con una precisione, un rigore e un acume ben difficili a superarsi;

c) perché ci addita la possibilità di una sintassi logica del linguaggio, assai piú profonda che la sintassi conosciuta dai filologi, e assai piú capace di essa a penetrare nelle complicatissime forme del pensiero espresso. A un primo sguardo, questo carattere grammaticale della discussione può talvolta celarne il significato filosofico; quest'impressione scompare però a una lettura piú approfondita e scrupolosa.

La necessità di distinguere senso e significato può dirsi, ormai, comunemente ammessa da tutti i logici, sebbene, a volte, enunciata con parole alquanto diverse. Quanto poi alla sintassi logica, essa costituisce oggi, non piú una semplice possibilità, ma un programma comune a molti ricercatori, anzi la bandiera ideale di un intero indirizzo filosofico. È proprio la scoperta di tale sintassi filosofica che dà a tutta l'opera di Frege quel carattere cosí vivo e moderno su cui abbiamo tante volte insistito. È in base ad essa che il suo platonismo poté diventare il punto di partenza di indirizzi cosí schiettamente antimetafisici, come per esempio il già citato "Circolo Viennese".

[1] [*Über Sinn und Bedeutung.* Malgrado nella letteratura tecnica sia generalmente invalso l'uso di tradurre il tedesco *Bedeutung* mediante i termini *denotazione*, *estensione* e simili, abbiamo preferito mantenere la versione datane nella prima edizione; e questo perché Frege stesso in una sua lettera a Peano — rimasta fino ad oggi inedita — che pubblichiamo in appendice al nostro volume, suggerisce quale corrispondente italiano piú appropriato per *Bedeutung*, il termine *significazione*.]

Le osservazioni piú importanti sono contenute nei paragrafi 1, 2, 4, 5, 12; fra essi il piú originale è il paragrafo 5, che analizza il significato delle proposizioni in rapporto con il loro valore di verità. Il paragrafo 3 esamina di nuovo le differenze fra concetto e rappresentazione già esposte nel capitolo secondo di questa parte seconda. I paragrafi 6-11, un po' meno interessanti degli altri, fanno corpo a sé, e contengono una complicata analisi del significato delle proposizioni secondarie. A una prima lettura possono anche venir tralasciati, senza che risulti da ciò impedita la comprensione generale del capitolo; l'ultimo fra essi, il paragrafo 11, contiene un breve e utile riassunto delle conclusioni ricavate nei cinque precedenti.]

1. L'analisi dell'*uguaglianza*[1] ci conduce a riflettere su alcuni problemi che si connettono a essa e sono ben difficili a risolversi. Dobbiamo vedere nell'uguaglianza un rapporto? E precisamente di che tipo? Un rapporto fra oggetti ovvero un rapporto fra nomi (o segni) di oggetti?

In un precedente lavoro[2] mi ero pronunciato in favore di questa ultima soluzione (che l'uguaglianza sia un rapporto fra nomi). Ecco il principale motivo che sembra militare in favore di essa: $a = a$ e $a = b$ sono palesemente due proposizioni di valore conoscitivo diverso, poiché $a = a$ vale a priori e deve chiamarsi, secondo Kant, analitica, mentre proposizioni della forma $a = b$ contengono spesso ampliamenti notevoli della nostra conoscenza e non sempre possono venir fondate a priori. (Per esempio la scoperta che ogni mattina non sorge un nuovo sole, ma sempre il medesimo, è stata senza dubbio una delle piú feconde dell'astronomia; e oggi ancora il riconoscere che in diverse osservazioni abbiamo a che fare con lo stesso piccolo pianeta o con la stessa cometa è talvolta tutt'altro che facile.) Orbene: se volessimo vedere nell'uguaglianza un rapporto effettivo, non fra i nomi "a" e "b", ma fra gli oggetti da essi designati, scomparirebbe ovviamente ogni diversità fra le due proposizioni "$a = a$" e "$a = b$", nel caso — ben inteso — che l'oggetto a sia proprio uguale all'oggetto b. In tal caso infatti l'uguaglianza esprimerebbe un rapporto di un oggetto con sé stesso e precisamente un rapporto *sui generis* in cui ogni cosa sta con sé medesima, ma nessuna con un'altra.

Ciò che si vuol dire con la proposizione "$a = b$" sembra dunque

[1] Uso qui il termine uguaglianza nel senso di identità e intendo la proposizione $a = b$ nel senso di "a è lo stesso di b" ovvero "a e b coincidono".

[2] *Ideografia* (già citato nella parte seconda, § 91).

essere questo: che i segni (o nomi) "*a*" è "*b*" significano la stessa cosa. L'uguaglianza parlerebbe proprio di tali segni, affermerebbe un rapporto fra essi (e non fra gli oggetti).

Il rapporto di uguaglianza sussisterebbe però fra due nomi o segni diversi solo in quanto essi denominano o designano qualcosa. Sarebbe cioè un rapporto che dipende dalla connessione di ognuno dei due segni con il medesimo oggetto designato. È chiaro tuttavia che, se fosse proprio cosí, il rapporto di uguaglianza risulterebbe per sua natura qualcosa di arbitrario: non si può invero proibire a nessuno di assumere a suo arbitrio per segno di un oggetto un qualsiasi altro oggetto o evento. Dunque, se fosse vero che il rapporto di uguaglianza dipende soltanto da quella connessione, l'asserto "$a = b$" riguarderebbe, non la cosa stessa, ma soltanto il modo di scegliere i nostri segni; non potrebbe quindi esprimere alcuna conoscenza. Sta invece il fatto che, in molti casi, con la proposizione "$a = b$" noi vogliamo esprimere proprio una conoscenza.

Se il segno *a* si distinguesse dal segno *b* soltanto come oggetto (e cioè — nel presente caso — per il fatto che le due lettere *a* e *b* hanno materialmente una *forma* diversa), e non si distinguesse invece in quanto segno (cioè per il *modo* in cui le due lettere *a* e *b* designano un determinato oggetto), è chiaro che il valore conoscitivo della proposizione "$a = b$" dovrebbe risultare essenzialmente identico al valore della proposizione "$a = a$" (sempre — ben inteso — nell'ipotesi che *a* sia davvero eguale a *b*).[1]

I due valori delle proposizioni "$a = a$" e "$a = b$" possono risultare diversi unicamente nel caso che la differenza del segno rispecchi un'effettiva diversità nel modo di designare l'oggetto. Come ciò possa accadere, ce lo spiegherà il seguente esempio. Siano *r*, *s*, *t* le tre mediane di un triangolo. Il punto di incontro delle prime due coincide, com'è noto, con il punto d'incontro della seconda con la terza. Abbiamo qui pertanto due nomi diversi che indicano lo stesso oggetto: "punto di incontro di *r* ed *s*" e "punto di incontro di *s* e *t*". Tali nomi (mentre

[1] [La teoria, che vede nell'uguaglianza un rapporto fra nomi, si troverebbe quindi di fronte alla stessa difficoltà che ci fece poco fa respingere la teoria, secondo cui l'eguaglianza è un rapporto fra oggetti: si troverebbe cioè di fronte all'impossibilità di distinguere il valore conoscitivo delle due proposizioni "$a = a$" e "$a = b$".]

ci designano lo stesso oggetto) indicano anche il modo particolare con cui questo oggetto ci vien dato, e di conseguenza la proposizione contiene un'effettiva conoscenza.

Ci troviamo dunque indotti a concludere che, pensando a un segno (sia esso un nome, o un nesso di piú parole, o una semplice lettera), dovremo collegare a esso due cose distinte: e cioè, non soltanto l'oggetto designato, che si chiamerà "significato di quel segno", ma anche il "senso del segno", che denota il modo come quell'oggetto ci viene dato. Per esempio, nel caso anzidetto delle mediane *r*, *s*, *t*, il significato dell'espressione "punto di incontro di *r* ed *s*" è identico a quello dell'espressione "punto di incontro di *s* e *t*"; il loro senso invece è diverso. Analogamente per le espressione "stella della sera" e "stella del mattino"; esse designano l'identica stella e perciò hanno il medesimo significato, ma hanno invece, com'è ovvio, un senso diverso.

Si ricava da quel che ho detto finora, che per "segno" o "nome" io intendo qui una qualunque indicazione la quale compia l'ufficio di un nome proprio, il cui significato cioè sia un oggetto determinato (ove si intenda la parola "oggetto" nel modo piú ampio). L'indicazione di un singolo oggetto può anche consistere di piú parole o altri segni. Per brevità la chiameremo sempre "nome proprio".

Il senso di un nome proprio è qualcosa che viene subito afferrato da chi conosca sufficientemente la lingua (o, in genere, il complesso di segni) a cui quel nome proprio appartiene.[1] Esso però non riesce a chiarire, se non da un unico lato, il significato — posto che ve ne sia uno — del nome proprio cui si riferisce. Per conoscere appieno tale significato, bisognerebbe essere in grado di decidere, dato un qualunque senso, se esso si addica o no al significato anzidetto. A ciò tuttavia non perveniamo mai.

[1] Per un nome proprio sul tipo di "Aristotele", le opinioni circa il suo senso possono senza dubbio differire notevolmente le une dalle altre. Eccone per esempio due: "lo scolaro di Platone e maestro di Alessandro Magno" e "il maestro di Alessandro Magno nato a Stagira". Evidentemente chi accetta la prima connetterà alla proposizione "Aristotele nacque a Stagira" un senso diverso di chi condivide la seconda.* Queste oscillazioni del senso spettante a un dato nome proprio possono risultare sopportabili esclusivamente se il significato rimane identico; pur tuttavia bisogna evitarle nell'edificio di una scienza rigorosa, e sarebbe opportuno non ammetterle in una lingua completa.

* [Per il primo tale proposizione esprime un fatto empirico, per il secondo invece esprime una conseguenza immediata del senso attribuito al nome proprio "Aristotele".]

2. I rapporti che normalmente intercorrono fra il segno, il suo senso, e il suo significato sono questi: a un dato segno corrisponde in genere un senso determinato, e a questo corrisponde di nuovo un significato determinato; invece a un dato significato (cioè ad un dato oggetto) non corrisponde sempre un unico senso. Anche a un dato senso non corrisponde un unico segno: esso infatti viene espresso in modi diversi nelle diverse lingue, e talvolta persino nella stessa lingua.

Naturalmente vi sono eccezioni che si staccano da questo comportamento regolare.

In un insieme completo di segni, a ogni espressione dovrebbe corrispondere — come s'è detto — un senso determinato; però nelle lingue popolari il piú delle volte questa condizione non è soddisfatta, e si dovrebbe già esser contenti se, almeno nella stessa frase, la medesima parola avesse sempre il medesimo senso.

Si può ammettere forse che un'espressione la quale compia l'ufficio di nome proprio possegga sempre un senso, se costruita in modo grammaticalmente esatto. Ciò non implica, tuttavia, che al suo senso corrisponda sempre un significato. Per esempio, l'espressione "il corpo celeste piú lontano dalla Terra" ha un senso; ma è molto dubbio che abbia pure un significato. Cosí l'espressione "la serie meno convergente" ha un senso; ma si dimostra che non ha alcun significato, perché — data una qualunque serie convergente — se ne può sempre trovare un'altra, ancora convergente, ma pure meno della prima. Dal fatto, dunque, che si afferrò il senso di un'espressione, non ne segue ancora che essa abbia certamente un significato.

Ordinariamente, quando si usa una parola, ciò di cui si vuole parlare è il suo significato. Può accadere però che si voglia invece parlare, o della parola stessa, o del suo senso. Facciamo, per esempio, riferimento alla parola stessa allorché citiamo le parole di un altro con discorso diretto. In questo caso le nostre parole designano, innanzi tutto, le parole stesse pronunciate dall'altro, e soltanto queste hanno poi (in quanto vennero pronunciate dall'altro) il loro significato comune.

Abbiamo allora dei segni di segni. Per riflettere questa circostanza nella scrittura, si racchiudono fra virgolette le parole in questione. Pertanto la parola racchiusa fra virgolette non può venir presa nel significato comune.

Quando invece ci si vuol riferire al senso di un'espressione "*A*", si può senz'altro far uso della locuzione "il senso di '*A*' ".

Il discorso indiretto tratta in genere del senso delle proposizioni, per esempio del senso di un discorso di un altro. È quindi chiaro che in questo tipo di discorso le parole non hanno il loro significato ordinario, ma denotano ciò che, ordinariamente, costituisce il loro senso. Per dirla in breve: le parole nel discorso indiretto vengono usate direttamente, ovvero hanno un significato indiretto.

Noi distinguiamo dunque il significato ordinario di una parola dal suo significato indiretto, e il suo senso ordinario dal suo senso indiretto. Il significato indiretto è il suo senso ordinario.

Ritengo non si debbano dimenticare le eccezioni qui riferite, se si vogliono comprendere esattamente, nei singoli casi, i rapporti precisi fra segno, senso, e significato.

3. Dal significato e dal senso di un segno va poi tenuta ben distinta la rappresentazione che lo accompagna. Se il significato di un segno è un oggetto percepibile coi sensi, la rappresentazione che ho di esso è invece una mia immagine, originatasi dal ricordo sia delle impressioni sensoriali da me provate sia delle attività, tanto interne quanto esterne, da me esercitate.[1] Questa immagine è spesso mescolata a sentimenti; la chiarezza delle singole parti è diversa e fluttuante. Al medesimo senso non si collega sempre la medesima rappresentazione, neanche nella stessa persona. Essa è poi eminentemente soggettiva variando da uomo a uomo. Per esempio un pittore, un cavallerizzo, uno zoologo collegheranno, con tutta probabilità, rappresentazioni assai diverse al nome "Bucefalo". Questo fatto distingue in modo essenziale la rappresentazione, non solo dal significato, ma anche dal senso di un segno; il senso non costituisce invero, come l'immagine anzidetta, qualcosa di inscindibile dal singolo individuo, ma può formare il possesso comune di molti. Che sia cosí, ce lo prova l'esistenza di un patrimonio di pen-

[1] Sullo stesso piano delle rappresentazioni possiamo porre le intuizioni, per le quali entrano in gioco direttamente le impressioni e le attività invece delle tracce da esse lasciate nel nostro animo. La differenza è, per il nostro scopo, irrilevante, tanto piú che ci aiutano sempre a completare l'immagine intuitiva, oltre alle nostre immediate impressioni e attività, anche i ricordi di altre analoghe precedenti. Vi è tuttavia chi intende per intuizione qualcosa di tutt'affatto diverso, e cioè un oggetto in quanto risulta spaziale o percepibile coi sensi.

sieri comuni all'umanità, patrimonio che essa trasmette di generazione in generazione.[1] Sarebbe quindi poco opportuno designare col medesimo nome di "rappresentazione" una cosa che risulta cosí profondamente diversa da essa.

Mentre non vi è alcuna incertezza nel parlare *sic et sempliciter* del senso di un segno, non si può invece parlare — per quel che abbiamo spiegato — di una rappresentazione (rigorosamente intesa) senza precisare a chi appartenne e in quale istante gli appartenne. Si obietterà forse: come alla stessa parola l'uno collega una rappresentazione e l'altro un'altra, cosí può anche darsi che l'uno le connetta un senso e l'altro uno diverso. In questo caso però la differenza consiste solo nel modo di attuare questa connessione. Ciò non impedisce che entrambi afferrino il medesimo senso; mentre è impossibile che essi abbiano la stessa rappresentazione. *Si duo idem faciunt, non est idem.* Se due si rappresentano la stessa cosa, ciascuno ha tuttavia la propria rappresentazione. Certamente talvolta è possibile stabilire alcune distinzioni fra le rappresentazioni dei diversi uomini, e persino fra le loro sensazioni; non è però possibile un esatto confronto fra di esse, non potendosi avere contemporaneamente queste rappresentazioni nella stessa coscienza.

Il significato di un nome proprio è l'oggetto che noi indichiamo con esso; la rappresentazione che ne abbiamo è invece completamente soggettiva. Fra l'uno e l'altra sta il senso, che non è piú soggettivo come la rappresentazione, ma non coincide nemmeno con l'oggetto stesso. Per chiarire i loro reciproci rapporti può essere forse utile la seguente similitudine.

Preso un cannocchiale astronomico, esaminiamo il processo con cui, per mezzo di esso, viene osservata la Luna. La Luna è l'oggetto di osservazione; questa osservazione è resa possibile dall'immagine reale prodotta entro il cannocchiale dall'obiettivo e dall'immagine retinica che si produce nell'osservatore. Orbene: è facile cogliere una certa

[1] [Questo accenno, su cui Frege ritorna piú volte, all'effettiva incontestabile esistenza di un patrimonio di pensieri comune all'umanità, costituisce uno degli argomenti piú efficaci contro il pericolo solipsistico. Esso è l'argomento principe cui fanno appello gli indirizzi antimetafisici per avere il diritto di opporre, ai pretesi pensieri individuali e incomunicabili (che non sono in grado di far uscire il soggetto da sé medesimo), altri effettivi pensieri oggettivi e interi individuali, che formano il vero oggetto della logica e della filosofia.]

analogia fra la Luna e il significato, l'immagine prodotta dall'obiettivo e il senso, l'immagine retinica e la rappresentazione o intuizione. E invero: mentre la Luna è l'oggetto reale nella sua completezza, l'immagine prodotta dall'obiettivo è soltanto unilaterale, poiché dipende dal punto di osservazione; malgrado ciò è oggettiva, potendo servire a parecchi osservatori. La si può, in ogni caso, accomodare in modo che molti si valgano di essa nel medesimo istante. Ciascuno ha invece la sua propria immagine retinica. Persino una congruenza geometrica fra le varie immagini retiniche sarebbe a stento raggiungibile, a causa della diversa conformazione degli occhi; una coincidenza effettiva di esse resta poi comunque esclusa.

Si potrebbe forse continuare in questa similitudine ammettendo che l'immagine retinica del soggetto *A* possa venir resa visibile al soggetto *B* o anche ad *A* stesso (per mezzo di uno specchio). Questo servirebbe a spiegare come una rappresentazione possa venir assunta essa stessa quale oggetto, e come però risulti diversa per chi la osserva in questo modo e per chi invece se ne vale come propria rappresentazione. Ma lo sviluppo di un tal parallelismo ci condurrebbe troppo lontano dal nostro tema.

4. Quanto si coglie una distinzione tra parole, o tra espressioni, o tra intere proposizioni, possiamo riconoscere che esistono tre gradi di differenza. La differenza può infatti riguardare: o soltanto le rappresentazioni, o il senso ma non il significato, o infine anche il significato.

Relativamente alla differenze del primo tipo, bisogna osservare che, a causa del collegamento incerto fra rappresentazione e parola, può sussistere una diversità per un individuo là dove un altro non riesce affatto a vederla. Le differenze fra una traduzione e il testo originale che le corrisponde dovrebbero non oltrepassare questo primo gradino. Altri esempi di differenze che rientrano in esso, sono le coloriture e i toni che l'arte poetica e l'eloquenza cercano di procurare al senso dei nostri discorsi. Queste sfumature non sono qualcosa di oggettivo, ma ogni uditore o lettore deve procurarsele egli stesso secondo i cenni del poeta o dell'oratore. Senza dubbio l'arte non sarebbe possibile se non vi fosse una certa affinità fra le rappresentazioni dei diversi uomini;

ma quanto si corrisponda alle intenzioni del poeta, non è cosa che possa venir verificata esattamente.

Nel seguito del presente studio non parlerò piú di rappresentazioni e intuizioni; esse sono state qui menzionate soltanto allo scopo di non confondere il senso o il significato di una parola con la rappresentazione che essa produce nell'ascoltatore.

Per riuscire a esprimerci con brevità e precisione, converremo d'ora in poi di usare ordinariamente le seguenti locuzioni: useremo il verbo *esprimere* riferendoci al senso di un nome proprio (parola, segno, nesso di segni, espressione), e invece il verbo *significare* o *denotare* riferendoci al suo significato. Diremo dunque: un segno esprime questo o quel senso, denota questo o quel significato.

Ma forse qualcuno — partendo da un punto di vista idealistico o scettico — vuole già da un po' di tempo muovermi la seguente obiezione: "Tu parli senz'altro della Luna come se fosse un oggetto effettivo; ma di dove sai tu che il nome 'Luna' abbia davvero un significato? di dove sai che qualche segno abbia in generale un significato?" Rispondo senza difficoltà, osservando che certamente non è intenzione di alcuno di noi — allorché parliamo della Luna — riferirci soltanto alla rappresentazione che noi abbiamo di essa; anzi non possiamo nemmeno accontentarci di fare soltanto riferimento al senso del termine "Luna"; di fatto noi tutti presupponiamo che tale termine abbia un suo significato. È indubitabile, per esempio, che non coglierebbe il senso della proposizione "La Luna è piú piccola della Terra" chi volesse pensare, che tale proposizione parla soltanto di una rappresentazione della Luna. È certamente possibile che, con la proposizione anzidetta, noi commettiamo un errore; ciò si è verificato non poche volte in casi analoghi. Ma qui non si tratta di rispondere al problema se ci sbagliamo sempre o no; si tratta invece di vedere se è in generale giustificabile il parlare del significato di un segno, per quanto — beninteso — con la riserva "nel caso che questo significato esista". Orbene: io sostengo che, per convincerci che un tale asserto è giustificabile, basta dirigere l'attenzione su quello che è il nostro effettivo intento allorché parliamo o pensiamo.

5. Finora abbiamo trattato soltanto del senso e del significato di quei segni (parole, espressioni) che chiamammo nomi propri. Ora ci

poniamo invece questo nuovo problema: che cosa sono il senso ed il significato di una intera proposizione assertoria?

Una proposizione siffatta contiene, com'è noto, un pensiero;[1] bisognerà quindi stabilire innanzi tutto se questo pensiero debba venir considerato come senso o come significato della relativa proposizione. A tale scopo cominciamo a supporre che la proposizione abbia un significato, e sostituiamo in essa, al posto di una parola, un'altra con lo stesso significato ma con senso diverso; questa sostituzione non può certo influire sul significato della proposizione. Orbene: che è accaduto, invece, del pensiero contenuto nella proposizione? Si vede subito che esso è modificato. (Per esempio, il pensiero della proposizione "La stella del mattino è un corpo illuminato dal Sole" risulta diverso dal pensiero della proposizione "La stella della sera è un corpo illuminato dal Sole". Tant'è vero che un individuo il quale non sapesse che la stella del mattino coincide con quella della sera, potrebbe ritenere vero il pensiero della prima e falso quello della seconda.) Dunque il pensiero di una proposizione non può costituire il suo significato; piuttosto dovremo vedere in esso il senso della proposizione considerata.

Ma che cosa sarà allora il suo significato? E anzi; abbiamo il diritto di porre questa domanda, oppure dobbiamo invece ammettere che una proposizione, intesa come un tutto unico, può possedere un senso ma non mai un significato?

Qualunque sia la nostra risposta, c'è da attendersi senza dubbio che — analogamente ai nomi — esistano anche delle proposizioni fornite di senso ma non di significato. Tali saranno per esempio le proposizioni che contengono un nome proprio privo di significato. Cosí l'asserto "Ulisse fu sbarcato in Itaca mentre dormiva profondamente" ha palesemente un senso, ma è dubbio che abbia un significato, perché è dubbio che ne abbia uno il termine "Ulisse" che fa parte della proposizione. Comunque è certo che, se qualcuno ritiene seriamente vera o falsa la proposizione, egli ammetterà che il nome "Ulisse" abbia, non solo un senso, ma proprio un significato; è infatti al significato di questo nome che egli attribuisce o non attribuisce il predicato cui fa cenno la proposizione. Chi non ammette l'esistenza di tale significato, non può

[1] Col termine "pensiero" intendo non l'atto soggettivo del pensiero, ma il suo contenuto oggettivo che può costituire il possesso comune di molti.

attribuirgli o negargli alcunché. Se invece qualcuno vuole fermarsi al pensiero della proposizione anzidetta, sarà per lui superfluo indagare circa il significato delle parti che la costituiscono; per il senso di una proposizione può infatti interessare soltanto il senso delle sue parti. Che il nome "Ulisse" abbia o no un significato, non muta il pensiero contenuto nell'asserto di poco fa. Se noi ci preoccupiamo del significato di qualche parte di una proposizione, questo prova che riconosciamo, e anzi esigiamo, in generale, un significato per l'intera proposizione.

Il pensiero contenuto in una proposizione perde subito una parte del suo valore, se constatiamo che una sua parte manca di significato. È dunque molto giusto che non ci accontentiamo del senso di una proposizione ma ne cerchiamo il significato.

Per qual motivo vogliamo che ogni nome proprio possegga, non soltanto un senso, ma anche un significato? Per qual motivo non ci basta il pensiero? Perché ciò che ci interessa è il *valore di verità* delle nostre proposizioni; se viene a mancare quest'interesse preminente per la verità, cessa senz'altro quell'insufficienza del pensiero. E ciò si verifica in alcuni casi; per esempio, quando ascoltiamo la lettura di un componimento epico, noi siamo esclusivamente attratti, oltre che dalle melodie della lingua, dal senso delle proposizioni e dalle immagini e dai sentimenti da esse suscitate in noi. Col problema della verità noi perderemmo la gioia artistica e trasformeremmo la poesia in una ricerca scientifica. Perciò, fin quando rimaniamo nel campo dell'arte, poco ci importa se il nome "Ulisse" abbia o no un significato.[1]

Ciò che ci fa avanzare dal senso al significato è la ricerca della verità.

Si è visto che dobbiamo cercare un significato per una proposizione, ogniqualvolta ci interessiamo del significato delle sue singole parti; e questo accade quando, e soltanto quando, sorge in noi il problema del suo valore di verità.

Eccoci dunque indotti a vedere il significato di una proposizione nel suo valore di verità. Per valore di verità di una proposizione, io intendo la circostanza che essa sia vera o falsa. Altri valori di verità,

[1] Sarebbe desiderabile disporre di un'espressione speciale per indicare i segni che debbono avere soltanto un senso. Se, per esempio, convenissimo di chiamarli "figure", allora le parole dell'attore nella scena sarebbero figure, ed anzi l'attore stesso sarebbe una figura.

oltre questi due, non ve ne sono; per semplicità essi verranno chiamati senz'altro il Vero e il Falso.[1]

Ogni proposizione assertoria (in cui, come si è visto, ciò che interessa è il significato delle sue parole) va dunque riguardata come un nome proprio; e il suo significato — posto che ve ne sia uno — dovrà essere o il Vero o il Falso. Chiunque pronunci giudizi, chiunque ritenga qualcosa come vera, anche lo stesso scettico, deve — sia pure solo tacitamente — riconoscere questi due oggetti.

L'attribuire il nome di oggetti ai due valori di verità può forse sembrare un'idea arbitraria, un puro gioco di parole da cui è impossibile dedurre alcuna conseguenza profonda. Per giustificarmi, dovrei discutere con precisione che cosa io intenda per oggetto, analizzandone i rapporti col concetto e con la relazione; questo mi porterebbe però troppo fuori dal tema in esame. Mi basterà dunque aver stabilito qui chiaramente che in ogni giudizio,[2] sia pur semplicissimo, vi è già un trapasso dal grado del puro e semplice pensiero al grado del significato (cioè dell'oggettivo).

Forse ci si potrebbe sentir tentati di credere che il pensiero ed il vero non stiano fra loro nel rapporto di senso e significato, ma nel rapporto di soggetto e predicato. Anzi, per meglio accentuare la cosa, qualcuno vorrà forse dire: "Il pensiero che 5 sia un numero primo è vero" invece di affermare semplicemente "5 è un numero primo". Ma chi analizzi un po' da vicino la cosa, vede senza difficoltà che la prima di queste due proposizioni non afferma nulla piú della seconda. L'asserzione della verità risiede, in entrambi i casi, nella forma della proposizione assertoria; e pertanto, dove questa proposizione non possegga la sua forza abituale — per esempio sulla bocca di un attore sulla scena — lo stesso primo asserto ("Il pensiero che 5 sia un numero primo è vero") enuncerà nulla piú che un pensiero, e precisamente

[1] [La teoria, qui esposta da Frege, è stata in seguito accettata da tutti i migliori studiosi di logica. Per essi infatti la proposizione è ciò che può risultare vero o falso; in altri termini: se a un nesso di parole ha senso riferire uno di questi due predicati, è lecito attribuirgli il nome di proposizione; in caso contrario, no. Su questo si fonda tutta la *logica delle proposizioni*, che costituisce senza dubbio uno dei rami piú importanti della logica formale moderna. Un cardine di essa è pure la teoria — che Frege esporrà nel seguito del presente paragrafo — dell'equivalenza logica di tutte le proposizioni vere.]

[2] Un giudizio è per me non il mero concepire un pensiero, ma il riconoscimento della sua verità.

l'identico pensiero contenuto nella seconda proposizione ("5 è un numero primo"). Da ciò si deve concludere che il rapporto fra il pensiero e il vero non può venir paragonato al rapporto fra soggetto e predicato.

Soggetto e predicato, intesi in senso logico, sono parti del pensiero, e stanno sul medesimo piano rispetto al conoscere. Collegandoli l'uno all'altro, si giunge semplicemente a un pensiero, non si trapassa da un senso al suo significato, da un pensiero al suo valore di verità. Ci si muove sempre sul medesimo gradino, non si sale a quello superiore. Un valore di verità non può essere parte di un pensiero, proprio come non lo può essere il Sole; esso non è un pensiero ma un oggetto.

Se è giusta la nostra ipotesi che il significato di una proposizione risieda nel suo valore di verità, allora è chiaro che questo valore di verità dovrà rimanere immutato sostituendo, a una parte della proposizione qualche nuova proposizione con lo stesso significato ma con senso diverso. E di fatto avviene proprio cosí. Leibniz spiega per l'appunto: *eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate.* Orbene: che altro potremmo trovare, oltre il valore di verità, che spetti proprio a tutte le proposizioni, tenga conto del significato delle parti costitutive di esse, e non vari nelle sostituzioni del tipo anzidetto?

Se il significato di una proposizione è costituito dal suo valore di verità, se ne conclude che, per un lato, tutte le proposizioni vere avranno lo stesso significato, e cosí per l'altro tutte quelle false. Dunque, nel significato di una proposizione scompare ciò che v'è in essa di particolare. Ne segue che l'importante, per una proposizione, non potrà mai essere il suo solo significato. Ma d'altra parte, nemmeno il puro pensiero produce qualche conoscenza; ciò che la produce è il pensiero insieme col suo significato, ossia col suo valore di verità.

Possiamo dunque concepire il "giudicare" come un "sollevarsi da un pensiero al suo valore di verità". Questa però non deve costituirne una definizione. Il giudicare è in realtà una cosa assolutamente singolare e inconfondibile con ogni altra. Si potrebbe anche dire che il giudicare sia un distinguere le parti entro il valore di verità. Questo distinguere si realizza con un ritorno al pensiero: ogni senso che appartiene a un valore di verità, corrisponderebbe a uno speciale modo di compiere tale distinzione.

Con ciò uso evidentemente la parola "parte" in un modo diverso dal comune; e cioè trasferisco il rapporto fra parte e tutto dalla proposizione al suo significato, in quanto chiamo "parte del significato di una proposizione" il significato delle parole che la compongono. Senza dubbio questa è una locuzione assai discutibile, sia perché, nel significato, il tutto e una parte non determinano la parte residua, sia perché nei corpi la parola "parte" viene usata in un senso diverso. Per la nostra idea bisognerebbe coniare un'espressione nuova e adatta al caso speciale.

6. Dobbiamo ora riprendere l'esame della supposizione poco fa esposta, che il significato di una proposizione sia costituito per intero dal suo valore di verità.

Già abbiamo trovato che questo valore rimane intatto quando nella proposizione in esame si sostituisce un'espressione con qualche altra avente lo stesso significato; non abbiamo ancora però considerato il caso che l'espressione da sostituire sia essa stessa una proposizione.

Se la nostra teoria è giusta, il valore di verità di una proposizione composta dovrà rimanere immutato, allorché sostituiamo in essa, al posto di una sua proposizione parziale, qualche altra avente lo stesso valore di verità. Dovremo però attenderci eccezioni quando la proposizione composta o quella parziale siano discorsi diretti o indiretti; in questi casi infatti, come già si è visto, il significato delle parole non è quello ordinario. (Nel discorso diretto, il significato di una proposizione è di nuovo una proposizione; in quello indiretto è un pensiero.)

Ci troviamo cosí condotti alla discussione delle proposizioni secondarie. Esse costituiscono le parti di un periodo; e questo periodo si presenta, dal punto di vista logico, come una proposizione (precisamente, come la proposizione principale). Qui sorge subito il problema, se anche il significato delle proposizioni secondarie sia, come quello delle primarie, un valore di verità. La risposta sarà, almeno parzialmente, negativa perché sappiamo che il significato del discorso indiretto non è un valore di verità.

I grammatici considerano le proposizioni secondarie come puri surrogati di parti di proposizioni, e le suddividono quindi in nominali,

esplicative e avverbiali. Questo ci può far venire il sospetto che il significato di una proposizione secondaria non sia costituito di un valore di verità, ma risulti dello stesso genere del significato di un nome, di un aggettivo o di un avverbio (cioè di una parte di proposizione il cui senso non è un pensiero ma una parte di esso). Soltanto una ricerca piú precisa ci potrà chiarire la cosa. In tale ricerca non dovremo seguire fedelmente il filo conduttore della grammatica, ma dovremo raggruppare ciò che è logicamente omogeneo.

Cominciamo a prendere in esame quei casi nei quali, come appunto sospettavamo, il senso di una proposizione secondaria risulta non essere un pensiero indipendente.

Fra le proposizioni nominali astratte, introdotte nel periodo per mezzo di un "che", vanno annoverate le proposizioni indirette; e si è già visto che le singole parole di queste hanno un significato indiretto, cioè un significato che coincide con il senso ordinario. In questo caso, dunque, il significato della proposizione secondaria non può essere un valore di verità, ma un pensiero; il suo senso invece non sarà (come per le proposizioni principali) un pensiero, ma sarà il senso delle seguenti parole "il pensiero che ..." (ed esso costituisce soltanto una parte del pensiero dell'intero periodo). Ciò avviene dopo i verbi "dire", "udire", "pensare", "essere persuaso", "concludere", e analoghi.[1] Diversamente, e per vero in modo assai complicato, stanno le cose dopo certi verbi come "riconoscere", "sapere", "credere". Ma su questi ultimi ritorneremo piú tardi.

Che nei casi anzidetti il significato della proposizione secondaria sia proprio un pensiero, risulta anche dal fatto che è indifferente per la verità del periodo complessivo se quel pensiero sia vero o falso. Si confrontino per esempio le due proposizioni "Copernico credeva che le traiettorie dei pianeti fossero cerchi" e "Copernico credeva che il moto apparente del Sole fosse prodotto dal moto reale della Terra". Qui si può scambiare una proposizione secondaria coll'altra, senza compromettere il valore di verità dell'intero periodo.[2] Questo periodo, mal-

[1] Nel periodo "*A* finse di avere visto *B*", il significato della proposizione secondaria è un pensiero, di cui si dice: I) che *A* lo asserí come vero; II) che *A* conosceva la sua falsità.

[2] [Tale scambio non influisce sul valore di verità dell'intero periodo, sebbene il pensiero espresso dalla prima proposizione secondaria sia falso mentre quello espresso dalla seconda è vero.]

grado sia composto di una proposizione principale e di una secondaria, ha come senso un unico pensiero, e la sua verità non include né esclude quella della proposizione secondaria.

In casi come quello ora considerato, è permesso — nella proposizione secondaria — sostituire un'espressione qualsiasi con un'altra, non se quest'altra ha lo stesso significato ordinario della prima, ma solo se ha lo stesso significato indiretto (cioè lo stesso senso ordinario). Se però qualcuno ne volesse concludere che il significato di una proposizione non è il suo valore di verità "perché, se così fosse, dovrebbe esser lecito sostituirla, in qualunque luogo essa compaia, con un'altra proposizione avente lo stesso valore di verità", egli andrebbe con ciò molto al di là del giusto; con lo stesso diritto si potrebbe asserire che il significato della parola "Venere" è diverso da quello dell'espressione "stella del mattino", perché non in ogni caso è lecito usare l'una espressione per l'altra. Ciò che si può rettamente concludere è soltanto questo: il significato di una proposizione *non coincide sempre* col suo valore di verità, così come il significato dell'espressione "stella del mattino" non è sempre costituito dal pianeta Venere (per esempio quando l'espressione "stella del mattino" viene usata nel discorso indiretto). Questo caso eccezionale per il significato delle proposizioni si presenta, per l'appunto, allorché abbiamo a che fare con proposizioni secondarie sul tipo di quelle ora prese in esame: il loro significato infatti è un pensiero.

Se un individuo dice "sembra che ...", egli pensa in realtà "*mi* sembra che ...", ovvero "*io* penso che ...". Abbiamo dunque, di nuovo, in queste proposizioni, il caso eccezionale predetto. Le cose vanno in modo analogo per le proposizioni del tipo "rallegrarsi", "deplorare", "approvare", "biasimare", "sperare", "temere", ecc. Se, verso la fine della battaglia di Belle-Alliance, Wellington si rallegrò per il prossimo arrivo dei prussiani, il motivo della sua gioia fu soltanto una persuasione. Anche se si fosse ingannato, non perciò sarebbe stato meno lieto, finché perdurava la sua illusione; e invece, prima di essersi persuaso del loro arrivo, non poteva rallegrarsene, per quanto essi di fatto già si avvicinassero.

Come una persuasione o una fede costituisce, assai spesso, la base di un sentimento, così può anche — in certi casi — costituire la base

di un'altra persuasione (questo avviene, per esempio, nei ragionamenti). Nella proposizione "Dalla rotondità della Terra Colombo concluse di poter raggiungere le Indie navigando verso occidente" abbiamo, come significato delle sue parti, due pensieri: che la Terra sia rotonda, e che Colombo possa raggiungere le Indie navigando verso occidente. L'importante è qui, di nuovo, soltanto questo: che Colombo era persuaso dell'una cosa come dell'altra, e che la prima persuasione costituiva il fondamento della seconda. Se poi la Terra risulti proprio rotonda o no, e se Colombo potesse davvero — come pensava — raggiungere l'India navigando verso ovest, è indifferente per la verità dell'asserto considerato. Questa verità sarebbe invece alterata se, in luogo del termine "Terra", si sostituisse quest'altra espressione "Il pianeta che è accompagnato da un satellite con diametro maggiore del quarto di quello del pianeta stesso".[1] Anche nel presente caso abbiamo dunque a che fare col significato indiretto delle parole.

Le proposizioni finali appartengono esse pure al medesimo tipo; il fine infatti è, evidentemente, un pensiero. Anche in esse dunque avremo significato indiretto delle parole e congiuntivo.

Le proposizioni rette dai verbi "ordinare", "pregare", "proibire" avrebbero, nel discorso diretto, la forma di imperativi. Esse non hanno alcun significato ma soltanto un senso. Un ordine, una preghiera, non sono a rigore dei pensieri; stanno però sullo stesso piano dei pensieri. Perciò le parole hanno, in tali proposizioni, il loro significato indiretto. Il significato di queste proposizioni non è dunque un valore di verità, ma un ordine, una preghiera, ecc.

Lo stesso può ripetersi per le proposizioni che dipendono dai verbi "dubitare se", "non sapere se", e analoghi. È facile infatti vedere che anche in esse le parole vanno prese nel loro significato indiretto.

Le proposizioni interrogative, che iniziano con le parole "dove", "quando", "chi", "che cosa", "come", "per mezzo di che", ecc. sembrano talora approssimarsi molto a proposizioni avverbiali, nelle quali le parole hanno il loro significato comune. Linguisticamente, i due casi si distinguono per il modo del verbo. Il congiuntivo si usa nelle pro-

[1] [Sebbene l'espressione "il pianeta che è accompagnato ecc." abbia lo stesso significato del termine "Terra", essa non può far parte del pensiero di Colombo, dato che questi non ne conosceva il significato.]

posizioni dipendenti, nelle quali le parole hanno significato indiretto, nelle quali cioè un nome proprio non può generalmente venir sostituito con un altro denotante il medesimo oggetto.

7. Nei casi finora presi in esame, le parole avevano, nelle proposizioni secondarie, il loro significato indiretto, e da ciò derivava che tali proposizioni avevano esse pure un significato indiretto; cioè, non un valore di verità, ma un pensiero, un ordine, una preghiera, una domanda. La proposizione secondaria poteva venire interpretata — in questi casi — come un sostantivo, anzi, si potrebbe dire, come il nome proprio di quel pensiero, di quell'ordine, ecc., per denotare il quale essa veniva introdotta nel complesso del periodo.[1]

Passiamo ora invece ad altre proposizioni secondarie, le quali usano — senza alcun dubbio — le parole nel loro significato ordinario e ciò malgrado non hanno, come senso, un pensiero, né hanno come significato un valore di verità. Come ciò sia possibile, ce lo chiarirà nel miglior modo un esempio:

"Chi scoperse la forma ellittica delle traiettorie dei pianeti, morí in miseria".

Se la proposizione secondaria avesse qui come senso un vero e proprio pensiero (cioè un pensiero completo), dovrebbe risultare possibile esprimere lo stesso pensiero anche per mezzo di una proposizione principale. Ciò però è impossibile, dato che il soggetto grammaticale "chi" non possiede un senso indipendente ma ha la funzione precipua di stabilire un rapporto con la proposizione seguente "morí in miseria". Dunque il senso della proposizione secondaria ora considerata è esso pure un pensiero non completo, e il suo significato non è un valore di verità ma è Keplero.[2]

Contro questa conclusione taluno potrebbe obiettare che il senso dell'intero periodo include però, come parte, il pensiero che vi fu una

[1] [Come, nel paragrafo 1, Frege aveva detto di voler chiamare "nome proprio" una qualsiasi espressione che serva a denotare un oggetto singolo, cosí ora propone di chiamare "nome proprio" una espressione (proposizione secondaria) che serva a denotare un singolo pensiero, un singolo ordine, ecc.]

[2] [Il compito della proposizione secondaria "Chi scoperse ecc." non è di affermare un fatto che può essere vero o falso (cioè affermare che vi fu o non vi fu qualcuno che scoperse per primo tali traiettorie), ma consiste semplicemente nel denotare un certo individuo (nel nostro caso nel denotare Keplero). In altri termini: come la proposizioni secondarie esaminate nel paragrafo 6 erano nomi propri di pensieri, di ordini, ecc., cosí le proposizioni secondarie qui considerate sono nomi propri di oggetti.]

persona che riconobbe, per prima, la forma ellittica delle traiettorie dei pianeti; non può infatti ritenere per vero l'intero periodo chi neghi questa sua parte. Ciò è fuori dubbio; ma soltanto perché, in caso contrario, la proposizione "Chi scoperse la forma ellittica di quelle traiettorie" risulterebbe priva di significato. In qualsiasi asserto è sempre implicita l'ipotesi che i nomi propri usati (siano essi termini semplici o espressioni composte) posseggano un qualche significato. Se per esempio si afferma

"Keplero morí in miseria",

si presuppone ovviamente che il nome Keplero denoti qualcuno. Non ne segue tuttavia che il senso della proposizione "Keplero morí in miseria" contenga in sé il pensiero "Il nome Keplero denota qualcuno." Ce lo prova il fatto che, se cosí fosse, la negazione della proposizione suddetta non dovrebbe suonare (come effettivamente suona)

"Keplero non morí in miseria",

ma bensí

"Keplero non morí in miseria, oppure il nome 'Keplero' è privo di significato".

La realtà è invece questa: il fatto che il nome Keplero denoti qualcuno, costituisce un presupposto tanto per l'asserto "Keplero morí in miseria" quando per l'asserto contrario.

Le lingue hanno generalmente il difetto di rendere possibili espressioni che per la loro forma grammaticale sembrano determinate, e cioè sembrano denotare un oggetto, mentre in alcuni casi questa loro determinatezza non è effettiva, dipendendo dalla verità di un'altra proposizione. Cosí dipende dalla verità dell'asserto "Vi fu un individuo, che scoperse la forma ellittica delle traiettorie dei pianeti", se la proposizione "Chi scoperse la forma ecc." denoti realmente qualcuno, o invece sembri soltanto denotarlo e risulti priva di significato.

È, analogamente, illusorio pensare che la nostra proposizione contenga, come parte del suo senso, il pensiero "Vi fu uno che scoperse la forma ellittica delle traiettorie dei pianeti." Se essa contenesse davvero questo pensiero, la sua negazione dovrebbe venir enunciata cosí

"Chi scoperse per primo la forma ellittica delle traiettorie dei pianeti non morí in miseria, oppure non vi fu nessuno che scoperse la forma ellittica di tali traiettorie."

Questa illusione è dunque dovuta, come abbiamo visto, a una incompletezza della lingua ordinaria.[1]

Va però notato che neanche la lingua concettuale matematica è immune da tale incompletezza; pure in essa, infatti, possono comparire complessi di segni che sembrano significare qualcosa, mentre — almeno finora — risultano di fatto privi di ogni significato. Tale, per esempio, l'espressione "successione infinita divergente". Si può evitare questa lacuna della lingua matematica, aggiungendo qualche convenzione speciale; per esempio, stabilendo che tutte le successioni infinite divergenti abbiano per significato lo zero.

Affinché una lingua (ideografia) risulti logicamente completa, si deve pretendere:

a) che ogni sua espressione che risulti costituita nella forma di nome proprio, a partire da segni già noti e secondo regole grammaticali esatte, denoti anche di fatto un oggetto;

b) che non venga introdotto in essa alcun nuovo segno come nome proprio, senza che gli sia assicurato un preciso significato.

I logici sogliono mettere in guardia contro le parole che hanno molti significati, considerandole come fonti di gravissimi errori. Io ritengo non meno giusto mettere in guardia contro i nomi propri apparenti, che non sono forniti di alcun significato.

Altri esempi (oltre quelli or ora accennati) del medesimo errore ci possono venire forniti dall'abuso di parole fatto nei discorsi demagogici. Cosí sarebbe facile constatare che l'espressione "la volontà del popolo" non denota alcun significato preciso, almeno generalmente riconosciuto.

È dunque senza dubbio importante eliminare una volta per sempre, almeno dal linguaggio scientifico, la fonte di questi errori. Una volta compiuta questa eliminazione, diventeranno impossibili le obiezioni sul tipo di quelle sopra discusse, perché non potrà piú dipendere dalla verità di un pensiero se un certo nome proprio abbia o no un significato.

[1] [Dall'analisi della proposizione secondaria "Chi scoperse ecc.", Frege si eleva qui ad alcune osservazioni generali della massima importanza circa la completezza delle lingue. La sua critica fu poi molto sfruttata da vari indirizzi moderni per dimostrare l'infondatezza di parecchie espressioni metafisiche.]

8. Nella nostra trattazione possiamo collegare alle proposizioni ora esaminate un tipo di proposizioni esplicative e avverbiali che logicamente sono molto affini a esse.

Anche le proposizioni esplicative servono a formare nomi propri composti, pur non bastando da sole a questo scopo come vi bastano invece le proposizioni nominali. Esse vanno ritenute analoghe agli aggettivi. Per esempio, invece di dire "la radice quadrata di 4 che è minore di zero" possiamo dire "la radice quadrata negativa di 4". Abbiamo qui il caso in cui da un nome di concetto si ottiene un nome proprio composto, introducendo l'articolo determinativo usato al numero singolare. Ciò è lecito ogniqualvolta sotto quel concetto cada uno e un solo oggetto.[1] Ora certi nomi di concetti possono risultare costituiti in modo che le loro note caratteristiche vengono proprio enunciate per mezzo di proposizioni esplicative; cosí accade nell'esempio di poco fa, in cui la nota è espressa dalla proposizione "che è minore di zero". Risulta chiaro che proposizioni esplicative siffatte non possono avere come senso un pensiero né come significato un valore di verità, proprio alla stessa stregua delle proposizioni nominali poco fa esaminate.

Il senso di una tale proposizione esplicativa sarà costituito soltanto da una parte di un pensiero, parte che in taluni casi può venire espressa anche per mezzo di un unico aggettivo. Qui pure, come per le proposizioni esaminate nelle pagine addietro, manca un soggetto indipendente, e quindi manca la possibilità di tradurre il senso della proposizione esplicativa (secondaria) in una proposizione principale a sé stante.

Spazi, istanti, intervalli sono — considerati da un punto di vista logico — oggetti; quindi l'indicazione linguistica di un determinato luogo o di un determinato istante o intervallo di tempo va considerata come un nome proprio. Orbene, per coniare tale nome proprio, possono venir usate proposizioni avverbiali di tempo o di luogo in modo analogo a quello sopra esaminato per le proposizioni nominali ed esplicative. Proprio cosí si riescono ad esprimere concetti che abbracciano in sé

[1] Dopo quanto osservammo poco fa, sarebbe sempre nostro dovere assicurare a una tale espressione un significato preciso per mezzo di qualche opportuna convenzione. Potremmo per esempio stabilire che il significato di tale espressione deve essere lo zero, quando sotto il suo concetto non cada alcun oggetto o ne cada piú di uno.

luoghi, tempi, ecc. Anche per queste proposizioni secondarie va osservato che il loro senso non può venir reso per mezzo di una proposizione principale; quest'ultima infatti non può contenere una parte che per esse è essenziale, cioè la specificazione dello spazio o del tempo (tale specificazione può venire indicata soltanto con un pronome relativo o con una congiunzione).[1]

Anche nelle proposizioni condizionali, analogamente a quello che abbiamo visto per le proposizioni nominali, esplicative, avverbiali, è contenuto il piú delle volte un termine di significato non preciso, cui ne corrisponde uno similmente impreciso nella proposizione che esprime la tesi. Poiché questi due termini si riferiscono l'uno all'altro, essi collegano le due proposizioni (quella che esprime l'ipotesi e quella che esprime la tesi) in un tutto unico, che esprime in genere un solo pensiero. Nella proposizione

"Se un numero è minore di 1 e maggiore di 0, anche il suo quadrato è minore di 1 e maggiore di 0",

questi due termini sono: nell'ipotesi "un numero" e nella tesi "il suo".

Per l'appunto questa imprecisione procura al senso della frase la generalità che ci si attende da una legge. Proprio essa però dimostra che la proposizione condizionale — da sola — non possiede come senso alcun pensiero completo. L'ipotesi esprime un pensiero solo unitamente alla tesi, e precisamente un pensiero unico, le cui parti non sono piú pensieri.

[1] Queste proposizioni secondarie possono peraltro venire interpretate in due modi leggermente diversi. Data per esempio la proposizione "Dopo che lo Schleswig-Holstein fu tolto alla Danimarca, Austria e Prussia entrarono in discordia fra loro", è chiaro che noi possiamo rendere il suo senso anche in quest'altra forma: "Dopo il distacco dello Schleswig-Holstein dalla Danimarca, Austria e Prussia entrarono in discordia fra loro." Si vede subito che, cosí inteso, il senso della nostra proposizione non contiene come sua parte il pensiero che lo Schleswig-Holstein venne una volta tolto alla Danimarca; tale avvenimento costituisce soltanto una condizione perché l'espressione "Dopo che lo Schleswig-Holstein ecc." abbia un significato. È certo tuttavia che esiste pure un altro modo di intendere il senso della proposizione anzidetta: essa può infatti venire interpretata proprio come se affermasse che una volta lo Schleswig-Holstein fu effettivamente tolto alla Danimarca. Esamineremo in seguito questa seconda interpretazione. Per ora ci importa chiarire bene la differenza fra le due. A tale scopo immaginiamo di immedesimarci nell'animo di un cinese il quale — per la sua scarsa conoscenza della storia europea — ritenga erroneo che una volta lo Schleswig-Holstein fu tolto di fatto alla Danimarca. Potranno allora presentarsi due possibilità: se egli accetta la prima interpretazione, riterrà il nostro asserto né vero né falso, ma privo di qualsiasi significato, essendo — a suo giudizio — priva di significato una proposizione secondaria di cui l'asserto risulta costituito (questa proposizione infatti conterrebbe, secondo lui, una determinazione temporale solo apparente); se invece accetta la seconda interpretazione, troverà nel nostro asserto un pensiero, che egli ritiene falso, accanto ad una parte che ritiene priva di significato.

È in generale inesatto affermare che in un giudizio ipotetico vengano posti in correlazione reciproca due giudizi diversi. Quando si asserisce questo o qualcosa di simile, si usa evidentemente la parola "giudizio" nel medesimo senso che io ho attribuito alla parola "pensiero",[1] sicché la stessa affermazione potrebbe venir enunciata dicendo "In un pensiero ipotetico vengono posti in correlazione due pensieri diversi". Orbene, ciò potrebbe esser vero, soltanto se l'ipotesi e la tesi non contenessero un termine di significato impreciso;[2] allora però verrebbe a mancare anche la loro generalità.

Se, nell'ipotesi e nella tesi, si deve accennare in modo indeterminato a un istante, lo si fa non di rado unicamente col *tempus praesens* del verbo, che in questo caso non indica il momento presente. Questa forma grammaticale è, allora, sia nella proposizione principale sia nella secondaria, la parte che non ha significato preciso. Ecco un esempio:

"Se il sole attraversa il tropico del Cancro, abbiamo nell'emisfero nord della Terra il giorno di durata massima."

Anche qui è impossibile esprimere il senso della proposizione secondaria per mezzo di una proposizione principale, poiché esso non è un pensiero completo. Se infatti dicessimo:

"Il Sole attraversa il tropico del Cancro",

noi riferiremmo questo fatto all'istante presente, e quindi muteremmo il senso della proposizione. Altrettanto può ripetersi per il senso della proposizione principale (tesi). Solo il tutto, costituito dalla proposizione principale e dalla secondaria, contiene un pensiero. In altri casi possono avere un significato indeterminato piú termini comuni all'ipotesi e alla tesi.

È evidente che proposizioni nominali, formate con i termini "chi", "che cosa", e proposizioni avverbiali formate con i termini "dove", "quando", "sempre dove", "sempre che", vanno spesso interpretate come proposizioni condizionali; cosí accade per esempio nel proverbio "Chi tocca il vischio vi resta impaniato."

[1] [E non nel senso, preciso, che Frege attribuí al termine "giudizio" nel paragrafo 5.]

[2] Talvolta questo termine specifico manca, e il significato impreciso va ricavato dal senso completo della proposizione. [Contenendo un termine che non denota nulla di preciso, l'ipotesi da sola non può costituire un pensiero. Altrettanto vale per la tesi. È quindi impossibile parlare di esse come di *due* pensieri diversi.]

Anche proposizioni esplicative possono tenere il posto di proposizioni condizionali. Ciò accade per esempio quando enunciamo l'asserto esaminato alcune pagine addietro in questa nuova forma:

"Il quadrato di un numero, che sia maggiore di 0 o minore di 1, è maggiore di 0 e minore di 1."

9. Le cose vanno in tutt'altro modo, se l'elemento comune alla proposizione principale e alla secondaria è rappresentato da un nome proprio. Esaminiamo per esempio l'affermazione:

"Napoleone, che si accorse del pericolo per il suo fianco destro, guidò egli stesso la sua Guardia contro la posizione nemica."

In essa sono espressi due pensieri:

1) Napoleone riconobbe il pericolo per il suo fianco destro;

2) Napoleone guidò egli stesso la sua Guardia contro la posizione nemica.

Quando e dove ciò avvenne può certamente venir appreso soltanto dal contesto generale del periodo; deve tuttavia riguardarsi come determinato da tale contesto.

Affermando l'intera nostra proposizione, noi affermiamo con ciò in un contempo le due parti che la costituiscono. Se una di esse è falsa, è falso di conseguenza il tutto. Abbiamo qui il caso, in cui già il senso della sola proposizione secondaria è un pensiero completo (supposto, naturalmente, che lo completiamo con un'indicazione di tempo e di luogo). Il significato di tale proposizione secondaria sarà perciò un valore di verità.

Possiamo dunque attenderci che la proposizione secondaria possa venir sostituita, senza pregiudizio per la verità del tutto, da un'altra proposizione avente lo stesso valore di verità. E cosí accade infatti nel nostro caso: si deve soltanto badare che il soggetto della nuova proposizione sia ancora Napoleone. Ciò per motivi puramente grammaticali; ossia perché solo in tal modo essa può venir usata nella forma di proposizione esplicativa del termine "Napoleone". Ma se si prescinde da quest'ultima esigenza — ammettendo per esempio che le due proposizioni possano venir collegate da un "e" — allora cade pure la condizione anzidetta.

Anche nelle proposizioni secondarie, che hanno inizio col termine

"sebbene", si trovano espressi pensieri completi. Questa congiunzione non ha, a rigor di termini, alcun suo senso specifico, nè muta il senso della proposizione cui viene preposta, ma lo illumina in una maniera particolare.[1] E invero potremmo, senza pregiudizio della verità del tutto, sostituire un asserto, esprimente qualche concessione, con un altro asserto provvisto dello stesso valore di verità; sorgerebbe allora quest'unico inconveniente: che la proposizione si troverebbe probabilmente in una luce fuori posto, come si volesse intonare su di un motivo allegro un canto di contenuto triste.

Negli ultimi casi citati la verità del tutto includeva quella delle parti. Non cosí accade quando una proposizione condizionale esprime un pensiero completo, contenendo un nome proprio, o qualcosa che gli si debba considerare equivalente, invece del termine esclusivamente indicativo.

Si consideri per esempio la proposizione:

> "Se in questo momento si è già levato il Sole, il cielo è fortemente nuvoloso."

In essa il tempo è rappresentato dal momento presente, e quindi è perfettamente determinato. Anche il luogo deve considerarsi come determinato. Si può dire che essa pone una relazione precisa tra i valori di verità dell'ipotesi e quelli della tesi; e precisamente che è impossibile sia vera la prima e falsa la seconda. Se ne conclude che la nostra proposizione è vera, tanto se il Sole nel momento presente non è ancora sorto, quanto se è sorto e il cielo è fortemente nuvoloso.

Poiché qui interessano soltanto i valori di verità, risulta possibile sostituire ognuna delle proposizioni parziali con un'altra, avente lo stesso valore di verità, senza alterare con ciò la verità del tutto. È certo che anche in questo caso una sostituzione siffatta porrebbe, il piú delle volte, l'asserto in una luce impropria, e ne risulterebbe un pensiero probabilmente insulso. Ma questo non ha nulla a che vedere col valore di verità della proposizione considerata.[2] Bisogna sempre tener presente

[1] Lo stesso può dirsi per le congiunzione "ma" e "però".

[2] [La relazione fra ipotesi e tesi qui accennata da Frege riprende il famoso rapporto di implicazione materiale che Frege stesso aveva già precisato nella sua *Ideografia*, e che sarà poi assunto da Bertrand Russell alla base dei suoi *Principia Mathematica*. L'implicazione materiale non denota un legame fra il contenuto di pensiero dell'ipotesi e quello della tesi; ma esclusivamente un rapporto fra i loro valori

che i nostri asserti suscitano in noi dei secondi pensieri, i quali però non sono effettivamente espressi e quindi non possono venir compresi nel senso delle proposizioni; non si può dunque attribuire importanza al loro valore di verità.[1]

10. Con ciò possono dirsi discussi i casi piú semplici. Diamo ora uno sguardo retrospettivo ai risultati della nostra ricerca.

La proposizione secondaria ha il piú delle volte come senso non un pensiero, ma soltanto una parte di esso, e quindi non ha per significato un valore di verità. Questo trova la sua spiegazione o nel fatto che le parole della proposizione secondaria hanno il loro senso indiretto, sicché il significato (e non il senso) della proposizione stessa è costituito da un pensiero; o nel fatto che la proposizione secondaria è incompleta perché un suo termine possiede soltanto un significato indeterminato, sicché essa può esprimere un pensiero solo unitamente alla proposizione principale.

Si dànno però anche dei casi nei quali il senso della proposizione secondaria risulta un pensiero completo, e allora essa può venir sostituita, senza pregiudizio della verità del tutto, da un'altra proposizione avente lo stesso valore di verità (nei limiti in cui non vi si oppongano impedimenti di carattere grammaticale).

Se dopo di ciò esaminiamo tutte le proposizioni secondarie possibili, se ne incontrerà subito qualcuna che non si lascia inquadrare nella nostra classificazione. Il motivo risiede, a mio parere, nel fatto che essa non avrà un senso semplice.

È chiaro che noi colleghiamo quasi sempre a un pensiero principale, espresso, alcuni pensieri secondari che, sebbene non espressi, il nostro interlocutore connette alle nostre parole secondo leggi psicologiche. E poiché essi sembrano naturalmente collegati alle nostre parole quasi come il pensiero principale, ne seguirà che noi intendiamo esprimere insieme con il pensiero principale anche tali pensieri secondari. Ciò arricchisce il senso della proposizione, e può accadere che noi abbiamo

di verità; in altri termini, in essa è lecito sostituire una delle parti componenti con un'altra proposizione qualsiasi avente lo stesso valore di verità.]

[1] Il pensiero della nostra proposizione potrebbe anche venire cosí espresso: "O in questo momento non è ancora sorto il Sole, o il cielo è fortemente nuvoloso." Tale nuova forma ci fa vedere come vada concepito questo genere di collegamento fra proposizioni.

piú pensieri semplici che non proposizioni. In taluni casi la proposizione va interpretata in questo modo, in altri risulta dubbio se il pensiero secondario appartenga con quello principale al senso della proposizione, o se lo accompagni soltanto.[1]

Si potrebbe forse ritenere che nella proposizione:

"Napoleone, il quale si accorse del pericolo per il suo fianco destro, guidò egli stesso la sua Guardia contro la posizione nemica",

risultino espressi non soltanto i due pensieri indicati dall'analisi di poco fa, ma anche il pensiero che la percezione del pericolo fu il motivo per cui Napoleone guidò la sua Guardia contro la posizione nemica. In realtà non è molto chiaro se quest'ultimo pensiero sia soltanto suggerito o effettivamente espresso.

Per veder bene la cosa, domandiamoci se la nostra proposizione risulterebbe falsa nel caso che la decisione di Napoleone fosse già stata presa prima di accorgersi dell'anzidetto pericolo. Qualora, malgrado quest'ipotesi, la nostra proposizione fosse ancora vera, il pensiero secondario di cui sopra non andrebbe concepito come parte costitutiva del senso della nostra proposizione. Probabilmente ci si deciderà per questa interpretazione. Nel caso opposto, la situazione si complicherebbe: noi avremmo allora come proposizioni piú pensieri semplici.

Se ora alla proposizione

"Napoleone si accorse del pericolo per il suo fianco destro",

ne sostituiamo un'altra con il medesimo valore di verità, per esempio la seguente:

"Napoleone aveva già piú di 45 anni",

veniamo a modificare non solo il primo ma anche il terzo dei nostri pensieri, e potrebbe quindi riuscir alterato il valore di verità di quest'ultimo (ciò accade di fatto se l'età di Napoleone non influí nella sua decisione di guidare la propria Guardia contro il nemico). Si comprende da ciò perché — in tali casi — non si possano sempre sostituire l'una all'altra due proposizioni con lo stesso valore di verità. In essi infatti una proposizione esprime, per trovarsi connessa con un'altra, piú di quel che esprime da sola.

Esaminiamo dunque i casi, nei quali si verifica qualcosa di simile.

[1] Questo fatto può risultare di importanza decisiva per risolvere il problema se un dato asserto sia o no una menzogna, e se un dato giuramento costituisca o no uno spergiuro.

E, al solito, rivolgiamo la nostra attenzione a un esempio concreto:

"Bebel si illude che, colla restituzione dell'Alsazia-Lorena, possano venir placati i desideri di vendetta della Francia."

Qui si trovano espressi due pensieri, dei quali però non è vero che l'uno appartenga alla proposizione principale e l'altro alla secondaria. Essi sono:

1) Bebel ritiene che, con la restituzione dell'Alsazia-Lorena, possano venir placati i desideri di vendetta della Francia;

2) con la restituzione dell'Alsazia-Lorena non possono venir placati i desideri di vendetta della Francia.

Nell'espressione del primo pensiero, le parole della proposizione secondaria hanno il loro significato indiretto, mentre le stesse parole, nell'espressione del secondo pensiero, hanno il loro significato usuale. Vediamo di qui che, nel nostro periodo primitivo, la proposizione secondaria va considerata come l'insieme di due proposizioni aventi significati diversi: uno dei quali è un pensiero, l'altro un valore di verità. Orbene, dato che il valore di verità non costituisce l'intero significato della proposizione secondaria, ne segue che noi non possiamo sostituirla semplicemente con un'altra proposizione avente lo stesso valore di verità.

Si ripete una situazione analoga nelle espressioni come "sapere", "comprendere", "è noto".

Anche con una proposizione causale e con la sua proposizione principale, noi esprimiamo diversi pensieri, che però non corrispondono a uno a uno a quelle proposizioni. Per esempio nella proposizione:

"Il ghiaccio galleggia sull'acqua perché ha un peso specifico minore di essa"

sono espressi i seguenti pensieri:

1) il ghiaccio ha un peso specifico minore dell'acqua;

2) se qualcosa ha un peso specifico minore dell'acqua, galleggia su di essa;

3) il ghiaccio galleggia sull'acqua.

Il terzo pensiero potrebbe non venire espresso, essendo contenuto nei due primi. Al contrario, né il primo e il terzo insieme, né il secondo e il terzo, potrebbero costituire da soli il senso della proposizione. È chiaro che nella nostra proposizione secondaria "Perché il ghiaccio

ha un peso specifico minore dell'acqua" viene espresso tanto il nostro primo pensiero quanto, in parte, anche il secondo. Questo è il motivo per cui non possiamo sostituirla semplicemente con un'altra che abbia lo stesso valore di verità; con una tale sostituzione infatti si verrebbe pure a modificare il nostro secondo pensiero e da ciò potrebbe risultare intaccato anche il valore di verità di esso.

Similmente accade nella proposizione:

"Se il ferro avesso un peso specifico minore dell'acqua, galleggerebbe su di essa."

Abbiamo qui i due pensieri:

1) che il ferro non possiede un peso specifico minore dell'acqua;
2) che ciò che ha peso specifico minore dell'acqua galleggia su di essa.

La proposizione secondaria esprime di nuovo un pensiero e una parte dell'altro.

Se nell'asserto poco sopra esaminato:

"Dopo che lo Schleswig-Holstein fu tolto dalla Danimarca, Austria e Prussia entrarono in discordia fra loro"

vogliamo vedere espresso anche il pensiero che lo Schleswig-Holstein venne, una volta, tolto alla Danimarca, allora troviamo in tale asserto due pensieri:

1) in primo luogo quello ora accennato;
2) in secondo luogo il pensiero che Austria e Prussia vennero in discordia fra loro in un tempo piú particolarmente determinato dalla proposizione secondaria.

Anche qui, allora, la proposizione secondaria esprime non soltanto un pensiero, ma anche una parte di un altro. Perciò non ci può essere lecito sostituirla con un'altra proposizione qualsiasi avente lo stesso valore di verità.

11. È difficile esaurire tutte le possibilità che si presentano nella lingua; spero ciò malgrado di avere sostanzialmente rintracciato i principali motivi per causa dei quali non in ogni caso una proposizione secondaria può venire sostituita da un'altra con lo stesso valore di verità senza che tale sostituzione comprometta la verità di tutto il periodo.

Questi motivi sono:

1) che, in certi casi, la proposizione secondaria non ha per significato un valore di verità, poiché esprime soltanto la parte di un pensiero;
2) che, in altri casi, la proposizione ha bensì per significato un valore di verità, ma non si limita a esso, in quanto il suo senso non abbraccia un solo pensiero ma pure qualche parte di un altro.

Il primo caso ha luogo:

a) quando le parole che compongono la proposizione secondaria hanno il loro significato indiretto;
b) quando qualche termine della proposizione secondaria, invece di essere un nome proprio, denota soltanto in forma indeterminata un oggetto.

Nel secondo caso è possibile che la proposizione secondaria vada presa in due modi diversi, e cioè una volta nel suo significato comune e l'altra volta in quello indiretto; ovvero che il senso di una parte della proposizione secondaria intervenga pure nel costituire qualche altro pensiero il quale forma — insieme col pensiero immediatamente espresso nella proposizione secondaria — l'intero senso delle due proposizioni, principale e secondaria.

Da tutto ciò si ricava, con sufficiente probabilità, che i casi, nei quali una proposizione secondaria non può venir sostituita da un'altra avente lo stesso valore di verità, non dimostrano proprio nulla contro la tesi da noi esposta alcune pagine addietro, e cioè contro la tesi secondo cui il valore di verità costituisce il significato di una proposizione mentre il suo senso è costituito da un pensiero.

12. Torniamo ora, finalmente, al nostro punto di partenza.[1]

Se, in generale, viene giudicato diverso il valore conoscitivo delle due proposizioni "$a = a$" e "$a = b$", questo si spiega col fatto che, in tale valore, bisogna tener conto tanto del senso della proposizione (cioè

[1] [Malgrado la sua schematica brevità, il paragrafo 12 è della massima importanza. Esso mostra come — dalle teorie esposte nei primi paragrafi del capitolo e in ispecie nel paragrafo 5 — segua nel modo più preciso la soluzione delle aporie insite nel principio di identità. In particolare mostra come il passaggio da una proposizione a un'altra, avente lo stesso valore di verità della prima, possa costituire un vero progresso nella conoscenza. Così risultano chiaramente stabilite le basi generali per una rivalutazione filosofica dei giudizi analitici (in senso leibniziano) e quindi di tutta la logica formale.]

del pensiero in essa espresso), quanto del suo significato (cioè del suo valore di verità).

Se è vera l'uguaglianza $a = b$, allora il significato di "b" è certo identico a quello di "a", e quindi il valore di verità della proposizione "$a = b$" è identico al valore di verità della proposizione "$a = a$".

Ciò malgrado il senso di "b" può risultare diverso da quello di "a", e quindi il pensiero espresso nella proposizione "$a = b$" può essere diverso da quello espresso in "$a = a$"; allora anche il valore conoscitivo delle due proposizioni risulterà senza dubbio diverso. In tale caso se conveniamo, come sopra, di intendere per "giudizio" il sollevarsi dal pensiero al suo valore di verità, dovremo anche dire che i due giudizi sono diversi.

4.

Recensione a "Il principio del metodo infinitesimale e la sua storia" di Hermann Cohen

[Per Hermann Cohen (1842-1918), fondatore della scuola neo-kantiana di Marburg, la scienza è la stessa filosofia, in quanto quest'ultima costituisce l'origine, il nucleo piú profondo ed essenziale della prima. Muovendosi su una linea sostanzialmente hegeliana, Cohen è convinto di poter ricavare dalla sostanza stessa del pensiero tutte le determinazioni del reale. Distaccandosi dalle interpretazioni positivistiche di Kant, allora largamente diffuse nell'ambiente culturale tedesco, egli rimprovera al filosofo di Königsberg di essere rimasto troppo legato all'esperienza, avendo fatto precedere l'intuizione al pensiero: viceversa, per Cohen, il pensiero non ha un'origine al di fuori di sé e produce da sé stesso la conoscenza pura. In altri termini, è il pensiero stesso che origina il proprio contenuto, non ricavandolo da una materia offertagli dalle sensazioni, ma esclusivamente dalla propria attività. Questo contenuto viene direttamente costituito dall'unità attiva del giudizio, e sono proprio le diverse specie del giudizio a produrre le varie forme di conoscenza e di oggetti. Nel suo sviluppo logico il pensiero inizia con giudizi di qualità, cui seguono immediatamente giudizi di quantità. Questi ultimi costituiscono il pensiero matematico, il quale — in accordo con quanto già detto per il pensiero puro in generale — non ammette nulla come dato, ma genera da sé stesso i suoi concetti: di qui l'alto valore metodico della matematica, caratterizzata appunto da Cohen come *metodo* dell'intuizione pura. Dal momento che l'origine della dinamica del pensiero matematico è la produzione dell'infinitesimale, dovremo vedere in questa "unità infinitesima", ossia nel differenziale — che in quanto prodotto dal pensiero è per sua natura indipendente da ogni forma di sensazione — non solo un'adeguata rappresentazione matematica, ma addirittura il fondamento e l'origine stessa della realtà.

Cosí inquadrata la dottrina di Cohen è di per sé "pitagorica"; nessuno stupore quindi che nell'opera esaminata da Frege egli faccia "luogo all'affascinante pensiero" del filosofo greco: in altra occasione infatti, Cohen affermerà esplicitamente che il detto di Pitagora "il numero è l'essenza delle cose" rimane anche nell'epoca moderna la vera guida valida del pensiero. La differenza è che i Greci, limitati alla

considerazione dell'insieme discreto dei numeri naturali, non potevano far sorgere una scienza matematica della natura che rendesse conto del movimento nella sua realtà essenzialmente continua; ciò invece è reso possibile alla matematica moderna proprio in virtú della scoperta dell'infinitesimale. Le considerazioni precedenti fanno intuire, in ogni caso, la giustificazione storica in cui Cohen — come Frege rileva — cerca il fondamento per l'adozione di determinate ipotesi nel corpo della scienza.

L'opera [1] di Cohen qui recensita da Frege apparve nel 1883, quale anticipazione dell'ultimo volume (*Estetica della sensazione pura*, 1912) della trilogia con cui egli era venuto esponendo il suo sistema; e il tipo di analisi filosofico-matematizzante in essa sviluppata — oggi completamente superata dai moderni indirizzi metodologici — incontrava in quel periodo un notevole favore, specie in Germania, ove veniva considerata come una precisazione del profondo significato della scienza in contrapposizione alle superficiali interpretazioni di essa date dai positivisti. D'altra parte proprio nello stesso periodo l'Analisi veniva acquistando consapevolezza dei suoi fondamenti — specie per opera di Weierstrass, Cantor e Dedekind — e all'autore dei *Fondamenti* non poteva sfuggire che l'opera di Cohen, accanto a un impiego artificioso dei concetti matematici, rivelava una totale ignoranza dei risultati di tale elaborazione critica. Nella sua recensione Frege intende colpire principalmente questa assenza di rigore nelle argomentazioni del filosofo idealista.]

Poiché nella matematica, piú che nelle altre scienze, la materia sfugge e viene dominata dal pensiero, e poiché la sua struttura concettuale è particolarmente ricca e finemente sviluppata, proprio questa scienza è specificamente adatta a servire come base per ricerche teoretico-conoscitive e logiche. Qui vi è una miniera che è ancora suscettibile di maggiore sfruttamento. Se in questa direzione, all'infuori di Kant, è stato realizzato ancora poco, ciò è dovuto principalmente al fatto che solo raramente si trovano riuniti un pensare corrente matematico e filosofico e conoscenze sufficienti in entrambi i campi. Anche il libro che stiamo esaminando mi sembra naufraghi contro questo scoglio. Non voglio certo escludere completamente la possibilità che forse la mia insufficiente comprensione mi impedisca di apprezzarlo pienamente. Tuttavia arrischio una discussione, nell'intento di causare, forse, con essa, uno scambio di idee chiarificatore, e desiderato dall'autore stesso, e perché, nel caso piú sfavorevole, credo di essere giustificato dal modo di scrivere di Cohen, che non brilla affatto per chiarezza e talvolta è

[1] [H. COHEN, *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte* (Dümmler, Berlino 1883).]

addirittura illogico.[1] In 33 (p. 28) l'autore parla dell'ipotesi della realtà intensiva, e prosegue:

"Questa ipotesi è il senso della realtà e il segreto del concetto di differenziale." Orbene: l'ipotesi della realtà intensiva è il senso della realtà; ma qual è, di grazia, il senso di questa proposizione?

"Le leggi di Galileo sulla caduta dei gravi sono il prototipo delle forze naturali" (48, p. 47).

"Cosí, questo valore di validità della realtà, ricercato dalla scienza naturale matematica in via di fondarsi, risulta costituito dall'infinitesimale" (58, p. 70).

"Si deve pensare anche la grandezza intensiva come principio" (68, p. 89).

"Si dovrà dire, piú precisamente, che la realtà, la quale inizia la propria attività già nel punto della geometria, la termina e la completa nei problemi della materia che costituiscono l'oggetto della fisica" (94, pp. 137 sg.).

Non trovo, in tutto questo, quella tendenza alla precisione e all'incontestabilità logica dell'espressione, che, sole, possono garantire al pensiero la sua chiarezza in ricerche di questo tipo. E tale garanzia merita molta piú fiducia di quella che Cohen inferisce dall'accordo collo sviluppo storico del problema (p. III). Egli sbaglia nel ritenere che inizialmente solo l'esame storico possa svelare ciò che può considerarsi come un'ipotesi logica della scienza. Al contrario: quei fondamenti logici vengono proprio in ogni caso scoperti solo tardi, dopo che già è stata raggiunta una considerevole estensione del sapere. Il punto di partenza storico appare per lo piú, sotto una prospettiva logica, come qualcosa di casuale.

Voglio tentare ora di rendere brevemente il pensiero fondamentale dell'autore.

Cohen stabilisce un collegamento molto singolare fra realtà e differenziale, rifacendosi, a quanto pare, alle anticipazioni della percezione, il cui principio, secondo Kant, è: "In tutte le apparenze, il reale, che

[1] [A conferma del giudizio qui espresso da Frege, giustificato peraltro, come si vedrà, dagli esempi riportati nel corso della recensione, vogliamo ricordare le seguenti parole di Lehmann: "Cohen è il gran sacerdote della scienza. Il suo discorso è grave, oscuro, fiorito e sempre patetico. Egli è ricco di pensieri, ma senza dubbio ancor piú ricco di parole."]

è un oggetto della sensazione, possiede grandezza intensiva, ossia un grado." Ora, il differenziale è una grandezza intensiva. Sia x, per esempio, un segmento di una retta; allora dx, suo differenziale o incremento infinitamente piccolo, non va pensato come grandezza estensiva, né parimenti come segmento; ciò porterebbe a contraddizioni ed è proprio per il fatto di aver voluto considerare il differenziale assolutamente come grandezza estensiva, che ci si è trovati nelle note difficoltà. Siffatte difficoltà non possono venir eliminate dalla logica, bensí dalla critica della conoscenza — espressione che l'autore usa nel senso di "gnoseologia" — in quanto questa presenta il numero infinitesimale quale grandezza intensiva avente, come tale, il potere di conferire realtà: "Esso non rappresenta soltanto *l'unità di realtà, ma come tale conferisce realtà;* esso fornisce all'essere la realtà nella qualità" (45). "Se il *differenziale* fa valere la *realtà* come una condizione del pensiero in via di costituzione, l'*integrale* contrassegna *il reale come oggetto*" (99). Il dx va quindi concepito all'incirca come una grandezza intensiva aggiunta all'estremo di x, paragonabile a una carica elettrica; cioè come una forza rivolta ad accrescere il segmento, press'a poco come è riconoscibile una tendenza all'accrescimento nella gemma terminale di un ramo. Queste immagini non sono dell'autore, mi sono venute in mente leggendo il libro. Riporto da questo una frase, per confronto:

"*L'unità di realtà* determina, in quanto tale, un punto assoluto, in modo che la retta non solo si estende fino a questo punto come proprio limite, ma da esso scaturisce" (68, p. 91), dove bisogna osservare che per unità di realtà si deve intendere il differenziale.

L'antitesi fra estensivo e intensivo riconduce a quella fra intuizione e pensiero, dato che la qualità corrispondente alla grandezza intensiva è una categoria del pensiero. La grandezza estensiva dell'intuizione si contrappone dunque a quella intensiva della sensazione. Per ogni conoscenza oggettiva le due fonti di conoscenza debbono congiungersi l'una all'altra (21). Il pensiero della realtà è lo strumento che rende possibile penetrare laddove l'intuizione da sola fallisce (33); infatti questa ha il carattere dell'idealità. Se l'infinitesimale deve risultare adatto all'esigenza di fare quanto occorre alla realtà, esso deve essere sottratto all'intuizione, sempre che la realtà debba significare una con-

dizione dell'esperienza *per parte del pensiero* (22). Conformemente a questo anche la continuità viene separata dall'intuizione e assegnata al pensiero (42 e 58).

È ora che esprima le mie riserve contro un tal modo di pensare. Noto ovunque l'assenza di dimostrazioni. Già il passaggio kantiano dalla qualità del giudizio alla realtà qualitativa e alla grandezza intensiva mi sembra problematico. Checché si pensi di ciò, l'antitesi fra numeri ordinari e numeri infinitesimali non può comunque essere concepita come la contrapposizione estensivo-intensivo. Qui non si opera una sufficiente distinzione fra ciò che è aritmetico e le sue applicazioni alla geometria e alla meccanica. Il calcolo infinitesimale, nella sua essenza, è puramente aritmetico, e non è lecito, per la definizione o la giustificazione dei suoi concetti fondamentali, rifarsi alla geometria o alla meccanica, malgrado che l'inizio storico di esso sia proprio legato a problemi geometrici e meccanici. Dal problema aritmetico del differenziale, che del resto è oggi senza dubbio quasi risolto, occorre tener ben distinta la seguente questione: quali proprietà debbono essere ipotizzate per le grandezze spazio-temporali, affinché il calcolo differenziale risulti applicabile alla geometria e alla meccanica? Orbene, la distinzione fra grandezza intensiva e grandezza estensiva non ha alcun senso nell'aritmetica pura. Né peraltro ha alcuna importanza in tutta la matematica. Il numero 3, per esempio, può servire come misura di un segmento rispetto a un'unità di lunghezza; ma può anche servire come misura di una grandezza intensiva, per esempio di una intensità luminosa, misurata per mezzo di una intensità unitaria. Il calcolo procede, in entrambi i casi, del tutto secondo le medesime leggi. Il numero 3 non è quindi una grandezza estensiva nè intensiva: è semplicemente al di sopra di questa antitesi. E lo stesso vale anche per l'infinitamente piccolo. A questo punto, forse, Cohen darebbe la seguente risposta: l'intensità luminosa non è una grandezza intensiva, bensí estensiva; cosí però egli andrebbe manifestamente contro l'uso della lingua. Rilevo questo da un punto (110, p. 158), nel quale l'autore contrappone alla grandezza intensiva della sensazione la grandezza estensiva dello stimolo. Anche altre volte giunge a conclusioni sorprendenti. In 102 (p. 147) fa luogo all'affascinante pensiero di tipo pita-

gorico: "Il dx, con i suoi ordini superiori, contiene *il fondamento della possibilità di un'illimitata diversità delle qualità* e delle cose" e "La distinzione della qualità è da pensarsi come una distinzione della realtà, e come riconducibile ai diversi ordini dell'infinitamente piccolo." Poiché fa corrispondere la sensazione al differenziale, l'autore giunge alla conclusione (106, p. 154): "La sensazione, piú ancora dell'intuizione, si presenta come il vero e proprio punto interrogativo della matematica." Al contrario! La matematica pura non ha nulla a che fare con la sensazione.

Sembra che l'autore concepisca la realizzazione mediante l'infinitesimale nel senso che, dalla forza d'accrescimento, per esempio di un segmento, questo venga generato; ma esso è forse, con tale procedimento, diventato piú reale di quanto lo siano le figure della geometria? Senza dubbio l'oggettivizzare non è sempre chiaramente distinto dal realizzare. Si può ben concedere oggettività, non però vera e propria realtà, agli oggetti geometrici, come appunto afferma Cohen stesso; ma fino a che punto cambia qui qualcosa il fatto di pensare le figure generate con continuità? Non posso trovare che l'infinitamente piccolo abbia una connessione piú stretta con la realtà. E neppure capisco in che maniera il principio delle anticipazioni della percezione possa essere interpretato nel modo testé accennato, o come si possa dedurre da esso che la grandezza intensiva o il differenziale abbiano il potere di conferire realtà. Cohen asserisce che la realtà intensiva è un autentico principio, al quale andrebbe il merito del fatto che i metodi della matematica possono entrare in reciproci rapporti. Si fa qui riferimento all'anzidetto principio kantiano, oppure, in caso contrario, come si enuncia e come si applica il principio vantato dal nostro autore? Cohen non si scomoda affatto a enunciare chiaramente, almeno una volta, questo principio cosí spesso menzionato.

Per quanto riguarda la fondazione del calcolo differenziale, io credo che si debba tornare al concetto di limite nel senso dell'analisi, che l'autore, certamente solo per un malinteso, disprezza come un concetto "negativo". Nei miei *Fondamenti dell'aritmetica*[1] ho accennato come

[1] [P. 298, n. 1 del presente volume.]

si possa conservare una certa indipendenza al differenziale, pur con questo tipo di fondamento.

Trascurando dei punti particolari, che non stanno in stretto collegamento col pensiero fondamentale, voglio soltanto aggiungere che sono d'accordo con Cohen circa il fatto che non come processo psichico la conoscenza costituisce oggetto della gnoseologia, e che di conseguenza quest'ultima va nettamente separata dalla psicologia.

5.

Recensione alla "Teoria del transfinito" di Georg Cantor

[Il lavoro di Cantor *Zur Lehre vom Transfiniten*[1] qui recensito da Frege, si compone di quattro lunghi articoli che Cantor era venuto scrivendo sulla "Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik" fra il 1886 e il 1888. Il primo di essi porta il titolo *Über die verschiedenen Standpunkten in Bezug auf das actuale Unendliche* (da uno scritto dell'autore a G. Eneström di Stoccolma, del 4 novembre 1885) e apparve nel volume 88 (1886) della rivista citata. I tre successivi hanno il titolo comune *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten* (apparsi i primi due nel volume 91 (1887) il terzo nel volume 92 (1888)) e il primo di essi è sotto forma di lettere a un "grande teologo morto nel dicembre del 1886" e non meglio specificato da Cantor e a vari scienziati fra cui Weierstrass e Vivanti.

In essi Cantor presenta la sua teoria dei cardinali transfiniti e dei tipi d'ordine, dopo aver sviluppato un'ampia e dotta discussione di carattere extramatematico rivolta a chiarire da punti di vista diversi la problematica connessa all'accettazione dell'infinito attuale. L'infinito attuale, secondo Cantor, può presentarsi in tre rapporti distinti:

1) in quanto esso è realizzato nella sua piú alta completezza, nell'essere assoluto e indipendente, extramondano, *in Deo*, nel qual caso egli lo chiama *assoluto*;

2) in quanto esso ricorre nel mondo dipendente delle creature, *in concreto*: a esso Cantor riserva il nome di *transfinito*;

3) infine in quanto esso può essere concepito in astratto, come grandezza matematica, numero o tipo d'ordine del pensiero: per il qual caso Cantor usa ancora il nome di *transfinito*.

Ora, mentre è compito particolare della teologia speculativa quello di indagare sull'infinito assoluto per determinare quanto umanamente può di esso, le questioni riguardanti il transfinito sono fondamentalmente di dominio della metafisica e della matematica. Tra le due forme di infinito attuale si equivoca molto di frequente, quando si confondono *transfinito* e *assoluto*. La distinzione fra i due — afferma

[1] [Articoli raccolti a cura di Robert Stricker per l'editore Pfeffer (Halle 1890).]

Cantor — è al contrario nettissima, in quanto il primo è sí un infinito, suscettibile però di ulteriori incrementi, mentre il secondo non possiede questa proprietà e va quindi pensato come non definibile matematicamente. Da Kant in poi, in effetti, si è appreso a considerare l'assoluto come il limite ideale del finito; ma in realtà questo limite può vanir pensato — a parere di Cantor — come *transfinito*, e precisamente come il minimo di *tutti i transfiniti*, corrispondente al piú piccolo numero soprannumerabile, da Cantor indicato con ω.

Dei tre rapporti sopra esposti in cui può essere implicato l'infinito attuale, Cantor si disinteressa dunque del primo e passa a considerare i due rimanenti; essi, variamente combinati fra loro, possono dar luogo a quattro differenti posizioni. Cosí, infatti:

a) si può rigettare l'infinito attuale tanto in concreto quanto in astratto (Cauchy, positivisti);

b) si può affermarlo in concreto e rigettarlo in astratto (Descartes, Spinoza, Leibniz, Locke);

c) si può affermarlo in astratto e rigettarlo in concreto (varie correnti fra i neoscolastici);

d) si può infine affermarlo in entrambi i rapporti.

Cantor si pone — come è noto — proprio in questa quarta posizione, affermativa senza condizioni, relativamente ai tre punti di vista enumerati all'inizio di questa nota; è conscio d'altra parte che pochi scienziati condividano la sua posizione, anzi pensa di essere il solo ad affrontare il problema con serietà scientifica.

Cantor introduce quindi la teoria dei cardinali transfiniti e dei tipi d'ordine. Sarebbe troppo lungo, e richiederebbe notevoli complicazioni matematiche, anche solo accennare qui all'argomento. Ricorderemo soltanto, perché direttamente interessante le pagine seguenti di Frege, che Cantor, a partire da un insieme di elementi qualunque, giunge al concetto di *potenza* (*Mächtigkeit*) dell'insieme in parola, con una doppia astrazione dalla natura e dall'ordine degli elementi stessi.

La recensione di Frege non riguarda la "tecnica" strettamente matematica di Cantor; ed è favorevole senza riserve alle ardite concezioni che il fondatore della moderna teoria degli insiemi veniva introducendo nella scienza. L'appunto che Frege muove a Cantor riguarda ancora una volta il procedimento definitorio, punto cruciale in ogni teoria, in quanto destinato ad immettere nella teoria stessa nuovi concetti; tale immissione deve risultare *fruttuosa*, e ciò dipende in massima parte dal "contenuto" del nuovo concetto; ma non deve condurre a contraddizioni e va quindi fatta con scrupolosa osservanza delle leggi logiche. Su questo secondo aspetto si incentra la critica di Frege: e, in effetti, i procedimenti astrattivi cantoriani su menzionati non risultano sempre possibili, ad esempio non nel caso che l'insieme su cui si dirigono sia l'insieme unitario o l'insieme vuoto; a parte questo, non conducono a determinazioni univoche. In questo senso Frege accusa Cantor di pretendere "astrazioni impossibili".

Per l'argomento qui trattato si potrà consultare utilmente anche la critica di Frege alla teoria cantoriana dei numeri reali (parte quinta del volume).]

Poiché i presenti saggi sono apparsi in questo periodico,[1] posso supporre noto il loro contenuto e limitarmi a darne un giudizio. Essi perseguono il loro scopo — che è quello di portare al riconoscimento dell'infinito proprio — in parte negando, col confutare le dimostrazioni tentate contro di esso, in parte affermando, col dimostrare la sua esistenza. Le considerazioni sono di due tipi: teologico-religioso-filosofiche, e matematiche. Mi sia qui permesso di limitare il mio esame a queste ultime, che già da sole offrono ricca materia di discussione. La confutazione delle obiezioni contro l'infinito mi sembra, nel complesso, ben riuscita e appropriata. Tali obiezioni derivano dal fatto che all'infinito vengono attribuite proprietà che non gli spettano, sia in quanto gli si trasferiscono, come evidenti, proprietà del finito (p. 3), sia in quanto si trasferisce a tutti gli infiniti una proprietà che spetta solo all'infinito assoluto. L'aver energicamente additato la distinzione entro l'infinito, è un merito di questo lavoro. Tutto ciò riguarda solo l'infinito proprio, "attuale". Una parte dell'opposizione che si riscontra fra i matematici al riconoscimento dell'infinito attuale è imputabile alla confusione che si fa di esso con l'infinito potenziale; tale opposizione è legittima solo se rivolta contro la pretesa di concepire quest'ultimo quale infinito proprio. A causa di essa, molti scienziati ammettono solo l'infinito potenziale. Ora Cantor felicemente mostra che questo infinito presuppone l'infinito proprio o attuale, cioè che il "limite in mutamento" non può fare a meno di un percorso infinito, se deve via via mutare senza interruzione (p. 30, nota). Meno felice è Cantor allorché definisce. Già non vi riesce bene quando si tratta di esprimere l'infinito potenziale. Lo chiama finito variabile (p. 7, p. 28).[2] Ma la parola "variabile" (al pari di "crescere"), può essere usata appropriatamente solo in relazione a qualche seconda cosa, insieme con la quale vari la prima. Se essa ricorre apparentemente in modo non correlativo, gli è perché di solito ci si riferisce al tempo, rispetto al quale qualcosa varia. Ma immischiare il tempo non è precisamente

[1] [La "Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik".]

[2] ["Malgrado l'essenziale diversità tra l'infinito *attuale* e l'infinito *potenziale*, in quanto il primo significa una *grandezza finita variabile*, crescente al di là di ogni limite finito, mentre il secondo significa un *quantum* (quantità) *in sé fisso*, *costante*, ma che tuttavia giace al di là di ogni grandezza finita, è purtroppo fin troppo frequente il caso che l'uno venga confuso con l'altro." (G. CANTOR, *op. cit.*, p. 28).]

nelle intenzioni dell'autore, e sarebbe anche controproducente, mentre d'altra parte un uso propriamente non correlativo della nostra parola è un non senso. L'infinito potenziale viene anche chiamato grandezza indeterminata (p. 53); ma le grandezze indeterminate esistono altrettanto poco quanto gli uomini indeterminati.

Se Cantor avesse non solo recensito, ma anche letto con ponderazione i miei *Fondamenti dell'aritmetica*, avrebbe certo evitato molti errori. Credo di aver già fatto da tempo, in quel lavoro, quanto egli cerca invano di fare qui. Cantor ripete (p. 13) come se fosse un suo patrimonio spirituale, una definizione che aveva dato nella recensione al mio libro. Allora mi sembrò che essa differisse dalla mia in modo non essenziale, solo per l'espressione (e lo dichiarai anche in una replica) e fui incline a pensare che egli, con sue ricerche personali, fosse giunto a risultati praticamente coincidenti con i miei. Ora invece mi accorgo che le verità espresse nel mio libro non erano disseminate su una strada, sicché bastasse chinarsi per raccoglierle. Cantor aggiunge infatti altre definizioni (p. 23 e p. 56), dalle quali risulta come sia ancora completamente fermo a una posizione ormai invecchiata. Egli pretende astrazioni impossibili[1] e rimane oscuro sul problema, che cosa debba intendersi per "insieme", sebbene un'idea di verità baleni quando dice (p. 67, nota): "Un insieme risulta già pienamente individuato dal fatto che tutto ciò che gli appartiene sia determinato in sé e ben distinto da tutto ciò che non gli appartiene." Questa individuazione si effettua naturalmente per mezzo di note caratteristiche ed è null'altro che la definizione di un concetto. Si confronti con la mia definizione (*Fondamenti*, § 46): "L'attribuzione di un numero contiene sempre un'affermazione intorno a un concetto." Non posso ripetere in questa sede quanto ho esposto minutamente nel mio libro. Per non lasciare la mia asserzione completamente infondata, mi limito a ricordare che qui ricorrono ancora, naturalmente, quelle infelici unità che risultano

[1] [Infatti, per l'insieme contenente un solo elemento (insieme unitario) già non ha senso astrarre dall'ordine degli elementi; mentre per l'insieme non contenente alcun elemento (insieme vuoto) perde significato anche l'astrarre dalla natura degli elementi: a rigore quindi, volendo seguire le indicazioni cantoriane, dovremmo rinunciare alla considerazione della *potenza* (numero cardinale) dei due insiemi menzionati. Questa conseguenza non rientrava ovviamente nelle intenzioni di Cantor, e denuncia quindi la deficienza di un rigoroso fondamento logico della sua teoria della definizioni per astrazione: deficienza che Frege giustamente mette in luce nel corso di questa sua recensione.]

diverse fra loro, pur non distinguendosi per nulla una dall'altra. Manifestamente l'autore non ha avuto neppure la piú pallida idea dell'esistenza di questa difficoltà, che io ho trattato minuziosamente nei paragrafi dal 34 al 54 dei miei *Fondamenti.* La sua definizione (p. 61, nota) di insieme finito, è analoga nel suo nucleo concettuale, a quella che dò io per il numero finito (*Fondamenti,* § 83); viene però sviluppata in modo erroneo: che cosa significa infatti l'affermazione che "L'elemento originario può a sua volta venir ottenuto da *M* mediante successivo allontanamento degli elementi in ordine inverso"? Questo "potere" dovrebbe essere meglio determinato, specificando quali impedimenti non debbano venir calcolati; già per un insieme finito, infatti, potrebbero esistere ostacoli insuperabili, per esempio la brevità della nostra vita. Qui affiora dannosamente quella piega psicologica e quindi empirica che Cantor, sicuramente controvoglia, dà alla cosa; infatti questo allontanamento deve pur essere un processo psichico. Ho già definito esattamente nella mia *Ideografia*[1] e in seguito nei miei *Fondamenti* (§ 81), senza ricorrere al tempo, ciò che l'autore vuol dire con la parola "successivo"; ivi è anche chiaramente riconoscibile la connessione con l'induzione completa. Qualcosa di analogo ha fatto Dedekind, nel suo lavoro "Essenza e significato dei numeri", con le sue catene. Questo autore presenta (§ 5, 64, p. 17), come nota caratteristica per l'infinito, quella di essere simile a una sua parte propria (o, come direbbe Cantor, equipotente a una sua parte costitutiva), in modo che il finito resta determinato come non-infinito, mentre Cantor, al pari di me, cerca anzitutto di definire il finito, dopo di che l'infinito si caratterizza come non-finito. Entrambi i procedimenti sono validi, e può anche dimostrarsi facilmente che i sistemi infiniti di Dedekind sono non-finiti nel mio senso. Questa proposizione è reversibile; la sua dimostrazione risulta però abbastanza difficoltosa e nel lavoro di Dedekind non è certamente condotta con molto rigore.

In VI, Cantor tratta la questione se vi siano grandezze numeriche infinitamente piccole nel senso dell'infinitesimo attuale, e nega che siano tali quelle che possono rappresentarsi sotto forma di segmenti rettilinei continui e limitati. La dimostrazione non è completamente

[1] [Si confronti — nella prima parte del nostro volume — il terzo capitolo dell'opera citata, in particolare il paragrafo 26 e seguenti.]

svolta, ma ne ritengo valida la parte principale. Ma se l'autore presume di poter trasformare l'assioma di Archimede in un teorema, allora debbo oppormi, almeno fin tanto che, cosí facendo, si pensi di risparmiare un assioma. In effetti non si fa che sostituire un assioma con un altro. Il nuovo potrebbe infatti enunciarsi cosí: esiste sempre un numero ordinale, finito o transfinito, tale che un segmento finito, individuato da due punti distinti, moltiplicato per tale numero, origini un segmento maggiore di un segmento dato. Qui il termine "moltiplicato" dovrebbe essere inteso nel senso di Cantor. Non trovo questo assioma piú chiaro di quello archimedeo, nel quale il termine "πολλαπλασιαζόμενα" ha il senso usuale di "moltiplicato". Il nuovo assioma affermerebbe evidentemente di meno, ma a tale scopo conterrebbe anche concetti piú difficili.

Per quanto concerne poi i numeri ordinali e i tipi d'ordine, debbo stimare il fondamento che ne dà Cantor altrettanto insufficiente quanto quello dei numeri cardinali. Egli indica come si debba astrarre per ottenerli. Una tale indicazione, però, non può valere come definizione; in essa infatti, o viene presupposto come noto ciò che deve definirsi, oppure esso non viene determinato univocamente nel caso in cui l'astrazione risulti sí possibile, ma non in un solo modo. Inoltre, la parola "astrarre", è un'espressione psicologica e come tale va evitata in matematica. Con ciò non voglio negare però che quanto Cantor vuol cogliere possa venir definito in modo non obiettabile. Non può ancora predirsi quale importanza assumeranno per la matematica i tipi d'ordine. Forse essi raggiungeranno una piú stretta connessione con le altre parti della matematica, intrecciando un rapporto fecondo. Non potrei escluderlo.

Non voglio chiudere questa discussione senza ripetere, con piena approvazione, una frase dell'autore (p. 19): "Cosí vediamo la potente scepsi accademico-positivistica ... ora imperante in Germania, finalmente giunta anche all'aritmetica, dove sembra trarre le ultime conseguenze che ancora le sono possibili, con il risultato piú clamoroso e forse per lei medesima piú fatale." Proprio cosí! Questo è lo scoglio dove essa si fermerà: dal momento che l'infinito, in definitiva, non può venir negato nell'aritmetica, e che d'altra parte esso è inconciliabile con l'indirizzo teoretico-conoscitivo in questione. È qui, mi sembra, il campo di battaglia dove avverrà una grande decisione.

6.

Recensione alla "Filosofia dell'aritmetica" di Edmund Husserl

[Facciamo terminare questa terza parte del nostro volume con la recensione che Frege dedicò, nel 1894, alla *Filosofia dell'aritmetica* di E. Husserl.[1] Essa è di carattere nettamente diverso dalle due precedenti: da una parte infatti, la sua estensione ci permette di qualificarla come un vero e proprio piccolo saggio "antipsicologistico", dall'altra la prospettiva in cui Frege qui si pone è sensibilmente piú ampia, in quanto egli non si arresta — come nelle precedenti — a un rapido esame dell'opera, ma ne compie un'indagine dettagliata, elevandosi non di rado a considerazioni logiche di portata generale.

Le pagine che seguono sono senza dubbio fra le piú suggestive che Frege abbia scritto. Raggiunta l'anno prima la piena maturità del suo pensiero — *Senso e significato* era stato pubblicato nel 1892, seguito subito dopo (1893) dal primo volume dei *Princípi* — egli la rivela qui oltre che nella natura delle critiche mosse al pensiero del primo Husserl, anche nell'esposizione serena ed equilibrata, talvolta garbatamente ironica, di tali critiche; serenità ben lontana ad esempio dall'aspra irruenza delle ultime polemiche che egli condurrà contro i formalisti nel secondo volume dei *Princípi* (parte quinta del nostro volume).

Husserl è troppo noto in Italia, perché si pensi qui di dover fare una succinta esposizione del suo pensiero; per quanto riguarda in particolare l'opera presa in esame da Frege, l'estensione stessa e la chiarezza della recensione ci esime da illustrarne in questa sede il contenuto e l'interesse. Ci limitiamo ad osservare — come già si è accennato — che le critiche di Frege costituirono molto probabilmente uno dei fattori determinanti per lo sviluppo del pensiero husserliano dalla prima fase, di impostazione psicologistica, alla seconda, piú propriamente fenomenologica.

L'opera husserliana di cui qui si tratta apparve come primo di due volumi, il secondo dei quali — che non venne neppur composto — doveva riguardare la semeiotica.]

[1] [E. G. HUSSERL, *Philosophie der Arithmetik - Psycologische und logische Untersuchungen,* vol. I (Pfeffer, Lipsia 1891); la recensione di Frege apparve nel N. 103 della "Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik".]

Nell'introduzione dell'opera l'autore decide di considerare preliminarmente i numeri (*cardinalia*) e inizia con un chiarimento su moltitudine, pluralità, *Inbegriff*,[1] aggregato, raccolta, insieme. Usa queste parole come aventi essenzialmente lo stesso significato; dal quale sarebbe distinto il concetto di numero. Tuttavia il rapporto logico fra numero e moltitudine (p. 9) non risulta completamente chiaro. Per un lato, infatti, si potrebbe concludere una loro uguaglianza estensionale, in base alle seguenti parole: "Il concetto di numero, sia pur solo nel passare attraverso le estensioni dei suoi concetti specifici, i numeri due, tre, quattro, ... comprende gli stessi fenomeni concreti del concetto di moltitudine"; d'altra parte, moltitudine deve essere piú indeterminato e generale di numero. Probabilmente la cosa risulterebbe piú chiara se si fosse stabilita una distinzione piú precisa fra il cadere sotto un concetto e la subordinazione.[2] In primo luogo si tende ora all'analisi del concetto di moltitudine. Da questo poi, mediante determinazioni, debbono scaturire i numeri determinanti e il concetto generico [3] di numero, che li presuppone. Siamo quindi condotti prima dal generale al particolare, per risalire poi in senso inverso.

Inbegriffe sono totalità le cui parti sono collegate collettivamente. Noi dobbiamo avere coscienza di queste parti come osservate in sé. Il collegamento collettivo non consiste nel fatto che i contenuti si trovino contemporaneamente nella coscienza, né nel fatto che essi vi subentrino uno dopo l'altro. Neppure lo spazio, come forma onnicomprensiva, rende ragione della riunione. Il collegamento consiste (43) nell'atto unificante stesso. "Non sussiste però, accanto all'atto, un contenuto correlativo distinto dall'atto stesso come suo risultato creativo." Il collegamento collettivo è una relazione *sui generis*. A questo

[1] [Questo termine è difficilmente traducibile in italiano: esso può significare l'*astratto* concettuale di una certa classe, la caratteristica piú profonda di un certo concetto, oppure può essere usato — come qui fa Frege — quale sinonimo per moltitudine, insieme, mucchio. Abbiamo quindi preferito conservare la dizione tedesca.]

[2] [Il cadere *sotto* un concetto, o sussunzione, è una relazione che intercorre esclusivamente fra oggetti da una parte e concetti di primo grado dall'altra; la subordinazione invece, o cadere in un concetto, è una relazione che ha luogo esclusivamente fra concetti, quando uno di essi cade *in* un altro grado superiore. Per una esposizione estremamente chiara della teoria freghiana del concetto si veda la lettera a Liebmann, nella parte quarta del presente volume; per una discussione piú ampia e approfondita si confronti l'articolo *Oggetto e concetto*. Per una prima delineazione del problema si confronti il paragrafo 53 dei *Fondamenti* e p. 289, n. 2.]

[3] [Ossia del numero in quanto genere.]

punto viene spiegato, in accordo con John Stuart Mill, che cosa debba intendersi per "relazione", e precisamente lo stato di coscienza o il fenomeno (espressioni queste che debbono coincidere nell'estensione del loro significato), nel quale sono compresi, quali fondamenti della relazione, i contenuti considerati (70). Viene quindi introdotta la distinzione fra relazioni primarie e relazioni psichiche. Qui ci interessano particolarmente solo queste ultime. "Se un atto psichico unificante si dirige su piú contenuti, è in considerazione di esso che questi sono collegati o correlati fra loro. Se compiamo un tale atto, allora è naturale che noi cercheremmo invano una relazione o un collegamento nel contenuto della rappresentazione che esso comprende (se infatti ci fosse, esisterebbe ancora una relazione primaria, oltre al predetto atto unificante). I contenuti sono qui unificati soltanto attraverso l'atto, e solo con una riflessione particolare su di esso può venire osservata questa unificazione" (73). Di questo stesso tipo è anche la relazione di diversità, con la quale si mettono in relazione due contenuti, mediante un evidente giudizio negativo (74). L'uguaglianza, al contrario, è una relazione primaria (77). (Di conseguenza dovrebbe essere tale anche la coincidenza completa, mentre la sua negazione, che è proprio la diversità, sarebbe una relazione psichica. Manca qui la distinzione fra la relazione di diversità e il collegamento collettivo — che secondo l'opinione dell'autore è esso pure una relazione psichica — in quanto risulta intuitivo che in tale collegamento non può venire osservata alcuna unificazione nel contenuto della rappresentazione.) Se si parla di contenuti "privi di nessi reciproci", allora essi vengono semplicemente pensati "insieme", cioè pensati come *Inbegriff*. "In realtà però, essi non sono affatto senza collegamento o senza relazioni. Al contrario, essi sono collegati mediante l'atto psichico che li riunisce. Soltanto nel contenuto di questo atto manca ogni unificazione osservabile" (78). La congiunzione "e" fissa in modo completamente appropriato la circostanza che dati contenuti siano collegati in modo collettivo (81). "Una rappresentazione ... cade sotto il concetto di moltitudine, inquantoché collega in modo collettivo certi contenuti osservati" (82). (Qui con "rappresentazione" sembra venir inteso un atto.) "Moltitudine in generale ... è null'altro che: una certa cosa e una certa cosa e una certa cosa ecc.; oppure un qualche uno e un qualche uno e un qualche uno ecc.; piú brevemente:

uno e uno e uno ecc." (85). Se togliamo l'indeterminazione, che è contenuta nell' "ecc.", otteniamo i numeri uno e uno; uno, uno e uno; uno, uno, uno e uno; e cosí via. Giungiamo anche direttamente a questi concetti, partendo da moltitudini concrete arbitrarie; ognuna di esse, infatti, cade sotto uno, e precisamente uno, di questi concetti (87). Astraiamo, a questo scopo, dalla speciale particolarità dei singoli contenuti compresi nella moltitudine, riteniamo solo quella di essere un qualcosa o uno, e otteniamo cosí, in considerazione del collegamento collettivo dei contenuti stessi, la forma generale della moltitudine, corrispondente alla moltitudine data innanzi a noi; cioè il numero corrispondente (88). In questa astrazione numerica è implicito un completo sfumare dei contenuti (100). Non potremmo spiegare altrimenti il concetto generale di numero, se non indicando la similitudine di tutti i concetti di numero fra loro (88).

Dopo aver brevemente esposto i pensieri fondamentali della prima parte, voglio ora caratterizzare, in generale, questo tipo di considerazioni. Siamo di fronte a un tentativo di giustificare per via scientifica un modo ingenuo di concepire il numero. Chiamo ingenua ogni opinione secondo la quale l'attribuzione di un numero non è un'affermazione intorno a un concetto o all'estensione di un concetto, perché a concezioni siffatte si è indotti, con una certa necessità, proprio all'atto della prima riflessione sul numero. Ora, una concezione può dirsi propriamente ingenua solo finché restano ignote le difficoltà a essa contrarie, cosa che non si verifica del tutto per l'autore. L'opinione piú ingenua è quella che ritiene il numero qualcosa come un mucchio, uno sciame, nel quale le cose sono contenute con tutte le loro qualità. Ne segue la concezione del numero come una proprietà di un mucchio, di un aggregato, o come altrimenti si voglia chiamarlo. A questo punto si avverte la necessità di purificare gli oggetti dalle loro proprietà particolari. Orbene, il tentativo del nostro autore rientra nel novero di quelli che si propongono di operare questa purificazione immergendo gli oggetti nel calderone psicologico, il quale offre il vantaggio che in esso le cose assumono una malleabilità tutta speciale, non cozzano piú cosí rigidamente nello spazio, e lasciano cadere molte scomode proprietà e distinzioni. Il miscuglio, oggi cosí gradito, di psicologia e logica, serve da buona lisciva a questo scopo. Dapprima tutto diventa rappresentazione. I significati delle

parole sono rappresentazioni, è quindi importante, ad esempio per la parola "numero", produrre la rappresentazione corrispondente, descriverne l'origine e la composizione. Gli oggetti sono rappresentazioni. Cosí John Stuart Mill, con piena approvazione dell'autore, farebbe rientrare oggetti (*whether physical or mental*) in uno stato di coscienza, come sue parti costitutive (70). Ma la Luna, per esempio, non dovrebbe essere un po' indigesta per uno stato di coscienza? Dal momento che tutto è rappresentazione, possiamo variare con facilità gli oggetti, concentrando o stornando da essi la nostra attenzione. Particolarmente efficace è quest'ultimo metodo. Badiamo meno a una proprietà ed essa scompare. Cosí, facendo scomparire una nota caratteristica dopo l'altra, otteniamo concetti sempre piú astratti. Anche i concetti sono dunque rappresentazioni, solo un po' meno complete, degli oggetti; di questi essi conservano ancora le proprietà dalle quali non si è fatta astrazione. La disattenzione è una forza logica della piú alta efficacia; si spiega cosí, probabilmente, la distrazione dei dotti. Supponiamo, per esempio, che siano seduti davanti a noi, uno accanto all'altro, un gatto nero e uno bianco. Non badiamo al loro colore: essi diventano incolori, restano però ancora vicini. Non badiamo al loro atteggiamento: essi non sono piú seduti, senza aver tuttavia assunto una diversa positura; ognuno però sta ancora al suo posto. Non badiamo piú al posto dove sono: essi diventano senza posto (*ortlos*), rimanendo peraltro ancora ben separati. In questo modo abbiamo forse ottenuto da ognuno di essi un concetto generale di gatto. Ogni oggetto, con prolungata applicazione di questo procedimento, si trasforma in un fantasma sempre piú esangue. In definitiva, otteniamo cosí da ogni oggetto un qualcosa di completamente evanescente come contenuto; ma il qualcosa ricavato da un oggetto, si distingue tuttavia dal qualcosa ricavato da un altro oggetto, malgrado non sia facile dire in che modo. Un momento, però! Quest'ultimo passaggio al qualcosa appare tuttavia piú difficile, per lo meno l'autore parla (86) di riflessione sull'atto psichico del rappresentare. Però, qualunque sia il modo in cui si svolge, in ogni caso il risultato è quello già riferito. Mentre il portare un oggetto sotto un concetto significa soltanto, a mio parere, riconoscere una relazione preesistente al nostro atto, per l'autore invece questo portare altera in modo essenziale gli oggetti, sicché tutti gli oggetti portati sotto uno stesso concetto,

divengono fra loro piú simili. Forse la cosa può concepirsi anche nel senso che per ogni oggetto si origini una nuova rappresentazione, nella quale vengono a mancare tutte le determinazioni che non ricorrono nel concetto. Scompare con ciò la distinzione fra concetto e rappresentazione, fra rappresentare e pensare. Tutto si svolge nel soggettivo. Ma proprio per il fatto che viene cancellato il confine fra soggettivo e oggettivo, anche il soggettivo, viceversa, assume l'aspetto dell'oggettivo. Si parla ad esempio di questa o di quella rappresentazione, come se essa si lasciasse vedere pubblicamente, disgiunta dal soggetto che ha tale rappresentazione. Eppure nessuno ha le rappresentazioni di un altro, bensí solo la sua particolare e parimenti nessuno può sapere fino a che punto la sua rappresentazione — mettiamo del rosso — coincida con quella di un altro; non posso infatti esternare la caratteristica particolare della rappresentazione che io collego alla parola "rosso". Per poterle confrontare, le rappresentazioni dell'uno e dell'altro dovrebbero essere state riunite nella stessa coscienza, e dovrebbe risultare certo che in questo passaggio esse non siano mutate. Per i pensieri, la cosa è del tutto diversa: uno stesso e identico pensiero può essere colto da molti uomini. Le parti del pensiero, e tanto piú le cose stesse, vanno distinte dalle rappresentazioni che accompagnano in uno spirito la concezione di un pensiero, e che ognuno si fa delle cose. Ora, dal momento che nella parola "rappresentazione" si riuniscono soggettivo e oggettivo, si cancella il loro confine, sicché a volte una rappresentazione nel vero senso della parola viene trattata come qualcosa di oggettivo, a volte invece si tratta qualcosa di oggettivo come una rappresentazione. Cosí, per l'autore, l'*Inbegriff* (l'insieme, la moltitudine) compare ora come rappresentazione (15, 17, 24, 82), ora come ente oggettivo (10 e 11, 235). Ma, in fondo, non è un diletto innocente chiamare la Luna, per esempio, una rappresentazione? Certo! Fintanto però che non si presuma di poterla arbitrariamente trasformare o generare con mezzi psicologici. Purtuttavia è questa la troppo facile conseguenza.

Partendo dal modo di pensare logico-psicologico or ora caratterizzato, è facile capire quale sia il parere dell'autore sulle definizioni. Un esempio tratto dalla geometria elementare può chiarirlo. In questa disciplina si suol definire: "Un angolo retto è un angolo che è uguale al suo adiacente." A questo proposito l'autore direbbe, probabilmente: "La

rappresentazione dell'essere ad angolo retto è semplice: per la qual cosa è completamente erroneo volerne dare una definizione. Nella nostra rappresentazione dell'essere ad angolo retto, non rientra assolutamente la relazione con l'angolo adiacente. È certamente esatto affermare: i concetti 'angolo retto' e 'angolo che è uguale al suo adiacente' hanno uguale estensione; ma non è vero che essi abbiano anche lo stesso contenuto. Si è definita l'estensione del concetto, invece del suo contenuto. Se la definizione fosse giusta, allora ogni asserzione sull'esser ad angolo retto riguarderebbe sempre e soltanto il rapporto con un altro angolo, invece di riguardare come tale la coppia di lati che è concretamente presente. Tutto quanto posso concedere è (114) che l'uguaglianza con l'angolo adiacente costituisca un criterio necessario e sufficiente per l'essere ad angolo retto." L'autore giudica in modo analogo la definizione di uguaglianza numerica ottenuta per mezzo del concetto di corrispondenza biunivoca. "Il criterio piú semplice per stabilire l'uguaglianza dei numeri consiste proprio nell'ottenere il *medesimo* numero dal conteggio degli insiemi da confrontare" (115). Naturalmente! Il modo piú semplice per esaminare l'essere ad angolo retto consiste nel servirsi di un rapportatore. L'autore dimentica che lo stesso conteggio testé accennato si basa proprio su una corrispondenza biunivoca, precisamente quella che intercorre fra i termini numerici (*Zahlwörter*) da 1 a *n* e gli oggetti dell'insieme. Ognuno dei due insiemi va contato. Con questo procedimento la cosa diventa meno semplice che se noi consideriamo una relazione la quale faccia corrispondere fra loro gli oggetti dei due insiemi, senza l'uso della numerazione.

Se le parole e i nessi di parole significano rappresentazioni, dati due qualunque di essi sono possibili due soli casi: o denotano la stessa rappresentazione o denotano rappresentazioni distinte. Nel primo caso il porli uguali a mezzo di una definizione è inutile, è un "circolo palese" nel secondo caso è falso. Queste sono anche le obiezioni, alle quali suol ricorrere il nostro autore. Neppure ad analizzare il senso possiamo far uso di una definizione; infatti il senso analizzato non è piú l'originario. O, con la parola da spiegare, penso chiaramente tutto quello che penso con l'espressione definiente, e allora abbiamo il "circolo palese"; oppure l'espressione definiente ha un senso piú riccamente articolato e allora con essa non penso la stessa cosa che con la parola

da spiegare: in tal caso la definizione è falsa. Si dovrebbe pensare, tuttavia, che la definizione fosse esente da obiezioni per lo meno nel caso in cui la parola da spiegarsi non avesse assolutamente alcun senso — o quando si richiede espressamente di considerare questo senso come non esistente — poiché in tal modo essa ne acquisterebbe uno soltanto per mezzo della definizione. Ma anche in quest'ultimo caso (107) l'autore confuta la definizione facendo appello alla diversità delle rappresentazioni. Dopo di che, per sfuggire a ogni obiezione, si dovrebbe proprio creare una nuova radice linguistica e formare da questa una parola nuova. Si evidenzia qui una divergenza fra i logici psicologici e i matematici. Ai primi interessano il senso delle parole e le rappresentazioni, che essi non distinguono dal senso, ai secondi invece interessa la cosa stessa, il significato delle parole.[1] L'obiezione che venga definito non il concetto, ma la sua estensione, colpisce a rigore tutte le definizioni della matematica. Per il matematico è perfettamente equivalente definire una sezione conica come curva ottenuta dalla intersezione di un piano con una superficie conica circolare, o definirla invece come curva piana la cui equazione, in un sistema di assi coordinati, sia di secondo grado. Quale delle due, o di altre ancora, egli scelga, dipende solo da questioni di convenienza, sebbene le anzidette espressioni non abbiano lo stesso senso, né provochino rappresentazioni identiche. Con questo non intendo asserire che concetto ed estensione di un concetto coincidano; ma che la coincidenza delle estensioni sia indicazione necessaria e sufficiente affinché abbia luogo fra i concetti la relazione che corrisponde all'uguaglianza per gli oggetti.[2] Osservo qui che adopero la parola "uguale", senza ulteriori specificazioni, nel senso di "non diverso", "coincidente", "identico". Come per le definizioni, ai logici psicologici difetta in generale la comprensione per l'uguaglianza; questa relazione non può rimanere per loro che qualcosa di completamente misterioso; se infatti le parole denotassero in tutto e per tutto delle rappresentazioni, non si potrebbe mai dire "*A* è lo stesso di *B*"; infatti, per poterlo fare, si dovrebbe già distinguere *A* da *B*, e allora esse sareb-

[1] Prego di confrontare, sull'argomento, il mio articolo *Senso e significato*, apparso in questo periodico.

[2] In senso vero e proprio, questa relazione non ha infatti luogo per i concetti. Si confronti il mio articolo *Oggetto e concetto* pubblicato nel periodico per la filosofia scientifica. [La rivista di Avenarius. "Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie".]

bero appunto rappresentazioni distinte. Concordo nondimeno con l'autore, sia pure per ragioni diverse dalle sue, sul fatto che la spiegazione di Leibniz "eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate" non meriti di essere chiamata definizione. Dato che ogni definizione è un'uguaglianza, non può definirsi l'uguaglianza stessa. Quella spiegazione leibniziana potrebbe esser chiamata principio che esprime l'essenza della relazione di uguaglianza ed è, come tale, di importanza fondamentale. La spiegazione dell'autore (108) "Di contenuti qualsiasi diciamo semplicemente che sono fra loro uguali, se l'uguaglianza... sussiste in quei caratteri che formano esattamente il centro dell'interesse", non mi va assolutamente a genio.

Affrontiamo ora piú da vicino i particolari! L'autore è dell'opinione che l'attribuzione di un numero riguardi l'*Inbegriff* (l'insieme, la moltitudine) degli oggetti contati (185). Un tale *Inbegriff* trova la sua espressione perfettamente appropriata nella congiunzione "e". Di conseguenza ci si dovrebbe aspettare che tutte le attribuzioni numeriche avessero la forma "A e B e C e ... Q è n" o che, per lo meno, potessero venir riportate a questa. Ma cosa ricaviamo, in effetti, per mezzo della proposizione "Berlino e Dresda e Monaco sono tre" ovvero, il che deve essere lo stesso, "Berlino e Dresda e Monaco sono qualcosa e qualcosa e qualcosa"? Chi potrebbe prendersi la pena di rivolgere una domanda, per ottenere una risposta di questo genere? Con questo non si vuol certo dire che Berlino è diverso da Dresda, questa da Monaco e Monaco da Berlino, e in effetti, per lo meno nella seconda forma, non viene stabilita né la diversità di Berlino e Dresda, né la loro uguaglianza. È tuttavia singolare che questa forma di affermazione numerica non ricorra quasi mai nella vita, e, se ricorre, non venga pensata quale attribuzione di un numero. Trovo che essa venga usata appropriatamente solo in due casi: nel primo, col termine numerico "due"; per esprimere diversità — "Rape e colza sono due" — nel secondo, col termine numerico "uno", per esprimere uguaglianza — "Io e mio padre siamo uno." — Questo esempio è particolarmente infausto, in quanto, secondo l'autore, si dovrebbe dire "sono qualcosa e qualcosa", oppure "sono due". In realtà, non chiediamo "quanti sono Cesare e Pompeo e Londra e Edimburgo" o "quanto è Gran Bretagna e Irlanda", e sono curioso di sapere cosa risponderebbe l'autore a queste domande.

Si chiede, al contrario, per esempio "Quante lune ha Marte?", oppure "Qual è il numero delle lune di Marte?" e, attraverso la risposta "Il numero delle lune di Marte è due", si viene a sapere qualcosa su cui vale la pena di interrogare. Vediamo dunque che tanto nella domanda, quanto nella risposta, interviene, in vece dell' "e" richiesto dall'autore, un'espressione concettuale o una denotazione complessiva di concetti. Come si trae d'impaccio l'autore? Egli dice che il numero spetta all'estensione del concetto, cioè all'*Inbegriff*. "Solo indirettamente si può dire tutt'al piú che il concetto gode della proprietà ... che il numero spetta alla sua estensione" (189). Con ciò è propriamente concesso tutto quanto asserisco io: nella attribuzione di un numero viene asserito qualcosa di un concetto. Non discuterò sul fatto se l'affermazione verta direttamente sul concetto e indirettamente sulla sua estensione, o indirettamento sul concetto e direttamente sull'estensione; infatti, con l'una cosa succede anche l'altra. Tanto è certo: che direttamente non vengono denotati né l'estensione di un concetto né un *Inbegriff*, ma viene denotato solo un concetto. Orbene, se l'autore usasse l'espressione "estensione di un concetto" nel mio stesso senso, avremmo opinioni di poco diverse sul senso dell'attribuzione di un numero. Il fatto è che questo non succede: infatti l'estensione di un concetto non è un *Inbegriff* nel senso dell'autore. Un concetto sotto il quale cada un solo oggetto ha un'estensione altrettanto determinata quanto un concetto sotto cui non cada alcun oggetto, o sotto cui ne cadano infiniti, casi nei quali, per Husserl, non esiste proprio alcun *Inbegriff*. Il senso delle parole "estensione del concetto di luna di Marte" è diverso da quello delle parole "Deimos e Febo" e la proposizione "il numero di Deimos e Febo è due", se contiene, in generale, un pensiero, lo contiene certamente diverso da quello della proposizione "il numero delle lune di Marte è due". Ora, dal momento che non si usa mai una proposizione di quella forma per fare un'attribuzione numerica, l'autore non ha còlto il senso di tale attribuzione.

Consideriamo adesso un po' da vicino le pretese origini di un *Inbegriff* (77 e seguenti). Debbo confessare che non mi è riuscito di formarmi un *Inbegriff* secondo le istruzioni dell'autore. Col collegamento collettivo, i contenuti debbono venir pensati o rappresentati semplicemente insieme, senza che venga rappresentata una loro qualunque relazione

o un loro qualsiasi nesso (79). A me questo non è possibile. Non riesco a rappresentarmi contemporaneamente il rosso, la luna e Napoleone senza alcun collegamento fra loro; per esempio, il rosso di un villaggio che brucia, dal quale si stacchi la figura di Napoleone, illuminato a destra dalla luna. Ciò che mi è presente contemporaneamente, me lo rappresento come un tutto; e non posso prescindere dal collegamento, senza appunto perdere questo tutto. Presumo che nel mio spirito non esista affatto ciò che l'autore chiama "*Inbegriff*", "insieme", "moltitudine", e cioè una rappresentazione di parti di cui non viene simultaneamente rappresentata l'unificazione, malgrado che essa esista. Cosí non fa meraviglia che Husserl stesso dica piú oltre (242), a proposito di un insieme, che esso possiede un momento figurativo, una struttura, che lo caratterizza come un tutto. Egli parla (235) di successioni, sciami, catene, mucchi, come tipi particolari d'insieme. E nella rappresentazione di uno sciame non dovrebbe essere osservabile alcuna unificazione? Oppure questa unificazione è presente accanto al collegamento collettivo? Ma allora essa non riguarderebbe l'*Inbegriff*, e il "momento figurativo" non potrebbe servire a distinguere i vari tipi d'insieme. Come giunge l'autore alla sua opinione? Probabilmente perché in corrispondenza alle parole e ai nessi di parole cerca rappresentazioni determinate come loro significati. Quindi anche al nesso di parole "rosso e la luna e Napoleone", dovrebbe corrispondere una rappresentazione totale, e poiché il semplice "e" non esprime proprio alcuna relazione o unificazione rappresentabili, nessuno di tali nessi potrebbe venir rappresentato. A questo si aggiunge ancora quanto segue. Se l'unificazione delle parti venisse rappresentata insieme con esse, quasi tutte le nostre rappresentazioni sarebbero *Inbegriff*, per esempio lo sarebbe la rappresentazione di una casa altrettanto bene quanto quella di uno o di un mucchio; tuttavia, in questo caso, è facile osservare che un numero come proprietà di una casa o della rappresentazione di una casa sarebbe qualcosa di assurdo.

L'Autore stesso trova una difficoltà nell'astrazione che fornisce il concetto generale di *Inbegriff* (84): "Bisogna astrarre completamente ... dalle particolarità dei singoli contenuti collegati, ma contemporaneamente stabilire bene il loro collegamento. In questo sembra insita una difficoltà, se non addirittura un'impossibilità psicologica. Se facciamo

sul serio quell'astrazione, anche il collegamento collettivo, invece di rimanere come estratto concettuale, scompare assieme ai contenuti singoli. La soluzione non è lontana. Astrarre da qualcosa significa semplicemente: non badare a essa in modo particolare."

Il nocciolo di questa esposizione sta evidentemente nelle parole "in modo particolare". La disattenzione è una lisciva molto penetrante, che non va usata troppo concentrata, affinché non dissolva il tutto, ma neppure troppo diluita, affinché produca una variazione sufficiente. Tutto si riduce quindi al giusto grado di diluizione, che è difficile cogliere; a me per lo meno non è riuscito.

Tuttavia, dal momento che l'autore, in definitiva, concorda fondamentalmente con me sul fatto che nell'attribuzione di un numero sia contenuta un'affermazione intorno a un concetto, posso esimermi dall'indagare piú da vicino le sue ragioni contrarie. Voglio solo far notare che egli non ha compreso la mia distinzione fra note caratteristiche e proprietà;[1] della qual cosa non è da meravigliarsi, visto il suo modo logico-psicologico di concepire. Cosí egli giunge al punto di ascrivermi l'opinione che, con l'attribuzione numerica, si tratti di effettuare una determinazione, una precisazione del concetto. Nulla mi è mai stato piú estraneo.

Gli scogli pericolosi per le vedute ingenue sull'essenza del numero, in particolare per quella psicologica, sono tre. Il primo sta nel modo di poter conciliare l'uguaglianza delle unità col loro essere distinte. Il secondo è costituito dai numeri zero e uno, il terzo dai numeri grandi. Esaminiamo come l'autore cerchi di superare questi scogli. Per il primo riporta (156) le mie parole: "Se cerchiamo di far sorgere il numero dalla riunione di vari oggetti, otteniamo un mucchio, in cui ciascun oggetto conserva le sue proprietà caratteristiche che lo differenziano dagli altri, e questo non è il numero. Se invece cerchiamo di far sorgere il numero dalla riunione di entità uguali, otteniamo sempre soltanto l'uno e non mai la moltitudine."[2] È chiaro che qui ho usato la parola "uguale" nel senso di "non diverso". Non mi tocca quindi il rimprovero del-

[1] [Come è noto, Frege chiama "note caratteristiche" di un concetto i concetti parziali che concorrono a determinarlo, ossia le proprietà possedute da un oggetto che cade sotto il concetto stesso; mentre le "proprietà" di un concetto si riferiscono direttamente al concetto in quanto tale. Si confronti la lettera a Liebmann, nella parte quarta del presente volume.]

[2] [*I fondamenti dell'aritmetica*, § 39.]

l'autore, secondo il quale avrei scambiato l'uguaglianza con l'identità. Husserl tenta di rintuzzare l'obiezione con la sua uguaglianza sfumata: "Sotto un certo aspetto ha luogo proprio l'uguaglianza, sotto un altro la diversità ... . Solo se l'espressione 'riunione di entità uguali', con la quale si vuol descrivere l'originarsi del numero, richiedesse l'uguaglianza assoluta — cosa che Frege falsamente suppone — si presenterebbe qui una difficoltà, o meglio, un'impossibilità" (164 e 165). Orbene, se l'uguaglianza non è assoluta, gli oggetti si distinguono per qualcuna delle proprietà con le quali entrano in riunione. Si confronti ora con quanto segue: "L'uguaglianza delle unità, come risulta dalla nostra teoria psicologica, è evidentemente assoluta. Certo, il semplice pensiero di un accostamento è già assurdo. Si tratta invero di uguaglianza di contenuti in rapporto al fatto che essi sono contenuti" (168). Il numero, secondo l'autore, è costituito da unità (149). Qui egli, con "unità", intende un "termine di una moltitudine concreta, alla quale sia applicata l'astrazione numerica" o un "oggetto contato come tale". Riunendo tutto quanto abbiamo detto, ci sarà molto difficile farci una idea chiara sull'opinione dell'autore. Dapprima gli oggetti sono evidentemente distinti; indi diventano assolutamente uguali fra loro in virtú dell'astrazione; ma questa uguaglianza assoluta deve aver luogo solo in rapporto al fatto che essi sono dei contenuti. Sarei costretto a pensare che questa uguaglianza sia però ben lungi dall'essere assoluta. Tuttavia, come che sia, il numero consiste di queste unità assolutamente uguali, e allora subentra quell'impossibilità che l'autore stesso rileva. Si deve dunque supporre che quell'astrazione, quel portare sotto il concetto del qualcosa, produca una variazione, faccia sí che gli oggetti pensati con la mediazione di questo concetto — le unità assolutamente uguali, per l'appunto — siano diversi dagli oggetti originari, altrimenti non si assomiglierebbero certamente piú di tali originali, e quest'astrazione sarebbe inutile. Dobbiamo ammettere che le unità assolutamente uguali non si originino primieramente col portare sotto il concetto del qualcosa, sia che esse provengano da oggetti distinti per mezzo di una loro metamorfosi, sia che compaiano di bel nuovo accanto a essi. Si dovrebbe dunque pensare che, accanto agli altri oggetti, esistano anche unità, che esistano insiemi di unità accanto a insiemi di mele. A questa cosa però l'autore si oppone nel modo piú vivace (139). L'astrazione

numerica ha proprio la meravigliosa e molto feconda caratteristica di rendere le cose assolutamente uguali, senza peraltro variarle. Cose simili sono appunto possibili solo nel calderone psicologico. Se l'autore ha effettivamente evitato questo primo scoglio, ebbene ciò gli è riuscito molto piú nell'àmbito della magia che non in quello della scienza.

Piú oltre Husserl cita le mie parole (156): "Denotando col simbolo 1 ciascuno degli oggetti da contare, commettiamo un errore, perché diamo l'identico nome a oggetti diversi. Aggiungendo all'1 vari indici, otteniamo un simbolo che non può piú servire per l'aritmetica."[1] Ciò viene cosí annotato da Husserl: "Nondimeno commettiamo questo errore ogni qualvolta impieghiamo un nome comune. Se noi chiamiamo Hans, Kunz, ecc., ciascuno, un *uomo*, questo è lo stesso caso di 'denotazione erronea', per mezzo della quale scriviamo 1 al posto di ogni oggetto da contare." Se noi denotassimo Hans con un "uomo" e altrettanto Kunz, incapperemmo certo in un errore. Per fortuna, non lo facciamo. Se chiamiamo Hans un uomo, diciamo con questo che Hans cade sotto il concetto *uomo*, ma non scriviamo o diciamo "uomo" invece di "Hans". Ciò che corrisponde alla proposizione "Hans è un uomo", sarebbe "Hans è un 1". Se *A* lo chiamiamo *B*, nel senso di attribuire ad *A* il nome proprio "*B*", naturalmente possiamo dire dappertutto "*B*" invece di "*A*": ma allora non possiamo piú dare il medesimo nome "*B*" a un altro oggetto. La causa di tale confusione è sicuramente in questa infelice espressione "nome comune". Questo cosiddetto nome comune — meglio chiamato espressione concettuale — non ha direttamente nulla a che fare con gli oggetti, bensí significa un concetto, e sotto questo concetto possono forse cadere piú oggetti; ma esso può anche essere vuoto, senza che per questo la parola concettuale perda parte del suo significato. Ho già discusso a lungo di questo nei miei *Fondamenti dell'aritmetica* (§ 47). È comunque evidente cbe nessuno, con la proposizione "Tutti gli uomini sono mortali", vuol affermare qualcosa di un certo condottiero Akpanya del quale probabilmente non ha mai sentito parlare.

Secondo l'autore, $5+5=10$, è lo stesso di "un (certo, qualunque sia)

[1] [*I fondamenti dell'aritmetica*, § 39.]

insieme che cada sotto il concetto cinque, e un certo altro" (perché altro?) "insieme che cada sotto lo stesso concetto, producono, riuniti, un insieme che cade sotto il concetto 10" (202). Per chiarirsi questo fatto il lettore prenda, per esempio, come primo insieme le cinque dita della propria mano destra, come secondo insieme un portapenne e le dita della propria mano destra, a eccezione del pollice. Dobbiamo pensare che l'autore sia andato qui a imparare da O. Biermann?

Parliamo ora del secondo scoglio che è costituito dai numeri zero e uno. La prima spiegazione è facilmente trovata; si dice: "Questi non sono assolutamente numeri." Sorge però la questione di che cosa essi siano. Dice l'autore: sono risposte negative alla domanda "quanti?" (144). Risposte come "mai" alla domanda "quando?". " 'Non-molto' oppure 'nessuna moltitudine' non è una particolarizzazione del molto." Forse qualcuno giunge ancora a pensare che neanche due sia una moltitudine ma semplicemente una dualità (dualità in antitesi con pluralità); e che dunque nulla, uno e due, siano le tre risposte negative alla domanda "quanto?". Come conferma egli potrebbe forse addurre il fatto che due è l'unico numero primo pari. È realmente pretendere molto, il far riguardare come negativa la risposta "una" alla domanda "Quante lune ha la terra?". Per lo zero la cosa sembra in sé piú convincente. E infatti, se alle domande "quando?", "dove?", "che cosa?" rispondiamo "mai", "in nessun luogo", "niente", in che modo dobbiamo a rigore concepire queste risposte? Evidentemente non come vere e proprie risposte, ma come rifiuti di dar loro una risposta sotto forma di risposta. Si dice: "Non posso darti un istante, un luogo, un oggetto, del tipo desiderato, perché non ve n'è." Quella corrispondente per la domanda "quanto?", sarebbe una risposta di questo genere: "Non posso nominarti un tale numero, perché non ne esiste alcuno." Ciò ad esempio risponderei, in armonia con la mia concezione circa il senso dell'attribuzione numerica, alla domanda "Quanto è Gran Bretagna e Irlanda?". Non posso però ritenere che le risposte "uno" oppure "zero" alla domanda "quanto?", abbiano lo stesso significato della risposta "Un tale numero non esiste". Come succede che qui esistono due risposte negative? Rispondendo "nessuno" alla domanda "Chi fu il predecessore di Romolo sul trono romano?", si nega con questo che qualcuno abbia preceduto Romolo. La negazione appartiene

quindi al predicato, che non è logicamente corretto confondere con il soggetto grammaticale, sicché in apparenza risulti che "nessuno" denoti un uomo come "Romolo". Su questa confusione si fonda notoriamente la possibilità di certe deduzioni erronee. Si dovrebbe pensare che tali pericoli si riscontrino anche per lo zero e per l'uno; ma essi vengono usati proprio come tutti gli altri numeri, senza particolari regole cautelative. Donde questa distinzione? Alla domanda "Qual è il numero dei predecessori di Romolo sul trono romano?" la risposta "zero" è altrettanto poco negativa quanto lo sarebbe "due". Con essa non si nega che un tale numero esista, bensí lo si nomina. L'autore dice: "A ogni unità spetta il numero uno" (170) (buona, come qualità negativa!) e chiama concetti lo zero e l'uno (145). In base a questo si presume che unità e uno siano concetti di estensione uguale. Oppure ogni uno non è un'unità? In che cosa si distinguono i pensieri delle due proposizioni "Hans è uno" e "Hans è un'unità"? A chi spetta ora il numero zero? Innavvertitamente abbiamo detto poco fa, con l'autore, "il numero uno"! Qui ci sono ancora molti enigmi non risolti dall'autore; e non posso concedere che egli abbia felicemente superato questo scoglio.

Veniamo ora al terzo scoglio, ai numeri grandi. Se i numeri sono rappresentazioni, la limitatezza della nostra facoltà rappresentativa deve comportare anche una limitazione nel dominio dei numeri. L'autore dice: "Solo in circostanze particolarmente fortunate, possiamo ancora effettivamente rappresentarci moltitudini concrete di circa una dozzina di elementi" (214). E, introdotte a questo punto quale strumento di informazione le rappresentazioni improprie o simboliche, dedica a esse tutta la seconda parte. L'autore deve nondimeno concedere: "Naturalmente neppure ora, sulla via dei puri segni siamo semplicemente illimitati; ma non risentiamo piú di questa limitazione..." (274). Col che è ammessa la finitezza del dominio dei numeri. Se i numeri sono rappresentazioni che io, o un altro uomo, possiamo formarci, ebbene, non possono esservi infiniti numeri e nessun simbolismo può togliere questa nostra limitatezza.

Una rappresentazione simbolica consiste, per l'autore, in una rappresentazione con segni che caratterizzano univocamente quanto ci si vuol rappresentare (215). "Noi, per esempio, abbiamo una rappresentazione

vera e propria dell'aspetto esteriore di una casa, se la osserviamo effettivamente; abbiamo una rappresentazione simbolica se qualcuno ci fornisce le caratteristiche indirette di quella casa: la casa d'angolo fra quella e quell'altra strada, e il lato della strada dove essa sorge." Questo si riferisce al caso in cui esista qualcosa di oggettivo di cui debbo formarmi una rappresentazione, e quindi questa spiegazione mal si adatta al caso nostro. Supponiamo pure che i numeri, secondo l'autore, siano rappresentazioni, risultati di un processo o di un'attività spirituali (24, 46); ma dov'è l'ente oggettivo in cui un numero è una rappresentazione? Che cosa corrisponde alla casa dell'esempio precedente? Eppure è proprio questo oggetto che fa da collegamento fra una rappresentazione vera e propria e una rappresentazione simbolica, è questo oggetto che autorizza a dire che la rappresentazione simbolica corrisponde a quella vera e propria, e che nel caso di una rappresentazione simbolica viene univocamente caratterizzato per mezzo di segni. Il mescolamento di oggettivo e soggettivo, la circostanza che non si operi mai una chiara distinzione fra espressioni come "Luna" e "rappresentazione della Luna", spargono una nebbia cosí impenetrabile, che il tentativo di riuscire a vederci chiaro risulta disperato. Posso soltanto dire che, dell'opinione dell'autore, ho tratto la seguente impressione: Se voglio avere una rappresentazione simbolica, ove non ne abbia una vera e propria, allora *idealizzo* la mia capacità di rappresentazione (251); cioè immagino o mi rappresento di avere una rappresentazione che in effetti non ho né potrei avere; e questa immagine sarebbe la mia rappresentazione simbolica. Cosí, per esempio, posso formarmi una rappresentazione simbolica per mezzo del segno "15", immaginando di rappresentarmi un insieme — che sia composto dagli elementi di un primo insieme cui spetti il numero 10 e da quelli di un secondo insieme cui spetti il numero 5 — e applicando poi a esso il procedimento che, secondo l'autore, origina il numero corrispondente. Nelle rappresentazioni simboliche rientrano le rappresentazioni dei segni. "I segni forniti di senso non sono qui del tipo dei segni linguistici, cioè semplici portatori dei concetti. Essi partecipano in modo molto piú consistente alle nostre figurazioni simboliche... in modo tale che essi, in definitiva, hanno un'importanza quasi decisiva" (273, analogamente 264). Con ciò l'autore si avvicina considerevolmente alle opinioni di Helmholtz

e di Kronecker.[1] Il numero dovrebbe quindi mutare se venissero mutati i segni. Noi avremmo numeri del tutto diversi da quelli degli antichi Greci e Romani. Ma ora, queste rappresentazioni simboliche, avrebbero anche le proprietà che dovrebbero spettare alle rappresentazioni vere e proprie? Per me altrettanto poco quanto è verde la mia rappresentazione di un campo verde. Ora l'autore nota certamente (217) che la rappresentazione vera e propria e una rappresentazione simbolica a essa corrispondente stanno l'una con l'altra nel rapporto di equivalenza logica. "Due concetti sono logicamente equivalenti, se ogni oggetto dell'uno è anche oggetto dell'altro e viceversa." Dal che si spiega come le rappresentazioni simboliche possano "surrogare" le rappresentazioni vere e proprie a esse corrispondenti. Qui la confusione fra rappresentazioni e concetti è sconcertante per la comprensione. Attenendoci all'esempio della casa d'angolo, presumiamo che qui "l'equivalenza" deve consistere nel fatto che la mia rappresentazione vera e propria e quella simbolica vengono riferite a uno stesso oggetto (appunto quella casa d'angolo). Ma, quando accade che questa possa "surrogare" quella? Presumibilmente quando parlo della casa d'angolo stessa, non della mia rappresentazione. Leggendo questo libro ho potuto valutare con precisione come sia difficile al sole della verità penetrare fra le nebbie che si sollevano dal mescolamento di psicologia e logica. Qui ne vediamo per fortuna un inizio. Qui, con forza vittoriosa, si fa valere il fatto che, in questo campo, poco importa delle nostre rappresentazioni, e che piuttosto ciò di cui ci occupiamo e per cui sono valide le nostre affermazioni è proprio la cosa stessa, che tentiamo di rappresentarci. E tali asserzioni ricorrono spesso in questa seconda parte: ciò è tanto piú degno di nota, quanto meno esse si accordano propriamente con l'intero modo di pensare dell'autore. Leggiamo (214): "Se anche non abbiamo un concetto in modo *vero e proprio*, lo abbiamo in modo *simbolico*." Qui i concetti appaiono come qualcosa di oggettivo e la distinzione fra vero e proprio e simbolico riguarda solo il loro essere dati. Si parla di specie di concetti numerici a noi non accessibili in senso proprio (265), e di numeri effettivi, di numeri in sé, che ci sono inaccessibili in generale (295). Leggiamo (254) di figure simboliche di numero

[1] [Circa le opinioni degli autori qui nominati si confronti la breve presentazione di Frege nelle note ai paragrafi 137 e 156 della sua critica alle teorie dei numeri reali (parte quinta del nostro volume).]

che appartengono a uno e uno stesso numero effettivo. Secondo le vedute dell'autore, dovremmo aspettarci le parole "non esistente" invece della parola "effettivo"; infatti, se il numero fosse una vera e propria rappresentazione, di tali numeri effettivi non ce ne sarebbero affatto. Che cos'altro sono se non oggettivi, questi numeri "in sé" (294), questi numeri "effettivi" completamente indipendenti dal nostro pensiero, numeri che esistono, anche se non sono accessibili? (296). L'autore dice (295): "Un qualunque numero può venire univocamente caratterizzato con molteplici relazioni ad altri, e ognuna di tali caratterizzazioni comporta proprio per questo numero una nuova rappresentazione simbolica." Qui evidentemente il numero oggettivo "in sé" è ciò che nell'esempio della casa d'angolo era appunto la casa d'angolo; non la mia rappresentazione è il numero, ma io mi formo una o piú rappresentazioni di uno stesso numero, o almeno tento di farlo. Peccato soltanto che l'autore non mantenga chiaramente distinte le due espressioni "*A*" e "rappresentazione di *A*". Se però la mia rappresentazione del numero non è il numero stesso, allora il terreno frana proprio alla base del metodo psicologico di trattazione, almeno fin tanto che si tratti di ricercare l'essenza del numero. Se voglio indagare una rappresentazione, debbo riceverla il piú possibile inalterata, cosa questa evidentemente difficile; se al contrario esamino qualcosa di oggettivo, allora le mie rappresentazioni, per buone che esse siano, debbono adattarsi alla cosa, al risultato di questo esame, e quindi, in generale, debbono variare. Si produce una netta distinzione nel metodo di ricerca, a seconda che una rappresentazione numerica stessa sia la cosa da esaminarsi oppure che essa sia soltanto la rappresentazione dell'oggetto vero e proprio. Il metodo dell'autore è adatto solo al primo caso, mentre l'impiego della rappresentazione introdotto per ultimo può avere un significato solo per il secondo. Se un geografo ricevesse da leggere un trattato di oceanografia, nel quale l'origine dei mari venisse spiegata psicologicamente, ne riceverebbe senza dubbio l'impressione che si sarebbe centrato il bersaglio in modo davvero bizzarro. L'identica impressione ho io di quest'opera. Senza dubbio il mare è qualcosa di reale, mentre il numero non lo è; ma ciò non gli impedisce di essere qualcosa di oggettivo; e questo è l'importante.

Leggendo quest'opera ho potuto misurare quanto estesa sia la deso-

lazione provocata dall'intrusione della psicologia nella logica, e ho ritenuto mio compito metterne bene in luce il danno. Degli errori che ho creduto dover mostrare, va fatto meno carico all'autore che a una malattia filosofica molto estesa. Il mio punto di vista cosí totalmente diverso, mi rende difficile riconoscergli esattamente i meriti che penso gli spettino nel campo della psicologia, e potrei indirizzare in particolare l'attenzione degli psicologi al capitolo 11, dove si parla della possibilità di concezioni istantanee di insiemi. Non mi ritengo tuttavia sufficientemente esperto per dare un giudizio in questo campo.

PARTE QUARTA

DALL'EPISTOLARIO

1896-1900

[Conservato in massima parte presso l'archivio dell' "Istituto di logica matematica e ricerche sui fondamenti" dell'Università di Münster, l'epistolario di Gottlob Frege presenta ancor oggi un notevolissimo significato culturale, per la ricca documentazione in esso contenuta relativamente alla problematica di un periodo della cultura europea — compreso fra il 1890 circa e l'inizio della prima guerra mondiale — che fu tra i piú fruttuosi per molti aspetti della ricerca scientifico-filosofica. Fra i corrispondenti di Frege — da Peano a Hilbert, da Husserl a Russell, a Wittgenstein, e ancora a Couturat, a Löwenheim, a Pasch, a Vailati e numerosi altri — figurano infatti i piú eminenti scienziati e filosofi operanti in quel periodo. Sia che egli stesso provocasse lo scambio epistolare (per lo piú con intenti di obiettiva polemica), sia al contrario che vi fosse sollecitato dall'iniziativa del corrispondente, Frege ci fornisce, nelle sue lettere, rinnovate dimostrazioni di una scrupolosa serietà scientifica e di eccezionale sottigliezza di analisi logica; sicché queste lettere rappresentano uno strumento che potrà rivelarsi decisivo ai fini di un'ulteriore precisazione di certi aspetti del suo pensiero. D'altra parte, a eccezione delle lettere qui riportate e dell'abbozzo finora inedito di una lettera a Peano (abbozzo che figura nell'appendice al nostro volume), tutto il materiale dell'epistolario freghiano — pensiamo in particolare ai carteggi con Russell e Löwenheim — ci risulta ancora inedito: vogliamo augurarci che tale lacuna sia colmata al piú presto.

La presente raccolta comprende cinque lettere: quattro di Frege e una di Hilbert.

La prima lettera di Frege venne indirizzata nel 1896 a Peano; questi la pubblicò solo nel 1898, nel sesto volume della "Rivista di matematica"; di recente essa è stata inserita, nel testo originale tedesco, nel secondo volume delle *Opere scelte* di Giuseppe Peano (Cremonese, Roma 1958).

Segue la lettera con cui Frege accompagnò la spedizione al matematico Heinrich Liebmann (1874-1939) del suo carteggio con Hilbert. Tale carteggio si compone di tre lettere — una di Frege a Hilbert, la relativa risposta di Hilbert, la successiva risposta di Frege — che sono qui ordinate cronologicamente. Abbiamo creduto opportuno inserire anche la lettera di Hilbert a Frege per offrire al lettore una visione quanto piú possibile organica della polemica fra i due scienziati intorno ai fondamenti della geometria.

Le ultime quattro lettere ora menzionate furono pubblicate nel 1941 a cura di Max Steck, il quale le aveva rinvenute nel *Nachlass* scientifico di Heinrich Liebmann: la nostra traduzione è condotta appunto su quel testo; va notato però che la consultazione dell'epistolario completo di Frege ci ha permesso di precisare le date di tre delle quattro lettere in questione, date che nell'edizione tedesca erano soltanto stabilite con buona approssimazione. Avvertiamo infine che nella compilazione delle note al carteggio con Hilbert abbiamo usato largamente delle note e della presentazione all'edizione tedesca.]

1.

Lettera a Giuseppe Peano

[Viene qui confutata l'affermazione di Peano, secondo la quale — essendo minore il numero dei segni base impiegati nel simbolismo del *Formulario matematico* rispetto a quello dei segni base usati nell'ideografia di Frege — l'analisi logico-linguistica su cui poggia il simbolismo peaniano sarebbe piú profonda di quella condotta da Frege per istituire la propria ideografia. A tale affermazione, Frege ribatte che:
1) non tutti i segni del *Formulario* possono venir ricondotti ai tre fondamentali indicati da Peano;
2) il mero conteggio dei segni base non è in ogni caso sufficiente per stabilire la profondità dell'analisi su cui si basa un determinato simbolismo. Occorre innanzitutto indagare se la lingua simbolica cosí costruita riesca effettivamente a rendere tutte le distinzioni logiche riconoscibili nell'uso del linguaggio comune. Frege mostra con un semplice esempio come ciò non avvenga per il simbolismo peaniano.

Nel corso della sua lettera il nostro autore si trattiene lungamente sui princípi del definire e, contro Peano, ritiene di non dover ammettere:
1) le definizioni molteplici per uno stesso segno; esse comportano una delimitazione non rigorosa del concetto da definirsi, il quale quindi non può essere considerato come acquisito da un punto di vista logico;
2) le definizioni condizionate, in quanto, non essendo complete, non assolvono la fondamentale funzione di attribuire un significato a un segno.

Va notato in particolare come l'osservazione di Frege circa la diversità del significato dell'uguaglianza come relazione tra classi da quello dell'uguaglianza come relazione tra il primo e il secondo membro di una definizione accenni implicitamente alla distinzione — fondamentale per la logica moderna — tra linguaggio-oggetto e metalinguaggio.

Abbiamo potuto leggere la lettera (tuttora inedita) che Peano, nell'ottobre del 1896, scrisse a Frege in risposta alla presente. In essa Peano accetta sostanzialmente gli appunti mossigli da Frege riguardo l'ideografia, mentre afferma essere imposti e giustificati dalla prassi matematica i procedimenti definitori che il logico tedesco giudica qui come non soddisfacenti da un punto di vista rigoroso. Su questo e sugli altri argomenti trattati, si vedano, oltre all'introduzione al presente volume, la prefazione di Frege all'*Ideografia*, nella prima parte, e, nella parte quinta, le pagine

dedicate nei *Princípi dell'aritmetica* ai princípi del definire. La questione della giustificazione delle definizioni molteplici e condizionate viene ripresa da Frege in una seconda lettera a Peano, lettera che, rimasta allo stadio di abbozzo, viene pubblicata nell'appendice al presente volume.]

Jena, 29 settembre 1896

Chiarissimo collega,

Lei ha già avuto la bontà di dedicare ai miei *Princípi dell'aritmetica*, nel quinto volume della "Rivista di Matematica", una recensione dettagliata e benevola. Penso che il modo migliore per ringraziarLa sia quello di esporre, con franchezza, le mie vedute discordanti. Spero che un tale scambio di idee, specie se compiuto pubblicamente, porterà un effettivo contributo alla scienza; e per questo motivo La prego di far apparire sulla "Rivista di Matematica" le seguenti precisazioni.

Lei dice, a pagina 123:

"È noto che nel *Formulario di Matematica* tutte le relazioni e operazioni fra proposizioni e fra classi si riducono a tre fondamentali, indicate con i segni

⌒, Ɔ, —.

Oltre a questi si usano, per comodità, i segni =, ⌣, ∧, che sono definiti mediante i precedenti."

E a pagina 125:

"I due sistemi di notazione si possono confrontare sotto l'aspetto scientifico e sotto quello pratico. Sotto l'aspetto scientifico, il sistema di Frege è basato sui cinque segni fondamentali

|, —, ┬, ┬└, —⌣—,

mentre il nostro sui tre segni

⌒, Ɔ, —.

Quindi il sistema del *Formulario* corrisponde a un'analisi piú profonda."

Non posso condividere quest'ultima affermazione. Anzitutto dubito che Le siano sufficienti quei tre segni a indicare effettivamente tutto

quanto viene richiesto da strutture puramente logiche.[1] Già per ciò che riguarda l'uguaglianza esprimo riserve. Quanto al segno $=$, ne troviamo nel *Formulario* I, § 1, 3, una definizione della forma

$$a = b . = . a \supset b . b \supset a .$$

Ma qui viene evidentemente presupposto il significato di quanto si vuol definire. Nella prefazione, a pagina IV, è detto infatti: "Toute définition est exprimée par une égalité; dans le premier membre on a le signe qu'on définit." Questo primo membro dell'uguaglianza definitoria è, nel nostro caso, "$a = b$", il secondo "$a \supset b . b \supset a$"; e fra i due membri è posto proprio il segno di uguaglianza, il cui significato deve dunque essere già noto, per poter comprendere la definizione. Già a motivo di ciò non può parlarsi di una riduzione dell'uguaglianza al significato di quei tre segni fondamentali. D'altronde non è questo il solo punto discutibile di tale definizione. Essa non è l'unica usata per definire il segno di uguaglianza: in *Formulario* I, § 4, 2, se ne dà una seconda, nel § 5, 2, una terza e infine, nel § 5, 11, una quarta. Qui si evidenzia una fondamentale divergenza fra le nostre vedute. Io non ammetto che vi siano molteplici definizioni per uno stesso segno, basandomi sulle seguenti considerazioni. Supponiamo di avere due definizioni che annettano entrambe un significato a un medesimo segno. Allora sono pensabili solo due eventualità: o entrambe le definizioni dànno al segno lo stesso significato, oppure no. Nel primo caso vi sono ancora due possibilità: o le due definizioni attribuiscono al segno lo stesso senso, dicono esattamente la stessa cosa, oppure no. Nel primo caso una delle due è superflua, nell'altro ci sarebbe da dimostrare che esse attribuiscono al segno lo stesso significato pur dandogli sensi diversi.[2] Si dovrebbe quindi mantenere una delle due come definizione, trasformare l'altra in teorema e dimostrarla. Si ingannerebbe il lettore, circa questa dimostrazione, presentando come definizione quello che potrebbe essere un teorema. Se infine le definizioni conferiscono allo stesso segno non solo sensi [intensioni], ma pure significati [estensioni]

[1] [Nella sua "risposta", pubblicata sulla "Rivista di Matematica" nel gennaio 1898 assieme alla lettera di Frege, Peano osserva: "Nella mia recensione all'opera del signor Frege dissi che 'Tutte le operazioni e le relazioni fra proposizioni e fra classi si riducono alle tre fondamentali $\supset$, $\frown$, $-$'; ma senza dubbio il sistema delle idee primitive che si incontrano in tutta la logica è piú complesso."]

[2] [Si veda l'articolo *Senso e significato* nella terza parte del presente volume.]

diversi, allora esse si contraddicono fra loro e una delle due deve cadere. Orbene, deve sorprendere il fatto che il caso in questione sembri sfuggire a ognuna delle possibilità or ora accennate; infatti le Sue definizioni del segno di uguaglianza non esprimono tutte la stessa cosa; né possono venir dimostrate una a partire dalle altre; né risultano fra loro contraddittorie. La cosa si spiega osservando che non è soddisfatta una supposizione da noi espressamente formulata. Non è verificata infatti l'ipotesi che ognuna di queste definizioni dia significato al segno di uguaglianza. Ognuna di esse è infatti incompleta,[1] e solo una definizione completa può attribuire a un segno un significato. La Sua prima definizione (I, § 1, 3), si riferisce evidentemente al caso in cui il segno di uguaglianza colleghi proposizioni, sebbene questo non venga espressamente dichiarato; la seconda (I, § 4, 2) contempla il caso in cui il segno = sta fra segni di classe; la terza (I, § 5, 2), il caso in cui tale segno pone uguali due oggetti individuali; la quarta infine (I, § 5, 11), il caso in cui esso collega segni di funzione. Di quale caso si tratti è di regola dichiarato per mezzo di una proposizione condizionale. Ora, io rigetto le definizioni condizionate, che Lei usa cosí spesso, perché sono incomplete, perché solo in riferimento ad alcuni casi, non a tutti, affermano che la nuova espressione deve significare la stessa cosa di quella definiente. E cosí mancano al loro scopo: quello di dare un significato a un segno. Perché questo? Consideriamo il caso in cui si tratti di una relazione, come accade per l'uguaglianza. Una definizione condizionata di un segno di concetto, decide solo in alcuni casi, non in tutti, se un oggetto cade o no sotto questo concetto; essa quindi delimita il concetto in modo incompleto e non preciso. Ma la logica può ammettere esclusivamente concetti delimitati con precisione. Solo se tale ipotesi è verificata, essa può costruire vere e proprie leggi. La legge logica secondo cui non vi è un terzo caso oltre ai due

a è *b*,

a non è *b*,

non costituisce altro, a rigore, fuorché un modo diverso di esprimere

[1] [Ognuna delle definizioni su accennate è incompleta — nel senso che Frege dà a questa parola - appunto perché definisce il segno di uguaglianza condizionatamente alla natura degli argomenti che nell'uguaglianza figurano (classi, o vettori, o numeri ecc.). Si confronti quanto Frege stabilisce intorno ai princípi del definire, nel secondo volume dei *Princípi dell'aritmetica* (parte quinta della nostra raccolta).]

la nostra esigenza che un concetto (*b*) sia delimitato con precisione. Il sofisma noto col nome di "Acervus", si fonda proprio sul fatto che vocaboli come "mucchio" vengono usati come se designassero un concetto delimitato con precisione, mentre la cosa non è vera. Come sarebbe impossibile alla geometria costruire leggi esatte se volesse considerare fili di refe come linee, e i nodi di quei fili come punti, cosí la logica deve pretendere la precisa delimitazione di ciò che può riconoscere come concetto, se non vuol rinunciare all'esattezza e alla sicurezza. Di conseguenza un segno di concetto il cui contenuto non soddisfi questa esigenza, va riguardato, da un punto di vista logico, come privo di significato. Si può obiettare che tali vocaboli sono usati normalmente nella vita quotidiana. Certo! Ma i nostri linguaggi correnti non sono fatti per condurre dimostrazioni. E proprio le loro deficienze, che scaturiscono da ciò, sono state per me il motivo fondamentale che mi ha indotto a costruire un'ideografia.[1] I nostri linguaggi comuni esauriscono essenzialmente la loro funzione se gli uomini, nei loro rapporti, associano alla stessa proposizione lo stesso pensiero, o approssimativamente lo stesso. E a questo scopo non è affatto necessario che le singole parole abbiano di per sé un senso e un significato, purché abbia un senso l'intera proposizione. Le cose stanno altrimenti quando debbono trarsi deduzioni; in questo caso, infatti, è essenziale che in due proposizioni ricorra la stessa espressione e che questa abbia esattamente il medesimo significato in entrambe. Tale espressione deve quindi avere di per sé un significato, indipendentemente dalle altre parti della proposizione. Quando facciamo uso di parole, dirette a esprimere un concetto, che risultino definite in modo incompleto, l'indipendenza testé accennata non sussiste, ma il punto decisivo è che si presenti il caso contemplato dalla definizione, e ciò dipende allora dalle rimanenti parti della proposizione. Non è quindi possibile, in generale, riconoscere a una tale parola un proprio significato. È per questi motivi che non ammetto le definizioni condizionate dei segni di concetto.

Per quanto riguarda le relazioni il discorso è all'incirca analogo. Una definizione condizionata di un segno di relazione, come per esempio del segno di uguaglianza, permette di decidere solo in alcuni casi, e

[1] [Si veda la prefazione all'*Ideografia* nella prima parte del nostro volume.]

non in tutti, se la relazione ha luogo. Cosí, per esempio, la Sua definizione I, § 4, 2, stabilisce che *a* è uguale a *b* solo nel caso che *a* e *b* siano classi; di conseguenza essa non fornisce un significato al segno di uguaglianza indipendentemente da *a* e *b*; cioè non gli attribuisce in via generale alcun significato proprio. In tale ipotesi, oltre ai due casi

a è uguale a *b*,
a non è uguale a *b*,

ne rimane ancora un terzo, quello dell'indecidibilità, mentre la logica non ammette un terzo caso.

Del resto ho altre riserve per alcune di queste definizioni. Per esempio non mi risulta comprensibile, come definizione, la seguente

$$\text{“}a, b \in K . \supset \colon f \in b/a . x, y \in a . x = y . \supset fx = fy\text{”}$$

(*Formulario* I, § 5, 2).[1] Dov'è infatti il segno di uguaglianza alla cui sinistra stanno i segni da definire? E ancora, la lettera "*f*", che indica una funzione, ricorre qui, nel gruppo di segni "$f \in b/a$", senza il posto di argomento; e lo stesso accade in I, § 5, 11, per le due lettere "*f*" e "*g*", anch'esse indicanti funzioni. Cosí viene travisata l'essenza stessa delle funzioni, che consiste nella loro "necessità di completamento" (*Ergänzungsbedürftigkeit*). Questa necessità infatti ha per conseguenza che ogni segno funzionale deve sempre recare con sé uno o piú posti che debbono essere occupati da segni di argomento; e questi posti di argomento — non i segni di argomento stessi — costituiscono una parte costitutiva necessaria del segno di funzione. Trovo inoltre erroneo che in

$$\text{“}a \in K . \supset \colon f, g \in b/a \supset .\therefore f = g . = \colon x \in a . \supset_x . fx = gx\text{”}$$

(I, § 5, 11), la lettera *a* figuri a destra del segno di uguaglianza ma non a sinistra. Evidentemente "$f = g$" potrebbe avere lo stesso signi-

[1] [Nella su citata "risposta", Peano afferma, al proposito: "La proposizione F_1I, § 5, P2 è unita alla precedente onde costituire una definizione. Essa si legge: 'Siano *a* e *b* classi; diremo che *f* è un *b* funzione degli *a*, se comunque si prenda *x* nella classe *a*, *fx* è un *b*; e se a due individui *x* e *y*, uguali, presi nella classe *a*, corrispondano valori della funzione pure uguali." La proposizione precedente a quella riportata da Frege nella sua lettera, e cui qui Peano accenna è la seguente:

$$a, b \in K . \supset \colon f \in b/a . = \colon x \in a . \supset_x . fx \in b.]$$

ficato di "$x \in a . \supset_x . fx = gx$" soltanto se il significato di quest'ultima espressione fosse indipendente da a.[1]

Comunque anche a prescindere da quanto finora ho detto, Lei ammette certamente che ognuna delle Sue definizioni del segno di uguaglianza, singolarmente presa, è incompleta; ma forse Lei vorrà sostenerne la completezza nella loro totalità; nel qual caso però, questa totalità dovrebbe presentarsi esteriormente come tale. Con la disposizione adottata nel *Formulario*, da nessuna di queste definizioni è possibile comprendere se essa sia l'ultima o se altre la seguiranno per completarla. Supponiamo di aver ovviato a questa deficienza, e che le diverse definizioni del segno di uguaglianza siano riunite in un tutto organico; ci sarebbe allora da chiedersi se questo tutto fornisce ora una definizione completa, se i casi su esaminati esauriscono tutti i casi possibili, e ancora se non forniscono, per certi casi, doppie determinazioni. Orbene, non è difficile riconoscere che questa totalità è a sua volta incompleta; non ci dice infatti nulla circa il caso in cui da una parte del segno di uguaglianza figuri il segno di un oggetto che non è una classe, mentre dall'altra ricorra un segno di classe; e altrettanto ripetasi per i casi in cui a primo membro si trovi una proposizione e a secondo membro un segno di classe o un nome proprio. Naturalmente Lei intende che in questi casi l'uguaglianza risulterebbe falsa; ma dalle Sue definizioni questo non si desume affatto.[2]

Le ragioni fondamentali per le quali non posso riconoscere come valide le Sue definizioni del segno di uguaglianza per mezzo dei segni $\frown$, $\supset$, —, sono principalmente le seguenti:

1) ognuna di queste definizioni, considerata singolarmente è incompleta;
2) anche se considerate tutte insieme, esse risultano ancora incomplete, in quanto non permettono di decidere in ogni caso se l'uguaglianza sussiste oppure no;
3) Lei definisce il segno di uguaglianza servendosi del segno stesso.

[1] [Nella risposta di Peano poco fa citata si legge: "Esatta è l'osservazione della non omogeneità della F_1I, § 5, P11, che piú non trovasi in F_2."]

[2] [Si parla, nei casi qui ricordati da Frege, di definizioni non omogenee. Per chiarire la cosa, riportiamo un esempio dello stesso Peano (*Les définitions mathématiques*, Congresso internazionale di filosofia, Parigi, agosto 1900): "La proposition: Soient *a*, *b*, *c*, *d*, des nombres entiers; on a: $a/b+c/d = (ad+bc)/bd$, n'est pas une définition possible. En effet, le premier membre se présente comme une function des nombres entiers *a*, *b*, *c*, *d*, qui ne sont pas des functions des nombres rationnels donnés."]

Mi sono soffermato cosí a lungo sulla questione, non tanto a causa del segno di uguaglianza, quanto piuttosto a causa dei princípi del definire, i quali d'altronde vengono piú volte presi in considerazione. Trovo, in generale, che Lei non è sufficientemente rigoroso a questo proposito, e che di conseguenza la Sua riduzione delle strutture logiche ad altre piú semplici difetti piú volte di forza persuasiva.

Inoltre, dove si trova una definizione del segno "Λ" in funzione dei segni $\frown$, $\supset$, —? Nel *Formulario* lo trovo spiegato in I, § 3, 1; questa però non è indicata come definizione e, considerata tale, sarebbe errata. Nelle Sue *Notations de logique mathématique* questo segno è definito in due luoghi, ma solo a parole, senza far uso dei segni $\frown$, $\supset$, $-$. Anche qui va di nuovo preso in considerazione quanto ho detto sulla molteplicità delle definizioni. La cosa tuttavia è ora un po' differente da prima, perché qui non vi sono affatto casi da distinguere e nessuna delle due definizioni è incompleta. Attualmente rimangono queste sole possibilità: o che tali definizioni siano contraddittorie, o che il contenuto dell'una sia una conseguenza dell'altra, sicché quella dovrebbe venir dimostrata come teorema.

Se inoltre si tratta di introdurre tutti i segni fondamentali, occorre elencare fra essi anche il segno relazionale "$\in$", in quanto esso non può venir definito per mezzo degli altri. Anche il tratto sulle lettere designanti funzioni, per l'indicazione dell'inversione, deve essere considerato un segno fondamentale. E tale va considerato pure il "K" e altrettanto molti segni di classe che compaiono nel § 2 delle Sue *Notations de logique mathématique*. Io invece non ho bisogno di nessun particolare segno fondamentale per questo "K", potendo a tale scopo scrivere[1]

$$\dot{\alpha}\big(\dot{\varepsilon}(-\varepsilon \frown \alpha) = \alpha\big)$$

espressione formata con segni già introdotti. Ché se poi volessi proprio servirmi del semplice segno K, e volessi definirlo, potrei farlo con l'uguaglianza seguente

$$\dot{\alpha}\big(\dot{\varepsilon}(-\varepsilon \frown \alpha) = \alpha\big) = K.$$

[1] [Per le notazioni simboliche cui Frege qui ricorre, si veda l'appendice all'introduzione al presente volume.]

Ancora, se volessi usare il segno N nel significato che Lei gli attribuisce, potrei rendere il Suo "$N \in K$" con l'espressione

$$N \frown \grave{\alpha}(\grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown \alpha) = \alpha)$$

o con l'altra

$$\grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown N) = N.$$

Alla luce di queste riflessioni non reputo il numero dei suoi segni fondamentali minore del mio. Non ritengo del resto che il puro e semplice conteggio dei segni fondamentali sia sufficiente per giungere a formulare un giudizio circa la profondità dell'analisi che su di essi si fonda. Io uso, per esempio, il segno |, il segno di giudizio, il quale serve propriamente ad asserire che qualcosa è vera. Lei non ha un segno corrispondente, eppure riconosce la distinzione fra il caso in cui un pensiero venga soltanto espresso, senza peraltro asserirlo come vero, e quello in cui, appunto, si fa quest'asserzione. Se ora la mancanza di un tal segno nella Sua ideografia producesse come effetto che a un adeguato esame il numero dei segni fondamentali da Lei usati risulta piú limitato, ciò non farebbe tuttavia concludere che si tratta di una analisi piú profonda; perché l'effettiva distinzione continua a sussistere, pur se non è rappresentata da segni. Per un paragone di questo genere si dovrebbe esaminare anche il numero delle stipulazioni indipendenti e tutto quanto si concede con esse. Fra tali stipulazioni dovrebbe essere compresa, per esempio, anche quella che Ku significhi una classe di u (*Notations*, § 2), nonché varie altre.

Mi sembra quindi non sia cosí semplice rispondere alla questione da quale parte ci si basi su un'analisi piú profonda. Gli elementi da considerare sono diversi: il numero delle stipulazioni fondamentali, la rigorosità dei princípi del definire e tutto ciò che può venire concesso con i segni fondamentali. Finché questo non sarà fatto, mantengo i miei dubbi sulla conclusione che la Sua analisi sia piú profonda della mia.

Ci sarebbe ancora molto da dire, per esempio sull'impiego che io faccio delle lettere latine, greche e gotiche, cosa nella quale sono stato da Lei frainteso, o sulle condizioni $u, v \in K$ che Lei lamenta di non

aver visto nella mia proposizione (32). A tale scopo tuttavia dovrei affrontare il problema piú da lontano, e spero, in avvenire, di scriverLe un giorno qualcosa su questi argomenti.[1]

Con stima,

Suo devotissimo
Gottlob Frege

[1] [In effetti Frege intraprese la stesura di un'altra lettera a Peano, dedicata appunto alla questione della molteplicità e condizionalità delle definizioni. Tale lettera rimase però incompiuta e inedita: l'abbozzo di essa viene da noi pubblicato nell'appendice al presente volume.]

2.

Carteggio Frege-Hilbert

[1. Nel semestre invernale 1898-99, David Hilbert aveva tenuto presso l'Università di Gottinga la sua prima lezione sui fondamenti della geometria, intitolandola *Elementi di geometria euclidea*; con tale titolo essa venne stampata in settanta esemplari, che anticipavano la prima edizione, del 1900, dei celebri *Grundlagen der Geometrie*. Nella sua lezione Hilbert poneva le basi per un'interpretazione formale delle proposizioni fondamentali della geometria, in opposizione alla tradizionale concezione kantiana che qualificava i giudizi di questa scienza come sintetici a priori.

La nuova impostazione data da Hilbert alle proprie ricerche, spinse Frege a indirizzargli (27 dicembre 1899) una lettera nella quale vengono prese in esame e criticate le basi stesse della costruzione hilbertiana. Ne nasce un breve ma serrato scambio epistolare, nel corso del quale i due scienziati hanno occasione di esporre con estrema chiarezza e concisione le rispettive vedute sui fondamenti della geometria. La risposta di Hilbert alla prima lettera di Frege fu immediata: 29 dicembre 1899, né molto di piú si fece attendere il riscontro di Frege, che porta la data 6 gennaio 1900. I due matematici trattano esplicitamente — tra l'altro — il delicato problema dell'esistenza degli enti matematici.

Contro ogni speranza di Frege, la corrispondenza fu bruscamente interrotta da Hilbert (in una cartolina postale del 15 gennaio 1900 questi comunica a Frege di non potergli rispondere perché sovraccarico di lavoro) e, se pur ripresa saltuariamente dal settembre del 1900, essa perde in ogni caso significanza agli effetti delle questioni discusse nelle tre lettere ora menzionate.

Nel frattempo però, e precisamente nell'agosto dello stesso anno, Frege aveva inviato il carteggio in parola al matematico Heinrich Liebmann, incaricato all'Università di Lipsia, accompagnando la spedizione con una lettera nella quale, oltre a sintetizzare il contenuto della discussione con Hilbert, riassume brevemente, ma con molta efficacia, la propria teoria del concetto, nella cui mancata accettazione da parte di Hilbert vede la radice profonda del dissenso.

Qui presentiamo appunto le quattro lettere ora ricordate; le considerazioni precedenti ci sembra bastino a giustificare la nostra decisione di inserire, quale parte integrante del carteggio Frege-Hilbert, anche la lettera a Liebmann, facendola precedere alle altre. Le lettere di Frege e di Hilbert sono incomplete: ciò si spiega sup-

ponendo che Frege abbia inviato a Liebmann solo i punti essenziali del carteggio, stralciando dagli originali quelle parti che non riteneva interessare direttamente il vero e proprio argomento della corrispondenza.

2. Le idee di Frege sulla geometria — come presentate nelle lettere che seguono — si possono considerare di impostazione fondamentalmente kantiana: la geometria costituisce — a suo parere — l'esempio di una teoria deduttiva i cui enti primitivi — quali "punto", "retta" ecc. — sono dati dall'intuizione e pertanto non sono suscettibili di un'autentica definizione; parimenti garantita dall'intuizione è la verità di quelle particolari proposizioni geometriche che sono gli assioni.

Hilbert, al contrario, lascia quegli enti primitivi del tutto indeterminati e annette agli assiomi la natura di proposizioni in larga misura arbitrarie; essi possono considerarsi come definizioni implicite degli enti primitivi, in quanto determinano rigorosamente le relazioni che fra tali enti intercedono.

Secondo Frege, assegnare agli assiomi una tale funzione definitoria significa provocare un equivoco miscuglio fra nozioni in sé nettamente distinte come appunto quella di "assioma" e quella di "definizione"; inoltre, assegnare a un sistema d'assiomi il compito che spetta propriamente alle definizioni non permetterà mai di giungere a una determinazione univoca degli enti primitivi: determinazione che è condizione fondamentale per il costituirsi di un'autentica scienza.

L'antitesi fra le due posizioni è evidente: Hilbert infatti incentra il suo interesse sul complesso di relazioni — catalogabili come relazioni di appartenenza, di ordinamento, ecc. — cui certi "oggetti" debbono soddisfare, perché per essi valgano le proposizioni che tradizionalmente noi consideriamo costituire la geometria; con ciò egli assicura a questa scienza una generalità fino ad allora sconosciuta e le fornisce il carattere di scienza delle strutture. Frege, al contrario, rimane legato a una concezione tradizionale della geometria che, proprio per il rigore logico con cui è esposta, esclude per principio ogni pretesa di interpretazione che sia estranea al preciso àmbito determinato appunto dal contenuto intuitivo dei suoi concetti primitivi.

Nella frattura assoluta fra le tesi dei due scienziati si può vedere il motivo profondo dell'interruzione del loro dibattito epistolare: fra le due posizioni non era possibile alcuna forma di mediazione che giustificasse una fruttuosa prosecuzione della corrispondenza.

3. Come risulta dalla lettera a Liebmann, Frege aveva proposto a Hilbert di pubblicare il loro carteggio "a causa dell'importanza degli argomenti trattati". Purtroppo però, preoccupato com'era di imporre al mondo matematico le sue originali vedute, Hilbert non accettò il suggerimento; non si opporrà più nel 1941 alla richiesta formulatagli in senso analogo dallo Steck, quando ormai la sua opera era considerata un punto fermo per le indagini sulla geometria.

In due articoli[1] del 1903, Frege riproduce sostanzialmente il contenuto del car-

[1] [G. Frege, *Über die Grundlagen der Geometrie*, Jber. dtsch. MatVer, vol. 12, 319-24 e 368-75 (1903).]

teggio, e dà notizia del rifiuto opposto da Hilbert alla pubblicazioni delle lettere originali. Nel 1906, infine, — sollecitatovi dalle critiche [1] di un allievo di Hilbert, A. Korselt — Frege pubblica ancora tre lunghi articoli [2] sullo stesso argomento. In essi però egli assume un tono aspramente polemico e non aggiunge alcuna effettiva chiarificazione alle argomentazioni precedenti.

Proprio perché riteniamo che un sereno riesame del dibattito Frege-Hilbert possa riuscire ancor oggi molto utile allo studioso di fondamenti della matematica, abbiamo preferito tradurre l'epistolario fra i due scienziati, anziché i posteriori articoli, testé accennati, sullo stesso argomento.]

Lettera a Heinrich Liebmann

25 agosto 1900

Stimatissimo dottore,

poiché Lei si interessa di questioni riguardanti i fondamenti della geometria, Le invio copia del carteggio fra me e il professor Hilbert, riguardante il volume [3] di quest'ultimo. Ciò potrà dimostrarLe come mi stia a cuore che Lei conosca piú precisamente le mie vedute sull'argomento. A dire il vero, la corrispondenza attualmente è ferma già da oltre sei mesi; sono però in possesso di una cartolina del professor Hilbert che mi promette di riprenderla. Forse a Jena c'è già una lettera per me, che mia moglie, in perfetta buona fede, trattiene colà. Rileggendo le mie lettere ne ho tratto l'impressione che, al momento di scriverle, io giudicassi le ricerche hilbertiane piú favorevolmente di quanto non faccia oggi. Debbo però aspettare di leggere la risposta del professor Hilbert. Gli avevo proposto di prendere in considerazione la possibilità di una successiva pubblicazione del nostro carteggio, a causa dell'importanza delle questioni ivi trattate.

Voglio ora provare se mi riesce di esporLe in breve ciò che io intendo per concetto di secondo grado.

Dapprima va sottolineata la profonda differenza che esiste fra concetti e oggetti; essa è tale che un oggetto non può mai far le veci di un concetto, né questo può far le veci di quello. Qui non si possono dare delle definizioni vere e proprie. L'essenza dei concetti può essere

[1] [A. Korselt, *Über die Grundlagen der Geometrie*, ibid., 402-07 (1903).]

[2] [G. Frege, *Über die Grundlagen der Geometrie*, ibid, vol. 15, 293-309, 377-403, 423-30 (1906).]

[3] [*Grundlagen der Geometrie*, Discorso commemorativo per l'inaugurazione del monumento a Gauss e Weber a Gottinga (1ª ed., Lipsia 1899).]

caratterizzata dicendo che essi hanno una natura predicativa. Un oggetto invece non può mai essere predicato di qualcosa. Se io dico "La stella della sera è Venere", non attribuisco al soggetto il predicato Venere, ma *coincidente con Venere.* Linguisticamente, agli oggetti corrispondono i nomi propri, ai concetti corrispondono i termini concettuali (*nomina appellationis*). Nella lingua tuttavia non si insiste molto sulla rigorosità della distinzione, dal momento che termini che sarebbero originariamente nomi propri (per esempio "Luna"), possono diventare termini concettuali, e viceversa termini concettuali (per esempio "dio") possono diventare nomi propri. I termini concettuali si presentano vuoi con l'articolo indeterminato, vuoi con parole come "tutti", "alcuni", "molti" ecc. Ci sarebbero qui ancora parecchi particolari, sui quali non mi soffermo in questa sede. Fra oggetti e concetti (di primo grado) sussiste poi la relazione di sussunzione: un oggetto cade *sotto* un concetto; per esempio, Jena è una città sede di università. Per lo più i concetti sono composti da concetti parziali, le note caratteristiche. *Panno di seta nero* ha le note caratteristiche *nero, di seta* e *panno.* Un oggetto che cade sotto questo concetto ha tali note caratteristiche come proprietà. Ciò che è *nota caratteristica* rispetto al concetto, è *proprietà* di un oggetto che cade sotto quel concetto. Del tutto diversa dalla sussunzione è la subordinazione di un concetto di primo grado sotto un altro concetto di primo grado, come per esempio "Tutti i quadrati sono rettangoli". Le *note caratteristiche* del concetto sopraordinato (rettangolo) sono *note caratteristiche* anche del concetto subordinato (quadrato). Se io dico "Esiste almeno una radice quadrata di 4", non affermo niente di 2 o di -2, ma affermo qualcosa solo del concetto radice quadrata di 4. E neppure assegno una nota caratteristica di questo concetto, ma anzi questo concetto deve già essere completamente noto. Non metto in evidenza una parte costitutiva del concetto, ma dò di esso una certa proprietà, che lo differenzia, ad esempio, dal concetto *numero primo pari maggiore di* 2.[1] Io paragono le singole note caratteristiche alle pietre di cui è costituita una casa, mentre paragono ciò che viene affermato nella nostra propo-

[1] [Infatti, mentre sotto il concetto "radice quadrata di 4" cade almeno un oggetto (ad esempio il numero 2), questo non succede ovviamente per il concetto "numero primo pari maggiore di 2" proprio in virtú della definizione stessa di numero primo.]

sizione a una proprietà della casa, per esempio alla sua spaziosità. Anche qui viene affermato qualcosa, ma non un concetto di primo grado, bensí uno di secondo grado. Proprio come Jena sta in un rapporto determinato col concetto *città sede di università,* in modo del tutto analogo *radice quadrata di 4* sta in un determinato rapporto con il concetto di *Esgibtexistenz.*[1] Qui abbiamo una relazione fra concetti, ma non fra concetti di primo grado come accadeva nella subordinazione, bensí fra un concetto di primo e uno di secondo grado, che è simile alla sussunzione di un oggetto sotto un concetto di primo grado. Il concetto di primo grado assolve qui una parte simile a quello dell'oggetto nella sussunzione, e il concetto di secondo grado una parte simile a quello che là assolveva il concetto di primo grado. Anche in questo caso si potrebbe parlare di sussunzione, malgrado che qui la relazione sia simile ma non uguale alla sussunzione di un oggetto sotto un concetto di primo grado. Vorrei dire: un concetto di primo grado cade non *sotto,* ma *in* un concetto di secondo grado. La distinzione fra concetti di primo e di secondo grado è dunque altrettanto rigorosa di quella fra oggetti e concetti di primo grado; poiché gli oggetti non possono mai far le veci dei concetti, ne segue che un oggetto non può mai cadere sotto un concetto di secondo grado; ciò non sarebbe falso, ma senza senso. Se si volesse tentare linguisticamente qualcosa di simile, non si otterrebbe né un pensiero vero né un pensiero falso, ma semplicemente non si otterebbe alcun pensiero. D'altronde ho già pubblicato qualcosa su concetto e oggetto nel periodico di Avenarius.[2] Un altro esempio di proprietà di un concetto di primo grado ci è fornito dalla seguente proposizione: se sotto questo concetto cade un oggetto, sotto di esso ne cade anche un altro diverso dal primo. Qui abbiamo un secondo esempio di concetto di secondo grado. Da questi due, come da note caratteristiche di secondo grado, possiamo formare un terzo concetto di secondo grado nel quale cadono tutti i concetti di primo grado sotto cui cadono almeno due oggetti distinti. In questo

[1] [Questo termine è praticamente intraducibile in italiano; ricordando però il significato attribuito da Frege all'espressione *Es gibt* (esiste almeno un) si può rendere come "esistenza di almeno un"; questo è un concetto di secondo grado, *nel* quale cade, ad esempio, il concetto di primo grado "radice quadrata di 4".]

[2] [Frege allude all'articolo *Oggetto e concetto* (cfr. pt. 3) pubblicato appunto sulla "Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie", la rivista di Avenarius, nel 1892.]

concetto di secondo grado cadono ad esempio i concetti *numero primo*, *pianeta*, *uomo*. A me pare che in un primo momento il professor Hilbert abbia in mente di definire concetti di secondo grado; ma non li distingua da quelli di primo grado. Cosí si riesce a spiegare — ciò che nell'esposizione hilbertiana rimane senza dubbio sempre oscuro — come mai lo stesso concetto venga apparentemente definito due volte. Non si tratta in realtà dello stesso concetto. Dapprima è un concetto di secondo grado, successivamente un concetto di primo grado che cade nel precedente. L'errore consiste nella confusione anzidetta, e nel fatto che a entrambi i concetti viene collegata la stessa parola (ad esempio "punto").

Con cordiali saluti,

Gottlob Frege

Prima lettera a David Hilbert

27 dicembre 1899

... Prendo spunto da un'osservazione di Thomae [1] sulla spiegazione che Lei dà nel paragrafo 3 del suo volume sui fondamenti della geometria.[2] Thomae disse press'a poco quanto segue: "Questa non è una definizione; essa infatti non assegna alcuna caratteristica mediante la quale poter riconoscere che ha luogo la relazione del 'fra'." Neppure io posso ritenerla una definizione; e in effetti anche Lei non le dà questo nome, ma la chiama spiegazione. Evidentemente, Lei usa le due espressioni, "spiegazione" e "definizione", per denotare cose diverse: ma proprio questa diversità non ci è chiara. Le spiegazioni del paragrafo 4 sembrano essere in tutto e per tutto dello stesso tipo delle Sue definizioni; nelle spiegazioni suddette, ad esempio, viene indicato che cosa debbano significare le parole "giacere sulla retta *a* dalla stessa parte

[1] [Professor J. Thomae, ordinario di matematica all'università di Jena, collega di Frege. Aderente all'indirizzo formalistico dell'aritmetica, le sue vedute (già prese in considerazione da Frege nei *Fondamenti*) verranno aspramente criticate nel secondo volume dei *Principi*. Si confronti al riguardo la parte quinta del presente volume.]

[2] ["I punti e le rette stanno fra loro in determinate relazioni, per la descrizione delle quali ci serve particolarmente la parola 'fra'." (*Grundlagen der Geometrie*, 1ª ed., p. 6). Va notato in generale che nelle successive edizioni della sua opera, e forse in seguito a questo scambio epistolare con Frege, Hilbert denota come "definizioni" alcune proposizioni che nella prima edizione figuravano come "spiegazioni".]

del punto *O*", proprio nello stesso modo con cui, nella definizione che segue, viene ad esempio stabilito il significato dell'espressione "successione di segmenti". Sono invece di tutt'altro tipo le spiegazioni dei paragrafi 1 e 3, nelle quali i significati delle parole "punto", "retta", "piano", "fra", non vengono indicati, ma presupposti come noti. Almeno cosí sembra. Resta però anche oscuro che cosa Lei chiami punto. A tutta prima vien fatto di pensare ai punti nel senso della geometria euclidea, e la Sua affermazione — che gli assiomi esprimono fatti fondamentali della nostra intuizione — conferma tale opinione. In seguito però (p. 20) Lei intende per punto una coppia di numeri. Resto dubbioso di fronte alle affermazioni che per mezzo degli assiomi della geometria si raggiunge la descrizione completa e precisa delle relazioni (§ 1), e che gli assiomi definiscono il concetto del "fra" (§ 3). Con ciò si ascrive agli assiomi qualcosa che è compito delle definizioni. Cosí facendo, vengono — a mio parere — seriamente confusi i confini fra assiomi e definizioni, e, accanto al significato tradizionale della parola "assioma" — quale risulta nell'affermazione che gli assiomi esprimono fatti fondamentali dell'intuizione, — mi sembra ne affiori un secondo, che peraltro non mi riesce di cogliere esattamente. Orbene, per quanto riguarda le definizioni, è già diffusa nella matematica una grossa confusione e parecchi sembrano attenersi alla regola:

> Si consideri come definizione ciò di cui non si possiede un'esatta dimostrazione.

Tenuto conto di questo, non ritengo sia opportuno aumentare vieppiú tale confusione, impiegando anche la parola "assioma" in senso oscillante e parzialmente analogo a quello della parola "definizione". Penso sarebbe ora che ci si intendesse una buona volta sull'essenza e sui compiti della definizione e, conformemente a ciò, sui princípi cui attenersi nel definire (vedi i miei *Princípi dell'aritmetica*, vol. 1, § 33).[1] Attualmente mi sembra che regnino in proposito anarchia completa e arbitrio soggettivo. Voglia permettermi di esporre alcuni risultati delle mie riflessioni sull'argomento. Io desidererei suddividere la totalità delle proposizioni matematiche, ponendo da un lato tutte le defini-

[1] [Nella parte quinta del nostro volume sono riportati i princípi del definire che Frege stabilisce per definizioni formulate in linguaggio comune, princípi che traducono in tale contesto i criteri dati nel paragrafo qui accennato e che sono invece dedicati alle definizioni formulate nell'ideografia.]

zioni e dall'altro tutte le proposizioni rimanenti (assiomi, princípi, teoremi). Ogni definizione contiene un segno (un'espressione, una parola) che in precedenza non possedeva alcun significato, e al quale viene attribuito un significato soltanto per mezzo della definizione stessa. Una volta fatto questo, si può dalla definizione ricavare una proposizione ovvia, che va impiegata come un assioma, tenendo però sempre ben presente che con la definizione non si asserisce alcunché, ma soltanto si stabilisce qualcosa. Di conseguenza non è mai lecito presentare come definizione qualcosa la cui verità abbisogni di una dimostrazione o comunque di una fondazione. Io uso il segno di uguaglianza quale segno di identità. Orbene, supponiamo che siano noti i significati del segno piú, del segno tre e del segno uno, ma non quello del segno quattro: possiamo allora attribuire un significato a quest'ultimo, per mezzo dell'uguaglianza "$3+1=4$". Ciò posto, tale uguaglianza risulta adesso di per sé vera, né richiede piú alcuna dimostrazione. Ma se uno volesse sbarazzarsi del peso di dimostrare qualcosa stabilendo una definizione, ebbene, costui farebbe del gioco di prestigio logico. Proprio per queste ragioni è essenziale, per il rigore delle indagini matematiche, che la distinzione fra le definizioni e tutte le altre proposizioni sia attuata con assoluta precisione. Le altre proposizioni (assiomi, princípi, teoremi) non possono contenere nessuna parola (segno) di cui non siano già completamente fissati in precedenza il senso e il significato — oppure (per i termini grammaticali, per le lettere nelle formule) non sia fissato il contributo all'espressione del pensiero — cosicché non rimanga alcun dubbio sul senso della proposizione, ossia sul pensiero da essa espresso. Allora può trattarsi solamente di decidere se questo pensiero sia vero e, in tal caso, su che cosa si basi la sua verità. Assiomi e teoremi non possono dunque mai stabilire per la prima volta il significato di un segno o di una parola che ricorra in essi, ma, anzi, questo significato deve essere precedentemente fissato. Si può ancora assumere un terzo tipo di proposizioni, le proposizioni esplicative, che io però preferirei non annettere alla matematica vera e propria, relegandole in anticamera, in una matematica propedeutica. Esse sono simili alle definizioni, in quanto anche con esse si tratta di stabilire il significato di una parola (segno). Anch'esse quindi contengono qualcosa il cui significato non può venir supposto noto, almeno in

modo completo e indubbio, perché questo qualcosa viene se mai usato nella lingua di tutti i giorni in modo oscillante e ambiguo. Se, in simili casi, il significato da attribuirsi è logicamente semplice, non si può dare una definizione vera e propria, ma ci si deve limitare a richiamare l'attenzione sui significati, ricorrenti nell'uso linguistico, ai quali si vuol rinunciare e su quello invece che si intende mantenere; procedimento questo, in cui si deve certamente fare sempre assegnamento su una comprensione conciliante e intelligente. Tali proposizioni esplicative non possono venir impiegate nelle dimostrazioni allo stesso modo delle definizioni, poiché a esse difetta la necessaria precisione; questa è la ragione per cui, come ho già detto, preferisco relegarle in anticamera. Attribuisco il nome di assiomi a proposizioni che sono vere, ma che non vengono dimostrate poiché la loro conoscenza scaturisce da una fonte conoscitiva di natura extralogica, che possiamo chiamare intuizione spaziale. Il fatto che gli assiomi sono veri ci assicura di per sé che essi non si contraddicono fra loro, e ciò non abbisogna di alcuna ulteriore dimostrazione. Anche le definizioni non possono contraddirsi fra loro. Se ciò avviene esse sono erronee. I princípi del definire debbono essere strutturati in modo tale che, nell'attenersi a essi, non possa comparire nessuna contraddizione. Se io stabilissi il Suo assioma II 1 nella forma da Lei usata,[1] presupporrei in esso come noti in modo completo e inequivocabile i significati delle espressioni "Qualcosa è un punto di una retta" e "*B* giace fra *A* e *C*" (per quest'ultima la stipulazione dovrebbe esser fatta in generale, qualunque cosa si intenda con le lettere). L'assioma non può allora servire a spiegare con piú precisione per esempio la parola "fra", e naturalmente è impossibile attribuire poi a tale parola un significato supplementare, come Lei accenna a pagina 20. Se questo nuovo significato è diverso da quello che nel paragrafo 3 viene assegnato alla parola "fra", Lei ottiene una ambiguità che lascia seriamente perplessi. Sembra ci sia ben poco altro da fare, se non supporre che la parola "fra" non abbia ancora nessun significato nell'assioma II 1. Ma in tal caso questo assioma non sarebbe vero e quindi non sarebbe un assioma nel senso che io dò a questa parola e che penso sia quello generalmente accettato. Se inoltre — come

[1] [L'assioma in parola afferma, nella citata opera di Hilbert: "Se *A*, *B*, *C*, sono punti di una retta, e *B* giace fra *A* e *C*, allora *B* giace anche fra *C* e *A*."]

è probabile — tale parola nel paragrafo 3 non ha ancora, in generale, alcun senso, allora neppure la proposizione II 1 ha un senso, ossia essa non esprime alcun pensiero, e quindi non è neanche un fatto fondamentale della nostra intuizione. Ma qual è allora il suo ufficio? Deve essa forse — al pari di una definizione — stabilire il significato del termine "fra"? Se le cose stanno cosí, non si potrà piú, in seguito, stabilire un'altra volta tale significato. Nel paragrafo 6 Lei dice: "Gli assiomi di questo gruppo definiscono il concetto della congruenza o del movimento." Ma allora, perché mai essi non vengono chiamati definizioni? E che differenza c'è, in generale, fra definizioni e assiomi? Questi ultimi non soddisfano di certo ai requisiti di una definizione, in primo luogo già per il fatto che gli assiomi sono molti mentre la definizione è una sola, e inoltre perché negli assiomi ricorrono espressioni ("da un lato assegnato della retta *a*") i cui significati non sembrano ancora nemmeno essi ben stabiliti. Non nego che per poter dimostrare la reciproca indipendenza degli assiomi Lei si debba porre da un punto di vista piú elevato, dal quale la geometria euclidea appare come un caso particolare di un qualcosa piú generale; ma — per le ragioni addotte — non mi sembra che la via da Lei seguita a questo scopo sia senz'altro percorribile. Non attribuirei tanto valore al Suo lavoro, se non credessi di vedere, in modo approssimativo, come possano senir eliminate tali obiezioni; è chiaro però che ciò non sarà possibile se non a prezzo di trasformazioni notevoli. In primo luogo mi sembra via in ogni caso necessario intendersi sul significato delle espressioni "spiegazione", "definizione", "assioma", per le quali Lei si allontana notevolmente dal significato a me familiare e del resto tradizionale: per questa ragione mi diventa difficile sia distinguere una dall'altra queste espressioni nella Sua presentazione, sia riconoscere con piena chiarezza la costruzione logica...

Gottlob Frege

Risposta di David Hilbert

29 dicembre 1899

... Ancora un'osservazione preliminare: se vogliamo capirci, non possiamo dimenticare la disparità delle intenzioni che ci muovono. Io sono

stato costretto dalla necessità a stabilire il mio sistema di assiomi: volevo rendere possibile la comprensione di quelle, fra le proposizioni della geometria, che ritengo essere i risultati piú importanti delle indagini geometriche: ossia che l'assioma delle parallele non è conseguenza dei rimanenti assiomi, che lo stesso vale per l'assioma di Archimede ecc. Volevo rispondere alla domanda tendente a stabilire se la proposizione che in due rettangoli equivalenti e di ugual base sono uguali anche gli altri lati, può venir dimostrata o vada piuttosto assunta come un nuovo postulato, come già fa Euclide. In generale, volevo stabilire la possibilità di comprendere e dare una risposta a domande del tipo: perché la somma degli angoli interni di un triangolo vale due retti? E volevo inoltre chiarire come questo fatto fosse correlato all'assioma delle parallele. Credo che il mio volume e gli ulteriori lavori finora portati a termine dai miei allievi (dei quali mi permetto di segnalare la dissertazione del signor Dehn, di prossima pubblicazione nei "Mathematische Annalen" [1]) mostrino che il mio sistema di assiomi permette di rispondere a tali domande in modo perfettamente determinato, e che per molte di queste domande si ottiene una risposta molto sorprendente e anzi del tutto inattesa. Questa era dunque la mia intenzione principale. Con ciò naturalmente credo pure di aver formulato un sistema di geometria che soddisfa anche alle piú rigorose richieste della logica; giungo cosí propriamente a rispondere alla Sua lettera.

Lei dice che la mia spiegazione nel paragrafo 3 non è una definizione del concetto di "fra". In effetti mancano le note caratteristiche. Ma d'altronde queste note caratteristiche sono date dettagliatamente negli assiomi II 1 ... II 5. Se però si vuol assumere la parola definizione proprio nel senso tradizionale, si deve dire: "Fra" è una relazione fra i punti di una retta, che ha le seguenti note caratteristiche: II 1 ... II 5.

Lei dice inoltre: "Sono invece di tutt'altro tipo le spiegazioni nel paragrafo 1, nelle quali i significati delle parole punto, retta... non vengono indicati, ma presupposti come noti." Proprio qui si trova il punto cardinale dell'equivoco. Io non voglio presupporre nulla come noto; io vedo nella mia spiegazione del paragrafo 1 la definizione dei

[1] [M. DEHN, *Die Legendreischen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck* [I teoremi di Legendre sulla somma degli angoli del triangolo. Dissertazione tenuta a Gottinga nel 1899, pubblicata nei "Mathematische Annalen", vol. 53, 404-39 (1900).]

concetti punto, retta, piano, se si tornano ad assumere come note caratteristiche tutti gli assiomi dei gruppi I-V. Se si cercano altre definizioni di "punto", ricorrendo ad esempio a perifrasi come "privo di estensione" ecc., si capisce che debbo oppormi nel modo piú deciso a siffatti tentativi; si va infatti alla ricerca di qualcosa là dove non la si potrà mai trovare, per il semplice motivo che non è dove la si cerca; e cosí facendo tutto si disperde, diviene vago e confuso e degenera in un giocare a rimpiattino. Se ai miei assiomi Lei preferisce dare il nome di note caratteristiche dei concetti stabiliti nelle "spiegazioni" e perciò esistenti, ebbene da parte mia non avrei proprio nulla da obiettare, salvo che — cosí facendo — Lei va contro l'abitudine dei fisici e dei matematici; la cosa certa è che io debbo poter liberamente disporre anche dello stabilire le note caratteristiche. Infatti, non appena ho stabilito un assioma, esso esiste ed è "vero"; con ciò giungo ora a un ulteriore punto importante della Sua lettera. Lei scrive: "Attribuisco il nome di assiomi a proposizioni... Il fatto che gli assiomi sono veri ci assicura che essi non si contraddicono fra loro." Mi ha molto interessato leggere nella Sua lettera proprio questa frase, poiché io, da quando ho cominciato a riflettere, scrivere e tenere conferenze su questo argomento, ho sempre detto esattamente il contrario: Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi. Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza. La proposizione "Ogni equazione possiede una radice" è vera, ossia è dimostrata l'esistenza della radice, quando l'assioma "Ogni equazione possiede una radice" può venir aggiunto agli altri assiomi aritmetici senza che mai possa scaturirne una contraddizione in una qualunque conclusione da essi dedotta. A dire il vero, questa concezione è la chiave per la comprensione non solo del mio volume, ma anche, per esempio, della conferenza [1] sugli assiomi dell'aritmetica che ho di recente tenuto a Monaco, nella quale sviluppavo, o per lo meno accennavo alla dimostrazione del fatto che *esiste* un sistema di tutti i numeri reali ordinari, mentre, al contrario, *non esiste* il sistema di tutte le potenze cantoriane, o se si vuole di tutti gli Alef; cosa del

[1] [D. HILBERT, *Über den Zahlbegriff*, Jber. dtsch. MatVer, vol. 8, 180-84 (1900).]

resto che anche Cantor afferma nello stesso senso, anche se con parole leggermente diverse. Quindi, per ripetere ancora una volta la cosa principale: L'usare un nome per un altro, dicendo per esempio "note caratteristiche" invece di "assiomi" ecc., è certamente un fatto estrinseco, oltre che una questione di gusto, e d'altronde è in ogni caso di facile attuazione. Al contrario, voler dare in tre righe una definizione del punto è a mio modo di vedere una cosa impossibile, poiché una definizione completa di esso la dà piuttosto solo l'intero complesso degli assiomi. Proprio cosí: ogni assioma contribuisce alla definizione, e quindi ogni nuovo assioma fa variare il concetto. "Punto" è di volta in volta qualcosa di diverso, a seconda che lo consideriamo nella geometria euclidea, non euclidea, archimedea, non archimedea. Secondo il mio modo di vedere, l'aggiunta di un qualunque assioma, dopo che un concetto è stato stabilito in modo univoco e completo, è qualcosa di assolutamente illecito e non logico, — un errore in cui si incorre molto di frequente, specialmente da parte dei fisici. Nelle ricerche di fisica teorica compaiono spesso evidenti non sensi appunto per il fatto che i fisici assumono senza risparmio nuovi assiomi nel corso della ricerca, senza assolutamente confrontarli con le ipotesi ammesse in precedenza e senza dimostrare se i nuovi assiomi non contraddicano nessuna delle conseguenze tratte dalle precedenti ipotesi. Proprio il procedimento di stabilire un assioma, di appellarsi alla sua verità (?) e di concluderne che esso è compatibile con i concetti definiti è una delle fonti principali di errori e malintesi nelle moderne ricerche fisiche. Uno degli scopi principali del mio volume dovrebbe essere quello di evitare simili errori.

Ho solo ancora un'obiezione da muoverLe.

Lei dice che i miei concetti, per esempio "punto" e "fra", non sono stabiliti univocamente; che ad esempio "fra" è concepito in modo diverso a pagina 20 e che ivi il punto è una coppia di numeri. Certamente, si comprende da sé che ogni teoria è solo un telaio, uno schema di concetti unitamente alle loro mutue relazioni necessarie, e che gli elementi fondamentali possono venir pensati in modo arbitrario. Se con i due punti voglio intendere un qualunque sistema di enti, per esempio il sistema: amore, legge, spazzacamino..., allora basterà che assuma tutti i miei assiomi come relazioni fra questi enti perché le mie

proposizioni, per esempio il teorema di Pitagora, valgano anche per essi. In altre parole: ogni teoria può essere sempre applicata a infiniti sistemi di elementi fondamentali. Anzi occorre soltanto applicare una trasformazione biunivoca e convenire che gli assiomi per gli enti trasformati debbano essere uguali a quelli che valgono per i loro corrispondenti. Di fatto anche questa circostanza si applica di sovente, ad esempio col principio di dualità ecc., e io l'applico nelle mie dimostrazioni di indipendenza. Tutti gli enunciati di una teoria dell'elettricità valgono naturalmente anche per ogni altro sistema di enti che si sostituiscano al posto dei concetti magnetismo, elettricità..., purché siano soddisfatti gli assiomi richiesti. La circostanza or ora menzionata, però, non può mai rappresentare un difetto di una teoria (ne è piuttosto un grandissimo pregio) e in ogni caso è inevitabile. A dire il vero, secondo il mio punto di vista, nell'applicazione della teoria al mondo dei fenomeni si richiede sempre una certa dose di buona volontà e un certo senso della misura, che permettano di sostituire ai punti corpi quanto piú possibile piccoli, e alle rette enti quanto piú possibili lunghi, per esempio raggi luminosi. Cosí, nella verifica pratica delle proposizioni, non si dovrà essere troppo pedanti; infatti esse sono solo proposizioni della teoria. Del resto, quanto piú dettagliata è una teoria, e quanto piú finemente sviluppata è la sua costruzione, tanto piú ovvio diventa il tipo della sua applicazione al mondo dei fenomeni e ci vuole certamente un'enorme dose di cattiva volontà a pretendere che le piú sottili proposizioni della teoria delle superfici o della teoria maxwelliana dell'elettricità vengano applicate a fenomeni diversi da quelli per i quali queste teorie sono state escogitate...

David Hilbert

Seconda lettera a David Hilbert

6 gennaio 1900

... Dalla conferenza[1] da Lei tenuta a Monaco, per il cui gentile invio La ringrazio moltissimo, credo di aver afferrato un po' meglio il Suo intendimento. Mi sembra che Lei voglia staccare del tutto la geometria

[1] [Si veda p. 464, n. 1.]

dall'intuizione spaziale, trasformandola cosí in una scienza puramente logica al pari dell'aritmetica. Se comprendo bene il Suo pensiero, gli assiomi che, comunque garantiti non per mezzo dell'intuizione spaziale, vengono posti alla base dell'intera costruzione, debbono venir inseriti in ogni teorema come condizioni, non espressi a dir vero nella loro enunciazione completa, ma racchiusi nelle parole "punto", "retta", ecc. Lei vuol dimostrare la reciproca indipendenza e la non contraddittorietà di certe ipotesi (assiomi) e l'indimostrabilità di determinate proposizioni da certe ipotesi (assiomi). Riguardati da un punto di vista logico generale, questi problemi coincidono: si tratta sempre di dimostrare la non contraddittorietà di certe determinazioni. "*D* non è conseguenza di *A*, *B*, *C*" afferma la stessa cosa di "L'aver luogo di *A*, *B* e *C* non è in contraddizione col non aver luogo di *D*." "*A*, *B*, *C* sono fra loro indipendenti" significa: "*C* non è conseguenza di *A* e *B*; *B* non è conseguenza di *A* e *C* e *A* non è conseguenza di *B* e *C*." Una volta ricondotti, nel modo or ora accennato, tutti i problemi in questione a uno stesso schema, dovremo chiederci: di quale mezzo disponiamo per dimostrare che certe proprietà, o certi requisiti (o come altrimenti si vogliano chiamare) non sono fra loro contraddittori? L'unico mezzo che io conosca è il seguente: presentare un oggetto che possieda tutte quelle proprietà, o citare un caso in cui tutti quei requisiti siano soddisfatti. Non dovrebbe essere possibile dimostrare la non contraddittorietà per altra via. Se poi si tratta di dimostrare la reciproca indipendenza di assiomi, si dovrà far vedere che il non aver luogo di uno di essi non sta in contraddizione con l'aver luogo dei rimanenti.[1] (Mi adeguo qui all'uso che Lei fa della parola "assioma".) Orbene, nel dominio della geometria euclidea elementare, sarà impossibile portare un esempio del tipo richiesto, in quanto che, proprio in tale dominio, gli assiomi sono tutti veri. Per il fatto però che Lei si pone da un punto di vista piú elevato, dal quale la geometria euclidea appare come un caso particolare di un edificio teorico piú comprensivo, Le si apre la prospettiva di poter fornire esempi che

[1] [Frege delinea qui con notevole chiarezza e precisione il metodo — largamente impiegato dallo stesso Hilbert — per la dimostrazione che gli assiomi di un certo sistema sono fra loro indipendenti. Questo metodo consiste, come noto, nel costruire un'interpretazione che sia modello per tutti gli assiomi del sistema e non lo sia per l'assioma di cui si vuol dimostrare l'indipendenza.]

rendano evidente quella reciproca indipendenza degli assiomi. A dire il vero qui mi assale un dubbio, sul quale però non voglio insistere ulteriormente. Un fatto fondamentale mi sembra essere questo: che Lei vuole portare la geometria euclidea sotto un punto di vista piú elevato. E, in effetti, la dimostrazione dell'indipendenza reciproca degli assiomi, o sarà possibile per questa via o non lo sarà per alcun'altra. Mi sembra anche che un'impresa siffatta rivesta il piú alto interesse scientifico, se riferita agli assiomi nel senso antico e tradizionale della geometria euclidea elementare. Molto minore potrebbe invece risultare *in generale* l'importanza scientifica di un'impresa siffatta, estesa a un sistema di proposizioni stabilite arbitrariamente. Non oso decidere — a causa del dubbio prima accennato — se sia o no possibile dimostrare, con un tale procedimento, l'indipendenza reciproca degli assiomi della geometria euclidea. In ogni caso, la Sua idea di riguardare la geometria euclidea come caso particolare di una teoria piú comprensiva, è ricca di interesse anche se questa dimostrazione dovesse risultare impossibile.

Sono completamente d'accordo con Lei sul fatto che il metodo genetico [1] fa sentire la mancanza della sicurezza logica completa. Che lo sviluppo della scienza abbia preso questo indirizzo, sta nella natura stessa delle cose; a questo proposito tuttavia non va dimenticato che il sistema logicamente perfetto deve pur sempre essere chiaramente considerato quale scopo cui tende lo sviluppo anzidetto.

Lei scrive: "Secondo il mio modo di vedere, l'aggiunta di un qualunque assioma, dopo aver completamente e univocamente stabilito un concetto, è qualcosa di assolutamente illecito e non logico." Se qui ho compreso esattamente la Sua opinione, non posso che approvarla con gioia, tanto piú che avevo creduto di essere il solo a pensarla cosí. In effetti la deficienza del metodo genetico consiste proprio nei due fatti seguenti: 1) che i concetti non sono perfettamente delimitati

[1] [Nella conferenza su menzionata Hilbert denota con questo nome il procedimento — usualmente seguito a scopi didattici — che consiste nell'introdurre numeri di natura via via "superiore" mediante successive estensioni. Cosí ad esempio, ampliando il sistema dei numeri naturali si passa a quello degli interi, da questo a quello dei razionali e cosí via, riconoscendo ogni volta una certa qual "insufficienza" — solitamente di ordine pratico — ai numeri del sistema precedente. Si confronti il metodo seguito da Frege per introdurre i numeri reali, nel secondo volume dei *Princípi* ("Sguardo retrospettivo e previsioni", pt. 5).]

e vengono ciò malgrado impiegati in questo stato incompleto nel quale, a rigore, non ha senso impiegarli; 2) che non si sa mai se un concetto sia o no definitivamente delimitato. Avviene, cosí, che è possibile dimostrare proposizioni le quali vengono poi rese false da un successivo sviluppo, poiché si trasformano i pensieri in esse contenuti. Il pericolo è rappresentato proprio da queste trasformazioni, delle quali non si ha mai un'esatta coscienza, in quanto gli enunciati restano i medesimi.

Anche nel rigettare la definizione di "punto" mediante la perifrasi "privo di estensione", concordo con Lei; soltanto, non avrei timore di ammettere che sia impossibile dare, in generale, una definizione di "punto".

Fintanto che ci muoviamo su un piano cosí generale, sembra esservi, fra noi, una concordanza soddisfacente. Altrimenti stanno le cose, allorché scendiamo ai dettagli. Avevo già prima considerato la possibilità di concepire i Suoi assiomi come componenti le Sue definizioni; purtuttavia mi ha sorpreso apprendere che gli assiomi dei gruppi I-V vanno assunti, nella loro totalità, come integrazione della spiegazione data nel paragrafo 1. In base a ciò questa spiegazione — unitamente a quanto le è associato — occupa propriamente tutto il capitolo I della Sua opera, e in essa sono come inscatolati numerosi altri assiomi e spiegazioni. Confesso che questa costruzione logica mi appare problematica e in massimo grado non perspicua. Dalle mie riflessioni sul definire, sono stato portato a essere sempre piú esigente nelle mie richieste al riguardo, e invero mi sono talmente allontanato dall'opinione della maggior parte dei matematici, che una comprensione fra me e loro è divenuta molto difficile. Le ragioni del mio stupore vengono forse messe esplicitamente in luce con la considerazione della spiegazione che Lei dà nel paragrafo 3. Porto a confronto la definizione gaussiana di congruenza numerica. Se si sa che cos'è la differenza e che cosa significa l'espressione "Un numero è divisibile per un altro", mediante la suddetta spiegazione di Gauss si domina completamente la congruenza numerica e si può decidere immediatamente, per esempio, se è $2 \equiv 8 \pmod{3}$. La cosa sarebbe completamente diversa se la parola "congruente" venisse spiegata non soltanto ricorrendo a concetti noti,

bensí anche per mezzo di sé stessa, se cioè, per esempio, seguendo il metodo da Lei usato, si dicesse:

"Spiegazione. I numeri interi stanno fra loro in certe relazioni, per la descrizione delle quali ci serve particolarmente la parola 'congruente'.

Assioma I. Ogni numero è congruente a sé stesso secondo un modulo arbitrario.

Assioma II. Se un numero è congruente a un altro numero e questo è congruente a un terzo secondo lo stesso modulo, allora anche il primo numero è congruente al terzo secondo questo stesso modulo, ecc." Orbene, si potrebbe da ciò dedurre che $2 \equiv 8 \pmod 3$? Difficilmente! Nella Sua spiegazione del "fra", la situazione è ancora piú sfavorevole; infatti i Suoi assiomi dell'ordinamento contengono in piú le parole "punto" e "retta", i cui significati sono altrettanto sconosciuti. Il sistema di definizioni che Lei usa è paragonabile a un sistema di equazioni a piú incognite per il quale rimane dubbia la risolubilità, e in particolare l'univocità della determinazione delle incognite. Se una tale soluzione esistesse, sarebbe meglio darla esplicitamente, ossia converrebbe spiegare ognuna delle espressioni "punto", "retta", "fra", mediante concetti già noti. Mediante le Sue definizioni non vedo come io possa decidere la questione se il mio orologio sia o no un punto. Già il primo assioma parla di due punti; qualora dunque volessi sapere se l'assioma in parola vale per il mio orologio, dovrei dapprima sapere di un altro oggetto che esso sia un punto. Ma anche se io sapessi, per esempio della mia penna, che essa è un punto, sarei sempre nella impossibilità di decidere se il mio orologio e la mia penna determinano una retta, dal momento che non saprei che cos'è una retta. Ulteriori difficoltà solleverebbe la parola "determinare". Ma se pure io intendessi le parole "punto" e "retta" nel senso della geometria elementare, e se mi fossero dati tre punti su una retta, ebbene, in base alla Sua spiegazione e agli assiomi a essa associati, non sarei tuttavia ancora in grado di decidere quale di questi punti giaccia fra gli altri due, come pure non saprei quale specie d'indagine dovrei condurre allo scopo di decidere la questione. A ciò si aggiunga ancora quanto segue. In base all'assioma I, 7, esistono su una retta almeno due punti. Orbene, che direbbe Lei di questa:

"Spiegazione. Pensiamo a oggetti che chiamiamo Dei.

Assioma I. Ogni Dio è onnipotente.
Assioma II. Ogni Dio è onnipresente.
Assioma III. Esiste almeno un Dio."?

Qui si deve tener conto della mia distinzione fra concetti di primo e di secondo grado — dico "mia" perché non mi consta che essa sia stata attuata prima di me con sufficiente rigorosità. Nell'espressione "esiste" abbiamo un concetto di secondo grado, che non può essere assunto assieme a *onnipotente* e a *onnipresente* — che sono concetti di primo grado — quale caratteristica di un concetto di primo grado (vedi i miei *Fondamenti dell'aritmetica*, § 53, dove invece di "grado" è detto "ordine", e i miei *Princípi dell'aritmetica*, § 21 e § 22). Le caratteristiche che Lei attribuisce nei Suoi assiomi, sono certo, complessivamente, di grado superiore al primo, vale a dire: esse non rispondono alla domanda "Quali proprietà deve possedere un oggetto per essere un punto, una retta, un piano... ecc.?", ma contengono, per esempio, relazioni di secondo grado, come quella del concetto "punto" rispetto al concetto "retta". A me sembra che Lei propriamente voglia definire concetti di secondo grado, senza però distinguerli chiaramente da quelli di primo grado. Proprio dalla stessa origine discendono le obiezioni che si possono muovere alla definizione di grandezza che ad esempio viene presentata da Stolz nell'introduzione delle sue lezioni di aritmetica generale.[1] Caratteristico di questa definizione è il comparire della parola "omogeneo" con significato completamente nebuloso. Ebbene, tutto ciò si può qui evitare solo impostando la questione in modo diverso. Analogamente si dovrebbe procedere per sanare i difetti che credo di poter riscontrare nelle Sue definizioni; solo che in questo caso la cosa sarà considerevolmente piú difficile, poiché qui, invece che di un solo sistema, si deve tener conto di tre sistemi (dei punti, delle rette, dei piani) e di numerose relazioni. E del resto, che cosa intende Lei qui per sistema? Io credo trattarsi della stessa cosa che viene altrimenti chiamata insieme o classe e che piú esattamente dovrebbe chiamarsi estensione di un concetto.

Le nostre vedute divergono certamente nel modo piú assoluto riguardo al criterio di esistenza e unicità da Lei adottato. È probabile però che

[1] [O. Stolz, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, vol. 2 (Teubner, Lipsia 1885-86), introduzione.

io non afferri completamente la Sua opinione in proposito. Per chiarire questo punto faccio il seguente esempio. Supponiamo di sapere che le proposizioni

1. *A* è un essere intelligente,
2. *A* è onnipresente,
3. *A* è onnipotente,

con l'insieme delle loro conseguenze, non siano in contraddizione fra loro; saremmo da ciò autorizzati a concludere che esiste un essere intelligente, onnipresente e onnipotente? Questo non mi sembra chiaro. Il principio assumerebbe a un dipresso la forma seguente:

Se le proposizioni
"*A* ha la proprietà φ"
"*A* ha la proprietà ψ"
"*A* ha la proprietà χ",
col complesso delle loro conseguenze, non si contraddicono vicendevolmente (e questo in generale, qualunque sia *A*), allora esiste un oggetto che ha tutte queste proprietà φ, ψ, χ.

Il principio non mi risulta evidente e se anche fosse vero sarebbe probabilmente inutile. Esiste qui un altro mezzo, per dimostrare la non contraddittorietà delle proprietà in questione, che non sia quello di mostrare un oggetto il quale le possieda tutte? Ma se abbiamo un oggetto siffatto, non c'è bisogno di ricorrere alla non contraddittorietà, per dimostrare che tale oggetto esiste.

Se una proposizione generale contiene una contraddizione, lo stesso accade per ogni proposizione particolare in essa compresa. Di conseguenza, dalla non contraddittorietà di queste ultime si può concludere la non contraddittorietà della proposizione generale, ma non viceversa. Supponiamo di aver dimostrato che in un triangolo rettangolo isoscele il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente al doppio del quadrato costruito su un cateto, proposizione questa piú facile a dimostrarsi che non il teorema generale di Pitagora. A partire da essa possiamo ora ricavare che la proposizione — in un triangolo rettangolo isoscele il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, — non contiene nessuna contraddizione (né in sé stessa, né con gli assiomi della geometria). Da ciò possiamo ulteriormente concludere che anche la proposizione generale di Pitagora

non contiene contraddizioni (né in sé stessa, né con gli assiomi della geometria). Adesso però, possiamo anche trarne quest'altra conclusione, che quindi la proposizione di Pitagora è vera? Non posso accettare questo tipo di inferenza dalla non contraddittorietà alla verità. Probabilmente anche Lei è della stessa opinione. Comunque sia sembra essere necessaria una formulazione piú precisa.

Un altro pericolo di carattere logico risiede, a mio parere, nel fatto che Lei dice, ad esempio, "Assioma delle parallele", come se esso fosse lo stesso in ogni altra geometria. Soltanto l'enunciato è lo stesso; il pensiero in esso contenuto è diverso nelle diverse geometrie. Non sarebbe esatto dire *il* teorema di Pitagora per denominare il caso ora menzionato di esso; infatti, una volta dimostrato quel caso particolare, non si è ancora dimostrato *il* teorema di Pitagora. Ma anche posto che questi assiomi, nelle geometrie particolari, siano tutti casi particolari di assiomi piú generali, ebbene, dalla non contraddittorietà in una particolare geometria si può certo concludere la non contraddittorietà nel caso generale, ma non la non contraddittorietà in altri casi particolari.

Riguardo a quanto Lei afferma sulla applicabilità di una teoria e sulle trasformazioni biunivoche, mi riservo ancora di obiettare...

Gottlob Frege

PARTE QUINTA

da *I princípi dell'aritmetica*
esposti ideograficamente

Volume primo: 1893
Volume secondo: 1903

[Nel complesso della produzione scientifica di Frege, i *Princípi dell'aritmetica* occupano senza dubbio una posizione del tutto particolare: da una parte infatti essi rappresentano la *summa* del pensiero freghiano, in quanto vi confluiscono, per essere definitivamente elaborati e organicamente inquadrati in un rigoroso sistema assiomatico, tutti i risultati ottenuti da Frege nelle sue indagini precedenti; d'altra parte, proprio quest'opera, cui era affidata la realizzazione concreta del programma logicistico del nostro autore, si conclude con una "Nota finale" (*Nachwort*) nella quale viene data comunicazione della crisi apertasi nel programma stesso, a causa dell'ormai famosa scoperta di Russell.

Basta questo brevissimo accenno per qualificare i *Princípi* come l'opera principale di Frege. In questa sede ci limiteremo a darne una rapida descrizione, rimandando per piú ampie notizie all'introduzione del presente volume, e alle singole premesse alle varie sezioni in cui si articola questa quinta parte.

L'opera si compone di due volumi, suddivisi in tre sezioni, precedute da una lunga prefazione e seguite dall'epilogo cui si è sopra accennato.

Nella prefazione non vengono trattati problemi strettamente logici; vi si svolge una tematica piú generale, che per molti lati si avvicina a quella già discussa nell'introduzione ai *Fondamenti*. Qui vi è però una maggior maturità di pensiero, cui contribuiscono notevolmente i risultati raggiunti da Frege negli studi precedenti (teoria del concetto, teoria del significato, ecc.).

Nella prima sezione, dal titolo "Esposizione dell'ideografia" (§§ 1-52, vol. 1), Frege presenta il sistema assiomatico che intende impiegare nelle derivazioni che seguiranno: dopo aver esposto la versione definitiva del suo simbolismo — che è un'elaborazione di quello presentato nel 1879, integrata dall'assunzione di un nuovo segno fondamentale — egli introduce le regole inferenziali del sistema, e ne precisa infine la base assiomatica, consistente in cinque postulati.

La seconda sezione, "Dimostrazioni dei princípi fondamentali del numero" (dal § 53, vol. 1 al § 54, vol. 2) è la piú significativa agli effetti del pensiero di Frege. In essa infatti egli viene esponendo — nel contesto del sistema assiomatico precedentemente stabilito — la derivazione simbolica delle proposizioni fondamentali dell'aritmetica, ciò che forma il precipuo scopo dell'opera: "Si trovano in questo libro quelle pro-

posizioni sulle quali si basa l'aritmetica, dimostrate in simboli ..." In altre parole, in questa parte dell'opera viene posto in atto il processo di logicizzazione della matematica; va notato subito che il successivo fallimento di principio dell'ambizioso disegno freghiano, nulla toglie al rigore delle dimostrazioni e all'eccezionale profondità di analisi di cui Frege dà prova nel corso di queste pagine. Dopo alcuni teoremi generali, egli dimostra alcune proposizioni riguardanti in particolare il numero 0 e il numero 1; indi definisce il numero *infinito* [1] come numero spettante al concetto *numero finito*, e ne dimostra alcune proprietà tanto semplici quanto interessanti; in effetti, i risultati cui Frege perviene nel corso di tale indagine, permettono di far risalire al nostro autore il concetto di progressione, nonché l'importante proposizione che il numero cardinale di un insieme è $\aleph_0$ se e solo se quell'insieme costituisce il campo di una progressione.

Nella terza sezione, "I numeri reali" (§§ 55-245, vol. 2), Frege prospetta una sua teoria, elaborata su basi puramente aritmetiche — e quindi, per il nostro autore, logiche — per la introduzione dei numeri reali; all'esposizione delle sue vedute fa però precedere un'ampia e particolareggiata confutazione — estremamente interessante anche se non sempre serena ed obiettiva — dei noti procedimenti proposti allo stesso fine da altri autori (Cantor, Dedekind, Weierstrass, ecc. ...).

L'opera termina infine con una "Nota finale" nel quale Frege dà notizia della lettera inviatagli da Russell circa l'antinomia derivabile nel suo sistema logico. Il nostro autore dimostra come essa sia originata dall'accettazione incondizionata del quinto postulato formulato nella prima parte del suo lavoro; tenta quindi di circoscrivere la portata di tale postulato, suggerendo cosí una possibile via per eliminare l'antinomia, via rivelatasi peraltro infruttuosa alla luce di studi posteriori a Frege.

Nelle pagine che seguono riportiamo i passi filosoficamente piú significativi della prefazione all'opera, un'ampia selezione da "I numeri reali" e infine la "Nota finale" nella sua integrità. La selezione da "I numeri reali" è suddivisa — conformemente all'originale — in vari capitoli e proprio perciò si è ritenuto utile per il lettore far precedere a ciascuno di essi una breve nota esplicativa, in aggiunta alla premessa generale all'intera selezione. Va notato infine che non abbiamo creduto opportuno attingere alla prima e seconda parte dell'opera data l'impossibilità di operare in esse un qualsiasi stralcio che possedesse un valore piú che dimostrativo; d'altra parte però gli argomenti cui esse sono dedicate vengono ampiamente trattati nell'introduzione al nostro volume.]

[1] [*Endlos*; quando non figuri in contesti originali di Frege, noi lo chiameremo — come d'uso dopo i fondamentali lavori di Cantor — *aleph con zero* e lo indicheremo con $\aleph_0$.]

Logica, matematica, psicologia

dalla prefazione (volume primo)

[Come poco sopra si è detto, trovano posto in questa sezione le pagine filosoficamente piú significative della lunga prefazione ai *Princípi*. Per facilitarne la lettura, accenneremo in breve agli argomenti fondamentali svolti nei tre paragrafi in cui abbiamo ritenuto opportuno raggrupparle.

Il primo di essi descrive con esattezza l'ideale del metodo matematico, insistendo soprattutto sui caratteri e sul significato della logicizzazione dell'aritmetica. Particolarmente notevole l'esigenza di elencare non solo i postulati, ma anche i metodi di deduzione sui quali si fonda la scienza. Oggi questa necessità è riconosciuta da tutti i piú moderni indirizzi di logica.

Il secondo paragrafo contiene un'interessantissima polemica contro i matematici puri, in ispecie contro l'indirizzo formalistico, che confonde i numeri coi segni numerici. Va notato che all'epoca della composizione delle pagine che seguono (1893) tale indirizzo contava in Germania un buon numero di aderenti e tuttavia era ancora a uno stadio embrionale, nel senso che nessun suo rappresentante particolarmente autorevole ne aveva ancora esposto sistematicamente i canoni. La questione verrà ripresa da Frege nel secondo volume (1903), e cioè dieci anni piú tardi: nel frattempo però il clima intellettuale a questo proposito era profondamente mutato, soprattutto per l'elaborazione critico-sistematica apportata dalle opere di Hilbert (vedasi la parte quarta del presente volume); e la critica di Frege non sarà rivolta in generale contro l'indirizzo formalistico, ma si appunterà in particolare sulle opere di due matematici (E. Heine e J. Thomae) aderenti a tale indirizzo, e allora abbastanza noti in Germania. Comunque sia, sebbene su un tale argomento il punto di vista di Frege risulti oggi superato nelle sue linee essenziali, esso riesce però a portare una straordinaria chiarezza nei problemi discussi.

Il terzo paragrafo contiene una lunga e aspra polemica contro l'indirizzo della logica psicologistica, impersonato, secondo Frege, da Benno Erdmann. Essa è particolarmente interessante perché riesce a porre in chiarissima luce il motivo profondamente platonico, che ispira tutto l'atteggiamento filosofico del nostro autore. Nel presente paragrafo questo platonismo si rivela soprattutto in due punti: nell'affermazione del carattere assoluto e normativo delle leggi logiche; e nell'esplicito riconoscimento di un campo irreale e oggettivo, cioè di un campo non appartenente

al mondo dell'esperienza nè riducibile al mondo delle rappresentazioni soggettive. Ricordiamo infine che allo stesso argomento qui trattato è dedicata anche la recensione a Husserl che abbiamo inserito nella parte terza di questo volume.]

1. L'ideale di un metodo rigorosamente scientifico per la matematica potrebbe venire, secondo me, cosí delineato.

Che tutto venga dimostrato non si può certo pretendere, perché impossibile. Si può esigere però che tutte le proposizioni, che si usano senza dimostrazione, vengano espressamente enunciate come tali, affinché si riconosca con chiarezza ove si fonda l'intero edificio. Bisogna quindi cercare di restringere il loro numero al minimo possibile, dimostrando tutto ciò che risulta dimostrabile.

Si può esigere in secondo luogo — e con ciò io compio un passo al di là di Euclide — che vengano espressamente elencati, prima di costruire l'edificio matematico, i metodi di deduzione e di dimostrazione che si applicheranno in esso. Altrimenti è impossibile garantire che la stessa precedente esigenza sia davvero soddisfatta.

Eliminando qualsiasi lacuna dal concatenamento dei ragionamenti, si riesce a porre in luce ogni assioma, ogni presupposto, ogni ipotesi (o in qual altro modo la si voglia chiamare) su cui riposano le dimostrazioni; e cosí si raggiunge una base sicura, dalla quale valutare la natura conoscitiva delle leggi dimostrate. Certamente venne già affermato piú volte che la matematica costituisce soltanto un ulteriore sviluppo della logica; ma ciò rimane contestabile fino a quando compaiono nelle dimostrazioni matematiche procedimenti che non si attuino secondo leggi logiche riconosciute e sembrino invece fondarsi su una conoscenza intuitiva. Solo se riusciremo a scomporli in passaggi logici elementari, potremo essere certi che alla base della matematica non vi è nulla fuorché la logica.

Se qualcuno giudica erronea qualche proposizione, egli deve poter individuare esattamente dove risiede secondo lui l'errore: nelle leggi fondamentali, nelle definizioni, nelle regole o in qualche loro speciale applicazione. Se trova tutto a posto, deve vedere con precisione le basi sulle quali è fondato ogni singolo teorema.

Il mio scopo esige un certo distacco da ciò che è usuale nella mate-

matica. La pretesa di un completo rigore porta, come conseguenza inevitabile, una maggior lunghezza nelle dimostrazioni. Chi non badi a ciò, dovrà stupirsi perché io dimostro spesso, fin nei minimi particolari, teoremi che egli ritiene di afferrare immediatamente con un unico atto di conoscenza.

La cosa sembrerà particolarmente strana, se si paragona la mia opera al famoso libro di Dedekind *Essenza e significato dei numeri*,[1] che è senza dubbio lo studio piú profondo, uscito negli ultimi anni, intorno alle basi dell'aritmetica. Esso riesce infatti, in uno spazio notevolmente piú breve, a esaminare le leggi dell'aritmetica spingendosi assai piú innanzi di quel che non avvenga qui.

Va però notato, che Dedekind raggiunge l'anzidetta brevità solo perché tralascia spesso di dare una completa dimostrazione, e perché usa non di rado espressioni incomplete come M (A, B, C...). Nel suo libro noi non troviamo mai raccolte in un elenco completo le leggi logiche o di altro tipo, poste a base della sua ricerca; e del resto, se anche le trovassimo, non avremmo alcun modo di garantirci che in realtà vengano applicate esse sole e non altre (per renderci possibile un tale esame, le dimostrazioni dovrebbero essere sviluppate senza lacune, e non soltanto accennate). Anche Dedekind è del parere che la teoria dei numeri sia una parte della logica; non contribuisce però in alcun modo a corroborare quest'opinione, perché usa certe espressioni ("sistema", "un oggetto appartiene a un altro") che non sono abituali nella logica né vengono ricondotte a qualcosa di notoriamente logico. Non dico questo per muovergli un appunto; può darsi infatti che il suo modo di procedere risulti il piú consono allo scopo da lui propostosi; lo dico unicamente perché dal contrasto risulti piú chiara la mia intenzione.

Quanto poi alla lunghezza delle dimostrazioni essa non può venire misurata a metri. È facile far apparire breve sulla carta una dimostrazione, omettendo alcuni anelli intermedi nella catena dei nostri ragionamenti. Il piú delle volte ci si accontenta di far vedere che ogni passaggio della dimostrazione è esatto; e questo può anche bastare, se ci si propone soltanto lo scopo di rendere evidente al lettore la verità

[1] [R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen*?; tradotto da O. Zariski col titolo riferito nel testo (Stock, Roma 1926).]

del teorema dimostrato. Un tal modo di procedere non basta piú, invece, se si tratta di esaminare la natura di questa evidenza della verità; in tal caso infatti bisogna precisare tutti gli anelli del ragionamento, onde far cadere su di essi la luce completa della conoscenza.[1]

In genere i matematici si preoccupano soltanto del contenuto del teorema, e che esso risulti dimostrato. Nel mio libro invece la novità non è costituita dal contenuto del teorema, ma dal modo come vien condotta la dimostrazione, e dalla base su cui la fondiamo. Non deve quindi stupirci che questo punto di vista, essenzialmente diverso, richieda pure un altro tipo di trattazione. Quando si dimostra nel solito modo un teorema, si omettono facilmente le proposizioni che non sembrano necessarie per tale dimostrazione. Ma chi esamini attentamente una mia dimostrazione non stenterà — credo — a convincersi della necessità di ogni singolo passaggio da me notato, salvo che dimostri lo stesso teorema per una via completamente diversa. Per il medesimo motivo si troveranno spesso nei miei teoremi condizioni che non sembrano a prima vista necessarie, ma che in realtà lo sono (salvo nel caso che si dimostri, con un teorema all'uopo, che è possibile prescindere da esse).

2. Le prospettive del mio libro non sono certo molto belle. È chiaro infatti che esso non piacerà a quei matematici i quali, appena incontrano qualche espressione logica come "concetto", "rapporto", "giudizio", pensano subito: "Metaphisica sunt, non leguntur!" né a quei filosofi che, al vedere una formula, esclamano: "Mathematica sunt, non leguntur!" E sono abbastanza pochi coloro che non pensano cosí.

In genere non è già molto grande il numero dei matematici che si interessano alle basi della loro scienza; quelli stessi poi che se ne interessano, sembrano avere una gran fretta finché non hanno oltrepassato, nella loro trattazione, i primi princípi della matematica. Né io mi illudo che la mia analisi, con il suo scrupoloso rigore e la conseguente ampiezza, riuscirà a persuadere molti fra essi. Purtroppo quando un uso è diventato tradizionale, esso esercita una grande influenza su tutti gli spiriti.

[1] [Si ricordi quanto fu detto sul medesimo argomento nella seconda parte (§ 2 e § 90).]

Convenendo di paragonare l'aritmetica a un albero, le cui fronde si distendono in alto in una molteplicità di metodi e di teoremi, mentre le radici tendono a penetrare sempre piú in profondità, bisogna riconoscere che l'interesse per le radici è assai scarso, soprattutto in Germania.[1] Anche in un'opera, che dovrebbe venir annoverata in quest'indirizzo, voglio dire *L'algebra della logica* di E. Schröder, prende assai presto il sopravvento l'interesse per le fronde dell'albero; poiché, prima ancora di avere raggiunto una grande profondità, essa torna a rivolgersi verso l'alto e a svilupparsi in metodi e teoremi.

Sfortunatamente per la mia opera, è poi molto estesa la tendenza a riconoscere come dato solo ciò che è percepibile coi sensi, cercandosi di negare o dimenticare ciò che non viene da essi afferrato. Orbene, visto che gli oggetti dell'aritmetica, i numeri, non sono di natura sensoria, come ci si può rassegnare a ciò? In modo molto semplice: si gabellano per numeri i segni numerici. Certamente i segni hanno proprietà completamente diverse dai numeri; ma che importa? Si risolve facilmente la difficoltà, attribuendo a essi, per mezzo di cosiddette definizioni, le proprietà desiderate. È certo un enigma come si possa dare una definizione in cui non si fa questione di alcun nesso fra segno e oggetto designato. In pratica si mescolano in un tutto unico segno e significato [2] di modo che risultino fra loro meno discernibili che sia sia possibile; e poi, secondo i bisogni, ci si riferisce alla loro palpabilità, per poter affermare che sono esistenti [3] o ci si riferisce alle effettive proprietà dei numeri. Talvolta qualcuno sembra considerare i segni numerici come pezzi del giuoco degli scacchi, e le cosiddette definizioni come regole di detto giuoco. In tal caso il segno non designa piú nulla, ma costituisce esso medesimo l'oggetto. Si trascura però una piccolezza, e cioè che una formula aritmetica come "$3^2+4^2=5^2$" esprime un pensiero, mentre una disposizione dei pezzi degli scacchi

[1] [Oggi certamente non si potrebbe piú ripetere una simile osservazione. E del resto il merito di questo nuovo stato di cose spetta in gran parte a Frege, sebbene la sua influenza si sia fatta sentire piú sulla generazione seguente che non sui suoi contemporanei.]

[2] [Si ricordi quanto fu stabilito nell'articolo *Senso e significato* (pt. 3).]

[3] Ecco, per esempio, quanto scrive E. HEINE, nella nota *Die Elemente der Funktionslehre* [Gli elementi della teoria delle funzioni] sul "Journal de Crelle", vol. 74. 173: "Io mi pongo, nella definizione, da un punto di vista rigorosamente formale, chiamando numeri certi segni palpabili, di modo che non può sorgere alcun problema sull'esistenza di questi numeri."

non dice nulla. Dove ci si accontenta di questa superficialità, non vi è certo posto per una concezione piú profonda.

È qui necessario spiegare chiaramente che cosa significhi il definire e che cosa possa raggiungersi con quest'atto. Sembra che alcuni autori gli attribuiscano spesso una forza creatrice, mentre in realtà esso non riesce a null'altro, se non a delimitare un oggetto e a denotarlo con un nome. Come il geografo non crea il mare, mentre ne traccia le coste e mentre dice, per esempio, "Voglio chiamare Mar Giallo la porzione di superficie acquea limitata da queste linee"; cosí anche il matematico non può, a rigor di termini, creare nulla con le sue definizioni. Nemmeno è possibile, per mezzo di una pura definizione, conferire a un ente qualche proprietà che esso già non possegga, salvo quella di portare un nome diverso da un altro. Ma che una certa figura rotonda tracciata con l'inchiostro sulla carta, debba, in forza di una semplice definizione, ottenere la proprietà notevolissima di riprodurre, se addizionata a uno, il numero uno stesso, posso ritenerlo solo una superstizione scientifica. Nello stesso modo si potrebbe, con una pura e semplice definizione, rendere diligente uno scolaro pigro. Se si afferma: "Il quadrato è un rettangolo, in cui due lati consecutivi sono uguali", si definisce con ciò il *quadrato* indicando quali proprietà un oggetto deve possedere per cadere sotto tale concetto. Io chiamo queste proprietà "note caratteristiche del concetto". Ma, beninteso, queste note del concetto non sono le sue proprietà.[1] Il concetto di *quadrato* non è un rettangolo (soltanto gli oggetti che eventualmente cadono sotto di esso, sono rettangoli), come il concetto di *stoffa nera* non è nero né è una stoffa. La definizione non ci rende immediatamente noto se esistano oggetti con le proprietà stabilite. Si voglia, per esempio, definire lo zero, stabilendo che esso è qualcosa che, addizionato all'uno, riproduce il numero uno stesso. Con ciò si è definito un concetto, in quanto si sono stabilite le proprietà che un oggetto deve possedere per cadere sotto di esso. Ma questa non è una proprietà del concetto definito. Sembra che ci si immagini spesso di avere, con l'anzidetta definizione, creato qualcosa che, aggiunto a uno, riproduca il numero uno stesso. Grossa illusione! Né il concetto definito possiede le qualità volute,

[1] [Si rimanda all'articolo *Oggetto e concetto* (pt. 3).]

né la nostra definizione ci garantisce in alcun modo che il concetto sia soddisfatto. Tutto ciò richiede una speciale ricerca. Soltanto se si è dimostrato che esiste un oggetto, e uno solo, con le proprietà richieste, si è in grado di attribuire a quest'oggetto il nome di "zero". Creare lo zero è dunque impossibile. Già ripetute volte spiegai questo fatto; ma, a quanto pare, senza successo.

3. Anche nell'indirizzo oggi dominante di logica non posso sperare che venga compresa la mia distinzione fra note di un concetto e proprietà di un oggetto;[1] pare infatti che tale indirizzo risulti sempre piú contagiato dalla psicologia. Se invece di esaminare le cose stesse, si prendono in considerazione soltanto le loro immagini soggettive, cioè le rappresentazioni, si perdono naturalmente tutte le differenze reali piú sottili e se ne ottengono al loro posto altre, che da un punto di vista logico sono completamente senza valore.

Questa triste constatazione mi induce a parlare di ciò che piú contrasta l'efficacia delle mie idee sui logici moderni, a parlare cioè della rovinosa irruzione della psicologia nella logica.

Per l'elaborazione della logica deve palesemente essere decisivo il modo con cui vengono concepite le sue leggi, e questo a sua volta dipende dal modo con cui viene inteso il termine "vero". Che le leggi logiche debbano costituire le norme del pensiero nella ricerca della verità, viene per certo ammesso anticipatamente da tutti; ciò non impedisce però che lo si dimentichi poi troppo facilmente. È qui fatale il doppio senso della parola "legge". Nel primo, essa enuncia ciò che è; nel secondo, ciò che deve essere. Solo in quest'ultimo senso le leggi logiche possono dirsi leggi del pensiero, in quanto stabiliscono come si debba pensare.

Però anche ogni legge, la quale enuncia ciò che è, può venir interpretata come se ci prescrivesse di pensare in accordo con ciò che è; e costituisce perciò, in questo senso, una legge del pensiero. Questo avviene per le leggi geometriche e fisiche non meno che per quelle logiche. Le leggi logiche meritano, a maggior diritto delle altre, il nome di leggi del pensiero, solo allorché si voglia dire con ciò che esse sono

[1] Nella *Logica* di Benno Erdmann non trovo alcuna traccia di questa essenziale distinzione.

leggi piú generali, le quali prescrivono come si debba pensare ovunque, in generale, si pensi.

Ma la parola "legge del pensiero" induce a ritenere che queste leggi reggano il pensiero allo stesso modo come le leggi della natura reggono il mondo esterno. Se cosí fosse, esse non potrebbero risultare che leggi psicologiche, poiché il pensiero è un processo della psiche. Però, se la logica avesse a che fare con queste leggi psicologiche, essa sarebbe una parte della psicologia: e cosí viene di fatto oggi interpretata. Accettato questo punto di vista, le leggi del pensiero possono venir concepite quali norme, pel fatto che indicano il modo comune, intermedio, di pensare; alla stessa maniera come potrebbe venir indicato in che modo proceda nell'uomo la digestione sana, o in che modo si parli in forma grammaticalmente esatta, o in che modo si vesta modernamente. Allora si può dire soltanto: a queste leggi si conforma, in complesso, il criterio di verità accettato oggi comunemente dagli uomini, per quanto almeno a noi conosciuti; se dunque si vuole restare d'accordo con la media, ci si regoli secondo esse. Ma, come ciò che oggi è moderno potrà forse fra qualche tempo non esserlo piú e forse non lo è oggi stesso fra i cinesi, cosí — secondo un tal modo di vedere — anche le leggi logiche vanno accolte come decisive solo con qualche restrizione. Sí, anche noi potremmo condividere questo punto di vista, se nella logica si trattasse soltanto di ciò che noi stimiamo per vero, non di ciò che è vero. Queste due cose, per l'appunto, confondono i logici della scuola psicologica.

Cosí Benno Erdmann nel primo volume della sua *Logica*[1] identifica la verità con la validità generale, e fonda quest'ultima sulla certezza generale circa l'oggetto di cui si giudica; basando infine una tale certezza sull'accordo generale di coloro che giudicano. Cosí riconduce, in conclusione, la verità di un asserto al fatto che i singoli lo ritengano vero. A lui posso rispondere soltanto questo: l'esser vero è qualcosa di completamente diverso dall'esser ritenuto vero da parte di uno, di molti o di tutti, e non può in alcun modo venir ricondotto a questa opinione di uno o piú. Non vi è alcuna contraddizione, se un fatto è vero mentre tutti lo ritengono falso. Per leggi logiche io non intendo

[1] B. Erdmann, *Logik* (Niemeyer, Halle 1892) pp. 272-75.

le leggi del ritener vero, ma le leggi dell'essere vero. Se è vero che io scrivo questo nella mia camera il 13 luglio 1893, mentre fuori soffia il vento, ciò rimane vero anche se piú tardi tutti gli uomini dovessero ritenerlo falso. Se l'essere vero non dipende dall'essere ritenuto tale da chicchessia, allora anche le leggi dell'essere vero non possono risultare leggi psicologiche, ma sono pietre basilari, poggiate su una roccia eterna, pietre che possono forse venir sommerse ma non scosse dal nostro pensiero, se esso vuole raggiungere la verità. Le leggi logiche non stanno col pensiero nel medesimo rapporto in cui stanno le leggi grammaticali con la lingua; e quindi non rivelano l'essenza del nostro pensiero umano né si mutano con esso.

Del tutto diversa è, naturalmente, l'interpretazione delle leggi logiche sostenuta da Erdmann. Egli infatti mette in dubbio la loro validità eterna e incondizionata, e vuol limitare questa validità al nostro pensiero nel suo stato attuale (pp. 375 sgg.). È chiaro però che l'espressione "nostro pensiero" può significare soltanto il pensiero dell'umanità finora conosciuta. Rimarrebbe quindi aperta la possibilità che vengano scoperti uomini o altri esseri, i quali giudichino in contraddizione con le nostre leggi logiche.[1] Orbene, che dire se si verificasse un fatto simile? Erdmann ne concluderebbe: vediamo in questo esempio che le leggi logiche non valgono universalmente. Verissimo. Se dobbiamo considerarle come leggi psicologiche, la loro forma caratterizzerà il genere di esseri il cui pensiero è regolarmente governato da esse. Io invece concluderei: vi sono dunque esseri che non afferrano immediatamente come noi certe verità, ma sono forse costretti, per convincersene, a fare ricorso alla via piú penosa dell'induzione. Che dire però, se trovassimo proprio degli esseri le cui leggi mentali contraddicono alle nostre, e che perciò anche nell'applicazione sono condotti a risultati

[1] [Qualcuno potrebbe pensare che la teoria di Erdmann qui criticata da Frege, precorra le concezioni piú moderne (Carnap, ecc.) circa la possibilità di molte logiche fra loro diverse. La cosa non sta affatto cosí. Erdmann affermava soltanto che la logica *potrebbe* di principio essere diversa, se fosse diversa la costituzione del nostro pensiero, e con ciò sosteneva implicitamente che essa è costretta a rimanere immutata fin quando rimane immutata la nostra forma psichica. Il precursore effettivo delle logiche moderne è invece, per l'appunto Frege. A lui, infatti, spetta il merito di aver considerato la logica nella sua obiettività strutturale, nella sua realtà di sistema scientifico, indipendente da qualsiasi rapporto con le abitudini del nostro intelletto. Una volta stabilita questa indipendenza, fu poi facile compiere un ulteriore passo; e cioè sostenere: a) che le leggi logiche non costituiscono null'altro fuorché una postulazione; b) che non esiste quindi alcun motivo perché le nostre teorie debbano venire dogmaticamente legate all'una piuttosto che all'altra logica.]

opposti? Il logico della scuola psicologica non potrebbe far altro che riconoscere questo fatto e concluderne: per questi esseri valgono certe leggi, per noi certe altre. Io direi invece: qui ci troviamo di fronte a un nuovo tipo di pazzia. Chi attribuisce alle leggi logiche il compito di prescrivere come si debba pensare (e cioè le interpreta come leggi dell' "esser vero", non come leggi naturali del nostro modo di giudicare il vero) domanderà: quale dei due esseri ha ragione? quale ha accettato un criterio di verità in accordo con le leggi effettive della verità? Il logico della scuola psicologica non può porsi questa domanda, poiché riconoscerebbe con essa l'esistenza di leggi della verità che non sono leggi psicologiche.

Si può falsare di piú il senso della parola "verità" che cercando di includervi un rapporto con quelli che giudicano? Né mi si obietti, per esempio, che la proposizione "io sono affamato" può essere vera per l'uno e falsa per l'altro. Ciò accade soltanto per la proposizione, non per il pensiero. Dato che, nella bocca di un altro, la parola "io" esprime un altro uomo che non sulla mia, anche la proposizione anzidetta, pronunciata da un altro, esprimerà un altro pensiero. Tutte le determinazioni di luogo, tempo, ecc., appartengono al pensiero di cui è in esame la verità; ma l'esser vero è fuori del tempo e dello spazio. Che cosa dice a rigore il principio di identità? Dice forse: "È impossibile che nel 1893 gli uomini ritengano un oggetto diverso da sé stesso", o dice invece "Un oggetto è identico a sé stesso"? La prima legge tratta di uomini e contiene una determinazione di tempo; nella seconda invece non si parla né di uomini né di tempo. Quest'ultima è una legge che riguarda l' "esser vero", quella invece riguarda il "ritener vero". Il loro contenuto è completamente diverso ed esse sono indipendenti l'una dall'altra, sicché nessuna delle due può risultare conseguenza dell'altra. Il denotarle entrambe con lo stesso nome è quindi fonte di molte difficoltà. Queste mescolanze di cose completamente diverse sono la causa delle terribili confusioni che incontriamo nei logici della scuola psicologica.

Il problema, per qual motivo e con qual diritto noi riconosciamo una legge logica, può venir risolto dalla logica solo riconducendo questa legge ad altre leggi logiche. Dove ciò non sia possibile, la logica rimane debitrice di una risposta. Oltrepassando i confini della logica, si potrà

allora dire: noi siamo costretti dalla nostra natura e dalle circostanze esterne a giudicare, e, se giudichiamo, non possiamo rifiutare la legge anzidetta (per esempio il principio di identità); siamo costretti a riconoscerla se non vogliamo sconvolgere il nostro pensiero e rinunciare a qualsiasi giudizio. Io non voglio né combattere né sottoscrivere questa opinione; ma soltanto osservare che qui non ci troviamo di fronte a un ragionamento di logica. Esso non ci spiega perché quella legge sia vera, ma perché noi la riteniamo vera. E inoltre: questa impossibilità in cui noi ci troviamo di rifiutare quella legge, non ci impedisce a rigore di ammettere l'esistenza di esseri che la rifiutino, ma di ammettere che, ciò facendo essi, abbiano ragione; essa ci impedisce di aver anche un solo dubbio se noi o loro abbiano ragione. Questo almeno vale per me. Se altri invece tentano di riconoscere una legge e contemporaneamente dubitare di essa, mi sembra che questo loro sforzo sia analogo al tentativo di uscire dalla propria pelle. Innanzi a esso io non posso far altro che raccomandare vivamente di stare bene in guardia. Se una volta si è riconosciuta una legge dell' "esser vero", si è proprio riconosciuta con ciò una legge la quale prescrive come si debba giudicare, dovunque, in qualsiasi istante, e da chiunque si giudichi.

Concludendo, mi pare che l'origine della divergenza risieda nel diverso modo di concepire il vero. Per me esso è qualcosa di oggettivo e di indipendente da chi giudica; non cosí invece per i logici della scuola psicologica. Ciò che Benno Erdmann chiama "certezza oggettiva", è soltanto un riconoscimento generale da parte di coloro che giudicano, riconoscimento quindi che non è indipendente da essi ma può variare al variare della loro natura mentale.

Possiamo formulare tutto ciò in termini ancora piú generali. Io riconosco un campo dell'oggettivo non reale, mentre i logici della scuola psicologica ritengono che il non reale sia per ciò stesso soggettivo. Eppure non si riesce a vedere, per qual recondito motivo ciò che ha una consistenza indipendente da chi giudica, debba per forza essere reale, e debba risultare in grado di agire immediatamente o mediatamente sul senso. Non si riesce a scoprire un tal nesso fra i due concetti (dell'oggettivo e del reale). Si possono anzi addurre esempi che provano il contrario. Per esempio, non è possibile che si interpreti il numero uno come qualcosa di reale, salvo che si sia seguaci di John Stuart

Mill. E d'altro lato è pure impossibile interpretarlo come qualcosa di soggettivo, attribuendo a ogni uomo il proprio numero uno; in tal caso, infatti, bisognerebbe prima di tutto cercar di stabilire fino a che punto collimano, le une con le altre, le proprietà di questi vari numeri uno. Se un uomo dicesse: "Uno per uno dà uno", e l'altro "Uno per uno dà due", non si potrebbe far altro che prendere atto di questa diversità e concludere: il tuo uno ha questa proprietà, il mio quest'altra. In una discussione, o in un tentativo di spiegare la propria idea a un altro, non si potrebbe dire chi ha ragione; mancherebbe infatti, a tale scopo, l'identità dell'oggetto. Evidentemente tutto ciò è contrario al senso della parola "uno" e al senso della proposizione "Uno per uno dà uno". L' "uno", infatti, si presenta a tutti nello stesso modo, come uguale per tutti; esso può costituire l'oggetto di una ricerca psicologica né piú né meno della Luna. Ammettiamo pure che vi possano essere rappresentazioni dell'uno nelle menti dei vari individui; bisogna però tenerle ben distinte dall'uno, come la rappresentazione della Luna va tenuta distinta dalla Luna stessa.

Poiché i logici della scuola psicologica non riconoscono la possibilità dell'irreale oggettivo, essi interpretano i concetti come rappresentazioni e perciò li assegnano alla psicologia. Ma la vera situazione si fa sentire con troppa evidenza, perché questa teoria possa venir sostenuta agevolmente. Ne sorge quindi una grave oscillazione nell'uso della parola "rappresentazione": ora infatti pare che essa significhi qualcosa di inscindibile dalla vita psichica del singolo, qualcosa che si fonde e si associa con altre rappresentazioni secondo leggi psichiche; e ora invece pare significhi qualcosa che si presenta a tutti nel medesimo modo, qualcosa in cui non è fatta parola dell'individuo che ha la rappresentazione, anzi non è nemmeno presupposta l'esistenza di un tale individuo.

Questi due modi di usare lo stesso termine sono incompatibili fra loro; infatti quelle associazioni e fusioni succedono solo nella mente dell'individuo, e sfociano in qualcosa che è a lui proprio non meno della sua gioia e del suo dolore. Non bisogna dimenticare che le rappresentazioni dei vari individui, per quanto possano essere simili (e del resto non possiamo mai stabilire con esattezza fino a che punto lo siano), non possono però mai identificarsi le une con le altre, ma vanno

sempre tenute distinte fra loro. Ciascuno ha le proprie, che non possono contemporaneamente essere quelle di un altro. Qui naturalmente io intendo il termine "rappresentazione" in senso psicologico.

L'uso oscillante del termine anzidetto produce oscurità e aiuta i logici della scuola psicologica a nascondere i loro punti deboli. Quando finalmente si porrà termine a tutto ciò? Oggi viene ricondotto tutto al campo della psicologia; i limiti fra soggettivo e oggettivo si affievoliscono sempre piú, e gli stessi oggetti reali vengono trattati come pure rappresentazioni. Infatti: Che cosa è il termine *reale* fuorché un predicato? E che cosa sono i predicati se non rappresentazioni? Cosí tutto sbocca nell'idealismo; anzi piú coerentemente, nel solipsismo.

Se ciascuno indicasse col nome "Luna" qualcosa di diverso dagli altri, cioè una sua rappresentazione individuale, sarebbe certo giustificato il metodo psicologico; ma allora sarebbe impossibile qualsiasi discussione sulle proprietà della Luna. Un individuo potrebbe assai bene affermare della sua Luna l'opposto di quello che, con uguale diritto, afferma un altro della propria. Se noi potessimo apprendere soltanto ciò che esiste nel singolo io, allora sarebbe impossibile un confronto delle varie opinioni, sarebbe impossibile intenderci l'un l'altro, perché mancherebbe un terreno comune (non potendo costituire la rappresentazione, intesa in senso psicologico, nulla di simile). Né vi sarebbe alcuna logica, cui potersi appellare come arbitra nel contrasto fra le diverse opinioni.

... Con questa confusione (dell'irreale col soggettivo), Erdmann finisce coll'impegolarsi nella metafisica. Io scorgo un segno sicuro di errore, quando la logica deve ricorrere alla metafisica ed alla psicologia, scienze che hanno a loro volta bisogno dei princípi logici. E infatti: Dove si troverà allora l'ultima base, su cui si appoggia il tutto? O accadrà come per il barone di Münchhausen, che si trasse fuori dalla palude tirandosi per i propri capelli? Io nutro molti dubbi circa questa possibilità, e sospetto che Erdmann rimanga sprofondato nella palude psicologico-metafisica.

Vediamo ora come i logici della scuola psicologica si lascino sfuggire le distinzioni reali piú sottili. Già ricordai che non afferrano la differenza fra note caratteristiche e proprietà. A essa si connette la distinzione, su cui tanto ho insistito, fra oggetto e concetto, e quella fra

concetti di primo e di secondo grado. Naturalmente non riescono a cogliere nemmeno queste ultime: per essi infatti tutto è rappresentazione. Di conseguenza non possono dare una spiegazione giusta di quei giudizi, che sogliono esprimersi con le parole "esiste", "si dà" e simili. Erdmann[1] raggruppa in un tutto unico questa esistenza con la realtà, che si trova pure non chiaramente distinta dall'oggettività. Ma che cosa affermiamo noi a rigore, come reale, dicendo per esempio, che esiste una radice quadrata di quattro? Lo affermiamo del 2 o del — 2? No; qui non è nominato in alcun modo né l'uno né l'altro di questi due numeri. E se volessi dire che 2 è qualcosa di reale, in primo luogo sbaglierei e poi direi qualcosa di completamente diverso da ciò che intendo affermare con la proposizione "esiste una radice quadrata di quattro". Questa è forse la piú grossolana confusione che si possa immaginare. Essa infatti non confonde due concetti del medesimo grado, ma uno di primo con uno di secondo grado.[2] Ciò è caratteristico dell'ottusità della logica psicologica.

Se mai si raggiungerà un punto di vista molto piú aperto, ci si dovrà per forza stupire che proprio un logico di professione abbia potuto compiere un errore di questo genere; ma per poter misurare l'enormità di quest'errore bisogna aver afferrato la distinzione fra concetti di primo e di secondo grado; e la logica psicologica non riesce a condurci a ciò. Quel che piú vi si oppone è che i suoi seguaci, nell'approfondimento psicologico dei problemi, compiono vere meraviglie, le quali però non costituiscono altro che una falsificazione psicologica della logica.

In questo modo è resa impossibile una feconda collaborazione fra logici e matematici. Mentre il matematico definisce oggetti, concetti e rapporti, il seguace della logica psicologica sta a spiare il divenire e il trasformarsi delle rappresentazioni. Ai suoi occhi, in fondo, il definire del matematico non può apparire che una insensatezza perché non rispecchia l'essenza della rappresentazione. Egli guarda entro il suo mondo psicologico, e poi dice al matematico: non trovo nulla di tutto quel che tu definisci. Questi può soltanto rispondergli: nessuna meraviglia, perché tu lo cerchi dove non è.

[1] Erdmann, *op. cit.*, p. 311.

[2] [Si veda nella parte terza l'articolo *Oggetto e concetto*. "Realtà" è un concetto di primo grado; "esistenza" di secondo grado.]

Quanto ho detto può essere sufficiente a illustrare il mio punto di vista mediante il contrasto con quello della logica psicologica. La distanza che mi separa da essa è cosí grande, che non credo vi sia alcuna speranza di poter influire fin da oggi su tale indirizzo colla presente mia opera. Mi fa l'effetto, come se l'albero da me piantato dovesse sollevare un pesantissimo carico di pietre, per procurarsi spazio e luce. Pur tuttavia non perdo la speranza che, col tempo, questo libro possa collaborare al crollo della logica psicologica.

segue parte quinta

I numeri reali

terza sezione dei *Princípi dell'aritmetica* (volume secondo)

[1. Dedicandola allo scopo di introdurre per via puramente aritmetica i numeri reali, Frege dà alla terza sezione della sua opera principale una strutturazione analoga a quella già adottata con tanta efficacia nei *Fondamenti* per l'introduzione dei numeri naturali: ossia premette una parte critica, intesa a scalzare le teorie e i tentativi già compiuti in questo senso da altri autori, in modo da spianare la strada alla susseguente esposizione della propria teoria. Va detto subito che l'analogia è in gran parte limitata appunto all'aspetto esteriore della trattazione: nei *Princípi* non è dato riscontrare l'equilibrio e la stringatezza dell'approfondita critica che precede la parte costruttiva dei *Fondamenti*, come del resto ben piú modesti sono i risultati qui raggiunti anche nella corrispondente parte costruttiva.

È ben noto che il 1872 aveva visto la contemporanea pubblicazione dei quattro lavori fondamentali sulla teoria dei numeri reali: tre di essi (rispettivamente di E. Kossak, G. Cantor, Ch. Méray), si rifacevano sostanzialmente alle idee di Weierstrass e presentavano un numero reale come limite di una successione "normale" di numeri razionali, mentre nel quarto R. Dedekind esponeva la propria originalissima teoria che stabiliva una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali e tutte le "sezioni" operabili nel campo razionale.

Nell'intraprendere la sua critica, Frege stabilisce innanzitutto un criterio secondo il quale i tentativi precedenti vengono classificati non tanto in base ai procedimenti cui si attengono, quanto in base al tipo di aritmetica che presuppongono, e precisamente a seconda che essi si concretino

a) nell'àmbito di un'aritmetica contenutistica, indirizzo al quale Frege stesso appartiene, assieme a Cantor, Dedekind e altri (tale indirizzo considera i segni aritmetici quali pure e semplici denotazioni delle entità cui è rivolta propriamente la ricerca matematica);

b) nell'àmbito di un'aritmetica formalistica, rappresentata per Frege principalmente da Thomae e Heine (gli aderenti a questa concezione dell'aritmetica vedono proprio nel segno numerico l'oggetto ultimo dell'indagine matematica).

È di per sé evidente come l'origine di tali diverse concezioni vada ricercata in una differente soluzione del problema esistenziale in matematica: mentre cioè i contenutisti presupponevano un'esistenza di tipo ontologico per gli enti matematici, gli

aderenti al secondo indirizzo risolvevano il problema di tale esistenza su un piano puramente formale.

Orbene, a parere di Frege, i tentativi messi in atto da vari matematici rappresentanti l'uno o l'altro dei due indirizzi ora ricordati, non avevano raggiunto lo scopo di introdurre i numeri irrazionali per via puramente logica. In particolare, ai matematici *contenutisti* si può rimproverare una scarsa osservanza dei rigorosi dettami che la logica pone ai procedimenti definitori, sia che essi — come Dedekind — annettano alle definizioni una sorta di potenza creatrice, sia invece che — come Cantor — non garantiscano una sufficiente determinazione ad alcuni termini che intervengono nelle definizioni stesse; mentre i tentativi dei matematici *formalisti* sono destinati al fallimento per un'insufficienza di principio, contenuta nei canoni stessi della loro concezione.

Questi, in breve, gli argomenti fondamentali su cui Frege sviluppa la sua estesa critica, nel corso della quale egli si preoccupa altresí di porre in particolare evidenza alcuni risultati che gli suggeriranno la via cui attenersi nella successiva fase di elaborazione costruttiva.

In questa seconda fase Frege, riconosciuta l'impossibilità di ampliare il dominio dei numeri naturali a quello dei numeri reali, interpreta questi ultimi come rapporti di grandezze e riesce a fondarne la teoria in termini — schiettamente logici — di classi e relazioni. Il procedimento seguito da Frege verrà esposto più dettagliatamente in seguito; diciamo subito però che esso presenta un particolare interesse in quanto — come Frege stesso faceva osservare in una sua lettera a Russell del 21 maggio 1903 — permette al nostro autore di giungere in un sol passo dai numeri naturali ai numeri reali, evitando cioè di passare — come invece avveniva necessariamente in tutti i tentativi da lui criticati — attraverso i numeri razionali.

2. Nell'originale freghiano, la terza sezione dei *Princípi* porta il titolo *I numeri reali* ed è suddivisa in vari capitoli ordinati in due parti, come risulta dal seguente indice.

1) *Critiche alle teorie dei numeri irrazionali*

a) Princípi del definire
b) La teoria degli irrazionali di Cantor
c) Le teorie degli irrazionali di Heine e Thomae
d) Il creare nuovi oggetti secondo Dedekind, Hankel, Stolz
e) La teoria di Weierstrass
f) Sguardo retrospettivo e previsioni
g) Grandezze

2) *Teoria delle grandezze*

(Anche questa seconda parte è suddivisa in numerosi capitoli. A differenza della precedente — nella quale non si fa uso di linguaggio ideografico —

in essa prevale la trattazione simbolica, secondo un criterio che verrà illustrato piú avanti)

I criteri che ci hanno guidato nella nostra selezione, tendono a dare al lettore, da un lato, una visione quanto piú completa possibile dell'ampia critica svolta nella prima parte riportandone gli argomenti piú significativi, dall'altro, un'organica presentazione della seconda parte, che permetta di comprendere, almeno nelle sue linee essenziali, il procedimento seguito da Frege. Conformente a ciò, i capitoli della prima parte sono stati inseriti nella seguente misura:

a) integralmente;

b), c): data la natura delle critiche qui svolte abbiamo scelto quei paragrafi che esponessero il pensiero del nostro autore su argomenti di carattere generale. Quando lo abbiamo ritenuto necessario per la comprensione del lettore, abbiamo riassunto brevemente — racchiudendolo fra parentesi quadra — il contenuto dei paragrafi soppressi;

d), e): si è preferito rinunciare a questi capitoli, poiché gli argomenti in essi compresi, salvo appunti particolari ai vari autori, sono praticamente già svolti nell'una o nell'altra delle critiche precedenti;

f) e g) integralmente.

Della parte seconda ci siamo limitati a riportare pochi paragrafi i quali però — come sopra si è detto — riescono a illustrare l'effettivo procedimento freghiano con sufficiente compiutezza. Per i paragrafi soppressi vale l'osservazione fatta a proposito della selezione dalla prima parte.

Per quanto riguarda infine le nostre note esplicative — in numero di quattro, — tre di esse sono state premesse rispettivamente alle pagine comprese sotto a), sotto (b, sotto c), mentre la quarta precede il contenuto di f), g) e 2), cui sarà facile riconoscere un comune carattere di costruttività.]

1.

I princípi del definire

[Prima di iniziare la sua critica Frege espone i princípi del definire, i canoni cioè cui attenersi nel formulare definizioni; essi formano praticamente il perno delle sue confutazioni e ad essi quindi si riferirà costantemente nelle pagine successive.

I princípi in questione sono due:

1) principio della completezza;

2) principio della semplicità dell'espressione spiegata.

L'esposizione qui fattane traduce sostanzialmente al livello del linguaggio comune le analoghe stipulazioni già stabilite per il linguaggio ideografico nel primo volume dell'opera.

Mentre il primo principio intende garantire che un termine linguistico (nome proprio, concetto, relazione) sia previamente delimitato in modo completo e rigoroso perché possa essere introdotto in una scienza mediante una definizione, il secondo esige che tale termine sia *semplice*, nel senso che nessuna delle componenti delle quali esso possa risultare eventualmente composto abbia — se presa singolarmente — un significato autonomo.

Va notata in particolare l'impostazione, estremamente interessante da un punto di vista metodologico, data da Frege al complesso di questa sua critica.]

55. PREMESSA Prima di esaminare ciò che eminenti matematici hanno insegnato intorno ai numeri, in particolare intorno ai numeri irrazionali, sarà opportuno stabilire e motivare alcuni princípi del definire, che vengono lasciati in disparte da quasi tutti gli scrittori di questi argomenti; questo affinché non sia necessario doverci trattenere in modo particolare su di essi in ogni singola occorrenza. Abbiamo già enunciato tali princípi nel primo volume, per quanto riguarda l'ideografia;[1] qui si tratterà essenzialmente delle definizioni espresse in lin-

[1] [Frege si riferisce qui al paragrafo 33 del primo volume. In esso infatti, oltre a esporre brevemente — per il livello ideografico — i princípi che si accinge ora a stabilire per le definizioni espresse in linguaggio comune, egli precisa i criteri fondamentali per la definizione di termini linguistici particolari, quali nomi propri, funzioni di primo grado con uno o piú argomenti e altri. Per maggiori notizie si veda l'introduzione al presente volume.]

guaggio corrente. Fra le due enunciazioni si presenteranno evidentemente solo quelle differenze che sono insite nella natura diversa di questi due mezzi di espressione.

Principio della completezza

56. IL CONCETTO DEVE ESSERE DELIMITATO RIGOROSAMENTE Una definizione di un concetto (cioè di un possibile predicato) deve essere completa, ossia deve determinare univocamente, per ogni oggetto, se esso cade sotto quel concetto (cioè se quel predicato può venire affermato con verità di tale oggetto) oppure no. Non può quindi esservi alcun oggetto per il quale, in base alla definizione, resti dubbio se esso cade sotto il concetto, anche se a noi uomini, per il nostro sapere imperfetto, non sempre può risultare possibile decidere la questione. Metaforicamente questo si può esprimere cosí: il concetto deve venir delimitato rigorosamente. Certamente una similitudine che si può usare solo con cautela, ma che nel nostro caso può rendere buoni servigi, è quella di materializzare i concetti, in base alla loro estensione, con circuiti in un piano. A un concetto delimitato in modo non rigoroso corrisponderebbe un circuito il quale non avrebbe una frontiera dappertutto ben definita, ma che qua e là finirebbe per confondersi completamente con la zona che gli sta intorno. Questo non sarebbe propriamente un circuito; e, analogamente, un concetto non rigorosamente definito, solo a torto viene chiamato concetto. La logica non può riconoscere come concetti tali figurazioni di tipo concettuale; è impossibile stabilire leggi precise a partire da esse. Il principio del terzo escluso esprime appunto, sia pure in forma diversa, l'esigenza che il concetto sia rigorosamente delimitato. Un qualunque oggetto Δ cade sotto un concetto oppure non cade sotto di esso: *tertium non datur*. Potrebbe ad esempio la proposizione "Ogni radice quadrata di 9 è dispari" avere in generale un senso comprensibile se *radice quadrata di* 9 non fosse un concetto rigorosamente delimitato? E cosí, la domanda "Siamo ancora cristiani?" avrebbe propriamente un senso, se non fosse determinato a chi il predicato *cristiano* può essere attribuito con verità e a chi invece esso non deve convenire?

57. Inammissibilità del definire frammentario Da quanto esposto segue l'inammissibilità del definire frammentario[1] tanto caro alla matematica. Esso consiste nel dare la definizione per un caso particolare — per esempio per i numeri interi positivi — facendone subito uso; e nel far poi seguire, dopo parecchi teoremi, una seconda spiegazione per un altro caso — ad esempio, per i numeri interi negativi e per lo zero: in questo procedimento si compie spesso anche l'errore di aggiungere ulteriori determinazioni per il caso già esaurito. Orbene, anche se cosí facendo si evitano di fatto contraddizioni, tuttavia con questo metodo esse non si possono escludere per principio. Per lo piú non si giunge neppure a concludere il procedimento, ma rimangono casi per i quali non si coglie alcuna determinazione; e parecchi sono cosí ingenui da usare anche in questi casi la parola o il segno, come se avessero assegnato loro un significato. Un siffatto definire frammentario deve venir paragonato al procedimento di tracciare per parti la linea di frontiera di una superficie, senza forse far mai riunire le parti fra loro. Ma l'errore fondamentale consiste nell'usare il segno (parola), ancor prima di averlo completamente spiegato, per enunciare teoremi e parecchie volte anche per proseguire ulteriormente la spiegazione del segno stesso. Prima che una parola o un segno siano completamente spiegati o comunque noti in base al loro significato, essi non possono essere impiegati in una scienza rigorosa, ma tantomeno possono venir usati per proseguire la spiegazione di sé stessi.

58. Giustificazione del definire frammentario in base allo sviluppo della scienza A dire il vero, si deve ammettere che lo sviluppo della scienza, che si è concretato nelle conquiste di campi numerici sempre piú ampi, ha avuto bisogno quasi inevitabilmente di un procedimento siffatto: e questa necessità potrebbe servire da scusa.[2] Senza dubbio

[1] [Nel testo, *stückweise*.]

[2] Peano afferma ("Revue de mathématique" vol. 6, pp. 60 sg.): "Il signor Frege desidera per ogni segno una sola definizione. E tale è pure la mia opinione, se si tratta d'un segno non contenente lettere variabili (F_2 § 1, P7). Ma se ciò che si definisce contiene lettere variabili, cioè è una funzione di queste lettere, allora io veggo in generale la necessità di dare di quella espressione delle definizioni condizionate, o definizioni con ipotesi (id., P7'), e di dare tante definizioni quante sono le specie di enti su cui eseguiamo quella operazione. Cosí la formula $a+b$ si definirà una prima volta quando a e b sono intieri, poi una seconda quando sono fratti, poi quando sono irrazionali, o com-

sarebbe stato possibile sostituire le denominazioni e i segni antichi con dei nuovi, e la logica, a rigore, richiede proprio questo; ma difficilmente ci si decide a tale passo. E questa riluttanza a introdurre nuovi segni o nuove parole è la causa di molte oscurità nella matematica. Si sarebbero anche potute abbandonare, considerandole non valide, le antiche spiegazioni e ricominciare la scienza con le nuove, ma non si è giunti neppure a questa frattura netta perché si è creduto di non poter

plessi. Si incontra lo stesso segno + fra numeri infiniti e transfiniti (F_1 VI), ed allora se ne deve dare una nuova definizione. Lo si incontra fra due vettori, e si definirà di nuovo, e cosí via. E col progredire della scienza si estende sempre piú il significato della stessa formula. I vari significati della scrittura $a+b$ hanno proprietà comuni; ma queste sono insufficienti a precisare tutti i valori che può avere quell'espressione.

Lo stesso avviene per la formula $a=b$; in alcuni casi il suo significato si può assumere come idea primitiva, in altri la si definisce, e precisamente in aritmetica data l'eguaglianza degli intieri, si definisce l'eguaglianza fra i razionali, fra gli irrazionali, fra i numeri immaginari, ecc. Si suol definire in geometria l'eguaglianza di due aree, di due volumi, l'eguaglianza di due vettori, ecc. Col progredire della scienza si sente sempre piú la necessità di estendere il significato della formula $a=b$. I vari significati di essa hanno proprietà comuni; ma io non veggo come bastino a precisare tutti i significati possibili dell'eguaglianza.

Del resto le opinioni dei vari autori, sul concetto di eguaglianza, diversificano assai; ed uno studio di questa questione sarebbe assai utile, specialmente se fatto coll'aiuto di simboli, anziché di parole" [In italiano nel testo.]

Qui Peano si richiama a una necessità pratica; ma con ciò non vengono confutate le ragioni contenute nella lettera che gli ho indirizzato. Per quanto difficile, deve pur sempre essere possibile soddisfare le richieste che la logica pone al definire.

Piú definizioni condizionate dello stesso segno si possono eventualmente ritenere lecite soltanto se: dalla loro forma risulta chiaramente che tutte assieme comprendono tutti i casi possibili; per nessuno di questi casi forniscono determinazioni plurivoche; nessuna di queste spiegazioni parziali viene impiegata prima che non siano date tutte (e quindi, in particolare, non può essere impiegata per un'altra spiegazione parziale). Allora tutte queste spiegazioni parziali si potranno riunire in una sola.

In ogni caso — nei limiti del possibile — sarà meglio evitare questa forma del definire.

Per quanto riguarda poi il segno di uguaglianza, faremo bene a rimanere fedeli alla nostra stipulazione, secondo la quale l'uguaglianza è coincidenza completa, identità. Corpi di volume uguale, non sono di certo identici, ma hanno lo stesso volume. In questo caso, quindi, i segni che figurano ai due lati del segno di uguaglianza non possono essere considerati quali segni per i corpi, ma per i loro volumi, o, se si preferisce, per i numeri-misura che si ottengono effettuandone una misurazione usando la stessa unità di volume. Non parleremo di vettori uguali, ma di una certa determinazione per questi vettori — chiamiamola "lunghezza orientata" — che può risultare uguale in vettori distinti. Con tale concezione, il progresso della scienza non richiederà un'estensione del significato della formula "$a = b$"; soltanto, vengono sottoposte alla trattazione nuove determinazioni (modi) negli oggetti.

Nell'ultima proposizione, Peano afferma, come niente fosse, qualcosa di molto grave. Se le opinioni dei matematici sull'uguaglianza differiscono fra loro, questo significa niente meno che i matematici non sono della stessa opinione sul contenuto della loro scienza; e se l'essenza della scienza si vede nei pensieri, non nelle parole o nei segni, ciò significa che non esiste una scienza matematica unitaria e che i matematici, in verità, non si comprendono fra loro. Infatti, il senso di quasi tutte le proposizioni aritmetiche e di molte proposizioni geometriche dipende — immediatamente o mediatamente — dal senso della parola "uguale".

fare a meno delle antiche definizioni per gli inizi della scienza. A questo possono aver concorso anche esigenze didattiche. Cosí ci si è quindi abituati al definire frammentario; e ciò che originariamente era uno scabroso strumento imposto dalla necessità, è diventato usuale ed è stato assunto fra i metodi legittimi della scienza, sicché oggi solo qualche isolato si scandalizza se un segno viene in un primo tempo spiegato in relazione a un dominio limitato e quindi usato per spiegare sé stesso relativamente a un dominio piú esteso; la consuetudine comune, infatti, ha una forza legittimante, proprio come la moda dei piú sgradevoli addobbi può esprimere il canone della bellezza. Tanto piú va ribadito che la logica non può riconoscere come concetti delle figurazioni, simili a concetti, che sono ancora fluide e non hanno ancora ricevuto una delimitazione rigorosa e definitiva; e per questo motivo essa deve rifiutare tutto il definire frammentario. Infatti, se la prima definizione è già completa e ha tracciato confini rigorosi, allora la seconda definizione o ricalca gli stessi confini, e in tal caso va rifiutata perché il suo contenuto dovrebbe venir dimostrato come teorema, oppure traccia confini diversi dai precedenti e quindi contraddice la prima. Per esempio, si può definire la sezione conica come intersezione di un piano con una superficie conica di rotazione. Una volta fatto questo, non se ne può dare una seconda definizione, per esempio come curva la cui equazione in coordinate cartesiane è di secondo grado; perché questo, ora, deve venir dimostrato. Neppure si può definire la sezione conica come quella figura piana la cui equazione in coordinate di retta è di secondo grado; infatti, in tale definizione, sarebbe contenuta anche la coppia di punti, che non può venir concepita come intersezione di un piano con una superficie conica. In tal caso, quindi, la delimitazione del concetto non è la stessa e sarebbe un errore usare qui la stessa denominazione "sezione conica". Se pertanto la seconda definizione non è invalidata dalla prima in alcuno di questi due modi, allora essa è resa possibile soltanto dall'incompletezza della prima, che ha lasciato il concetto senza precisi limiti, epperciò in uno stato nel quale esso non può affatto venire usato, in particolare neppure per le definizioni.

59. Insostenibilità della definizione dell'uguaglianza di segni numerici data da Heine Non sarà inutile dare un esempio concreto

a bilanciare l'astrattezza di queste riflessioni. E. Heine stabilisce la seguente definizione:[1]

"Segni numerici si dicono uguali o permutabili se appartengono a successioni numeriche uguali; si dicono diversi o non permutabili se appartengono a successioni numeriche non uguali (§ 1, def. 3)."

Che cosa si direbbe della seguente definizione:

"Dei segni si dicono bianchi se appartengono a oggetti bianchi"? Come segno del foglio di carta bianco che ho qui davanti, posso prendere però una macchia nera circolare, ammesso che io non abbia già impiegato altrimenti questo segno. E un tale macchia sarebbe bianca per definizione. Contro un siffatto procedimento c'è da obiettare: la definizione presuppone noto il significato della parola "bianco" a causa dell'espressione "se essi appartengono a oggetti bianchi"; infatti, se cosí non fosse, non sarebbe per niente determinato quali segni appartengono a oggetti bianchi. Orbene, se la parola "bianco" è nota, non la si può volere spiegare di nuovo. Si dovrebbe peraltro considerare di per sé comprensibile il fatto che non si può spiegare una parola con sé stessa, perché in tal caso la si tratterebbe in uno stesso tempo come nota e come ignota. Se essa è nota, una spiegazione è per lo meno superflua; se essa invece non è nota non può servire alla spiegazione. Tutto ciò è ben evidente, eppure si pecca cosí spesso contro questo principio! Nella definizione di Heine abbiamo proprio questo caso. Con le parole "se essi appartengono a successioni numeriche uguali" viene presupposto come noto il significato della parola "uguale", che è proprio quella che deve venir spiegata.

60. CONFUTAZIONE DELLA PROBABILE DIFESA DI HEINE Alle mie osservazioni probabilmente Heine opporrebbe che il significato della parola "uguale" non viene presupposto noto per tutti i casi, ma, nella sua definizione 3 del paragrafo 1, è dato solo per successioni numeriche non racchiuse fra parentesi, mentre qui egli parla delle successioni numeriche racchiuse fra parentesi e di altri segni. Oltre alle ragioni già addotte, contro questa risposta va detto che una doppia spiega-

[1] E. HEINE, *Die Elemente der Funktionenlehre* [Gli elementi della teoria delle funzioni], nel "Journal de Crelle", vol. 74, § 2, def. 2. Il fatto che qui mi limito a sollevare una obiezione contro questa definizione, non autorizza a concludere che considero non obiettabile la parte rimanente di questo lavoro.

zione di un segno o di una parola è dannosa, perché allora permane il dubbio se queste definizioni non si contraddicano tra loro. Per lo meno si dovrebbe richiedere una dimostrazione di non contraddittorietà; ma a questo impegno ci si sottrae regolarmente, e infatti anche nel lavoro di Heine non è dato trovar traccia di una tale dimostrazione. In generale, un modo di definire in base al quale la legittimità di una definizione dipende da una dimostrazione da condursi in precedenza, va rifiutato; con esso infatti diventa oltremodo difficile controllare la rigorosità del procedimento dimostrativo, perché in tal caso, prima di enunciare una definizione, è necessario indagare se non ci siano da dimostrare certe proposizioni; indagine questa che peraltro quasi sempre si tralascia. Tale lacuna per l'appunto non viene quasi mai avvertita ed è quindi particolarmente pericolosa per il rigore. In aritmetica, infatti, non è sicuramente sufficiente enunciare una qualsiasi asserzione senza dimostrarla, o dandone una dimostrazione apparente, e aspettare quindi se a qualcuno riesca di dimostrarne la falsità, ma al contrario si deve richiedere che ogni asserzione, che non sia del tutto ovvia, venga effettivamente dimostrata, e per questo occorre che i segni o le espressioni che in essa si impiegano, quando non possono essere considerati universalmente noti, siano introdotti in modo ineccepibile.

E, oltre a questo, è cosí facile evitare molteplici spiegazioni per uno stesso segno! Invece di spiegarlo dapprima relativamente a un dominio limitato e usarlo poi per spiegare sé stesso in un dominio piú ampio, invece quindi di usare due volte lo stesso segno, si deve aver cura soltanto di scegliere segni diversi, circoscrivendo definitivamente il significato del primo al dominio piú limitato, in modo che anche la prima definizione sia completa e tracci confini rigorosi. Allora la relazione logica fra i significati dei due segni non è in alcun modo pregiudicata, e si può indagare su di essa senza che, attraverso il risultato di tale indagine, possa venir messa in dubbio la legittimità delle definizioni.

Però vale veramente la pena di inventare un nuovo segno, se con ciò possono venire eliminati importanti dubbi logici e può venir assicurato il rigore della dimostrazione. Ma il senso della purezza logica e dell'esattezza sembra essere cosí deficiente in certi matematici, che essi preferiscono usare una parola in tre o quattro significati, piuttosto che prendere l'impegnativa decisione di inventarne una nuova.

61. SENZA DEFINIZIONI RIGOROSE NON SI OTTENGONO TEOREMI CONCLUSIVI Col definire frammentario, anche la consistenza stessa dei teoremi diviene incerta. Se per esempio le parole "radice quadrata di 9" sono state spiegate limitandosi al dominio dei numeri interi positivi, si dimostra allora il teorema che esiste un'unica radice quadrata di 9: questo teorema tuttavia viene immediatamente invalidato, non appena si estenda la considerazione ai numeri negativi e si completi conformemente la definizione. Ma chi può sapere se a questo punto si è giunti a una proposizione definitiva? Chi può sapere se non ci si vedrà ancora costretti a riconoscere quattro radici quadrate di 9? In base a che cosa si può sapere propriamente che non esistono piú di due radici quadrate di —1? Fin tanto che non si possieda una definizione definitiva e completa, ciò è impossibile. Ma in tal caso, si obietterà senza dubbio, potrebbero non risultar piú valide alcune proposizioni. La stessa ragione potrebbe venir ripetuta contro la liceità di una seconda radice quadrata di 9. A questo modo in nessun argomento ci si muove su un terreno completamente sicuro. Senza definizioni conclusive non si hanno neppure teoremi conclusivi. Non si sfugge all'imperfezione e all'indecisione.

62. ARGOMENTI ANALOGHI VALGONO PER LE RELAZIONI. LE RELAZIONI DI UGUAGLIANZA E DI MAGGIORANZA Per le relazioni la situazione è del tutto analoga a quella che vale per i concetti: esse possono essere riconosciute dalla logica solo se, preso un qualunque oggetto come primo e un qualunque oggetto come secondo, risulta determinato se il primo sta o non sta in quella relazione col secondo. Anche qui abbiamo il *tertium non datur*: il caso dell'indecidibilità è escluso. Se questa esigenza non fosse soddisfatta per una relazione, allora anche i concetti, che possiamo ricavare da essa mediante saturazione parziale (vol. I, § 30),[1] non sarebbero tutti delimitati rigorosamente; quindi essi, considerati esattamente, non sarebbero affatto concetti, ma concetti

[1] [Data una funzione $f(x, y)$ di primo grado a due argomenti (di cui le relazioni sono solo un caso particolare), sostituendo in essa uno degli argomenti, ad esempio y, con un oggetto qualunque, che indichiamo con b, si ottiene una funzione di primo grado a un solo argomento (di cui i concetti sono casi particolari) $f(x, b)$. Tale procedimento di sostituzione è appunto detto da Frege "saturazione parziale" di una funzione e può ovviamente applicarsi soltanto a funzioni a piú argomenti.]

apparenti non leciti. Se per esempio non è definita in modo completo la relazione dell'esser maggiore, allora non si è neppure sicuri se una figurazione di tipo concettuale da essa ottenuta mediante saturazione parziale, quale *maggiore di zero* o *positivo*, sia un autentico concetto. Per poterlo stabilire si dovrebbe determinare, ad esempio, se la Luna è maggiore di zero. Ora, si può convenire che nella nostra relazione possano stare solo numeri, e concludere da ciò che la Luna, dal momento che non è un numero, non è neppure maggiore di zero. A tal fine però occorre anche la spiegazione completa della parola "numero" e questa per lo piú difetta.

Proprio per la relazione dell'esser maggiore, il definire frammentario, e quindi incompleto, appartiene, per cosí dire, alla moda della matematica. In un primo momento si spiega l'espressione "maggiore di" relativamente ai numeri interi positivi, cioè in modo incompleto. Successivamente la relazione apparente cosí ottenuta, che non può affatto venir usata, viene tuttavia utilizzata per completare la prima definizione, col che, a dire il vero, non sempre si può riconoscere quando la relazione dell'esser maggiore vada ritenuta definitiva. Del tutto simile è il caso della relazione di uguaglianza; anche qui il definire frammentario appartiene alla moda.[1] Nondimeno dobbiamo riaffermare la nostra posizione: senza definizioni complete e definitive non si ha un terreno stabile come base, non si è sicuri della validità dei nostri teoremi, non si possono applicare a ragion veduta le leggi logiche, le quali hanno appunto come presupposto la rigorosa delimitazione dei concetti e quindi anche delle relazioni.

63. Condizioni per le funzioni di primo grado a un argomento

Da quanto abbiamo detto fin qui si trae facilmente una conseguenza riguardo a quelle funzioni che non sono né concetti né relazioni.[2] Come

[1] Nella prassi delle loro dimostrazioni, invero, tutti i matematici trattano l'uguaglianza quale identità, sebbene la maggior parte di essi non voglia riconoscerlo in sede teorica. Ma, ad esempio, nessuno vorrà dire che l'equazione "$4x - 3 = 3$" ha le radici 6/4 e 3/2, adducendo il motivo che, anche se 6/4 è senz'altro uguale a 3/2, purtuttavia 6/4 non coincide con 3/2. Ebbene, se questi due numeri non coincidono, allora essi sono diversi, e la nostra equazione ha almeno due radici distinte. È singolare osservare il contrasto stridente che esiste fra le teorie che molti matematici professano e la prassi dagli stessi tacitamente seguita. Orbene, se l'uguaglianza in matematica è identità, il darne mol teplici definizioni è un procedimento del tutto insensato.

[2] [Ricordiamo che Frege considera i concetti come funzioni di primo grado a un argomento,

esempio prendiamo l'espressione "la metà di qualcosa" che si presenta come nome di una funzione siffatta. La parola "qualcosa" occupa in essa il posto spettante al nome dell'argomento, corrispondendo manifestamente alla lettera "ξ" in "$\frac{1}{2}\xi$". Una tale espressione può diventare parte del nome di un concetto, per esempio "qualcosa la cui metà è minore di uno".

Orbene, se questo nome deve realmente significare un concetto rigorosamente determinato, allora deve risultare determinato, ad esempio anche per la Luna, se la sua metà è minore di uno. Ma affinché questo abbia luogo, l'espressione "la metà della Luna" deve avere un significato; il che vuol dire: deve esistere uno e un solo oggetto che viene denotato da tale espressione. Ma in base all'uso comune della lingua questo non succede, perché nessuno sa quale metà della Luna si intenda. Qui dunque bisogna stabilire una convenzione piú precisa, in modo che per ogni oggetto venga determinato quale oggetto è la sua metà; in caso contrario non si può usare l'espressione "la metà di x" con l'articolo determinativo. Dunque una funzione di primo grado a un argomento deve sempre essere costituita in modo tale che ne scaturisca un oggetto come suo valore: oggetto che possa anche essere assunto come suo argomento — per mezzo del quale cioè si possa anche saturare la funzione.[1]

64. Condizioni corrispondenti per le funzioni di primo grado a due argomenti Dobbiamo esigere qualcosa di corrispondente anche dalle funzioni a due argomenti. L'espressione

"La somma di un primo e di un secondo oggetto"

si presenta come nome di una funzione di questo tipo. Anche in questo caso quindi per ogni primo e per ogni secondo oggetto deve risultare determinato quale oggetto sia la loro somma, oggetto che deve sempre esistere. Se questo non succede, allora non è neppure determinato

le quali assumono come valori sempre e solo valori di verità (Vero o Falso); analogamente per le relazioni, considerate come funzioni di primo grado a due argomenti, le quali assumono come valori solo e sempre valori di verità. Di conseguenza, perché una funzione del genere qui menzionato non sia un concetto, rispettivamente una relazione, è necessario e sufficiente che fra i suoi valori figuri almeno un oggetto che non sia il Vero o il Falso; ad esempio un numero.]

[1] Si confronti quanto abbiamo detto sulle funzioni nel primo volume, e si veda anche lo scritto dell'autore *Funzione e concetto* (Pohle, Jena 1891).

quale oggetto addizionato a sé stesso dia uno. In tal caso le parole "qualcosa che addizionato a sé stesso dà uno", non significano un concetto rigorosamente delimitato e quindi, in generale, niente di logicamente utilizzabile. E non si potrà rispondere alla domanda tendente a stabilire quanti oggetti esistano che addizionati a sé stessi dànno uno.

Ma non si può convenire che l'espressione "la somma di un primo e un secondo oggetto" debba avere un significato solo allora che i due oggetti sono numeri? In questo caso, si penserà certamente, l'espressione *qualcosa, che addizionato a sé stesso dà uno* sarebbe un concetto rigorosamente delimitato; ora infatti si saprebbe che sotto di esso non cade alcun oggetto che non sia un numero. La Luna, per esempio, non cadrebbe sotto di esso, perché la somma della Luna e della Luna non è uno. Questo è falso; infatti la proposizione "La somma della Luna e della Luna è uno" non è né vera né falsa; e infatti, sia nel caso di verità sia in quello di falsità, le parole "la somma della Luna e della Luna" dovrebbero significare qualcosa, il che viene espressamente negato dalla convenzione proposta. La nostra proposizione sarebbe paragonabile, all'incirca, alla proposizione "Scilla aveva sei fauci di drago". Anche questa proposizione non è né vera né falsa, ma è poesia, perché il nome proprio "Scilla" non denota nulla.[1] Proposizioni di questo tipo possono essere in effetti oggetto di una considerazione scientifica, per esempio mitologica, ma in esse non può venir condotta alcuna ricerca scientifica. Se la nostra proposizione "La somma della Luna e della Luna non è uno" avesse un carattere scientifico, allora essa affermerebbe che il significato delle parole "la somma della Luna e della Luna" non coincide col significato della parola "uno"; mentre con la convenzione proposta quel primo significato non esisterebbe, e, non esistendo, non si potrebbe affermare di esso con verità né che coincide né che non coincide col significato della parola "uno". In definitiva, alla domanda se la somma della Luna e della Luna sia uno, ossia se la Luna cada sotto il concetto *qualcosa che addizionato a sé stesso dà uno*, non si potrebbe rispondere. In altre parole: ciò che noi abbiamo chiamato concetto non sarebbe affatto un autentico concetto perché difetterebbe di una rigorosa delimitazione.

[1] [Si veda l'articolo *Senso e significato* nella parte terza del presente volume.]

Ma una volta introdotta l'espressione "*a* addizionato a *b* dà *c*", non si può piú evitare di formare un nome di concetto come "qualcosa che addizionato a sé stesso dà uno". Se poi si volesse — stabilendo un sistema di leggi — tentare realmente di evitare con sicurezza la formazione di tali nomi di concetto che non sono leciti, anche se linguisticamente possibili, ebbene, si rinuncerebbe ben presto a questa impresa come oltremodo difficile e probabilmente impossibile. L'unica strada possibile è quella di spiegare le parole "somma" "addizionare" e altre — ammesso che si voglia in generale usarle — in modo che i nomi di concetto formati con esse e linguisticamente ineccepibili, significhino concetti rigorosamente delimitati e siano quindi leciti.

Invero anche l'esigenza da noi qui stabilita — che ogni funzione di primo grado a due argomenti abbia come valore un oggetto per ogni oggetto come primo e per ogni oggetto come secondo argomento — è la conseguenza del fatto che i concetti debbono essere rigorosamente delimitati, cioè che non possono venir accettate espressioni costruite in modo da suscitare l'impressione di significare un concetto, mentre in effetti si limitano ad adombrarlo, cosí come non sono leciti nomi propri che non denotano in realtà alcun oggetto.

65. Lo stesso vale per i segni aritmetici che sono nomi di funzioni

Quanto abbiamo detto delle espressioni verbali vale anche per i segni aritmetici. Se il segno di addizione è spiegato completamente, nell'espressione

$$“\xi+\xi=\zeta”$$

abbiamo il nome di una relazione, quella del singolo al doppio. Se le cose stanno cosí, non si potrà dire se l'equazione

$$“x+x=1”$$

ha una soluzione unica o piú soluzioni. Ora, qualcuno risponderà: escludo, in generale, che venga preso in considerazione qualcosa che non sia un numero. Abbiamo trattato piú sopra una simile obiezione; qui la cosa può essere ancora considerata sotto altri aspetti. Chi vuol escludere dalla considerazione tutti gli oggetti che non siano numeri, dovrà dire dapprima cosa intende per "numero", e, fatto questo, non

gli sarà piú lecito alcun ampliamento. Una tale limitazione dovrebbe essere compresa nella spiegazione, cosicché questa assumerebbe una forma del tipo: "Se a e b sono numeri, allora $a+b$ significa... ecc." Avremmo una spiegazione condizionata.[1] Ma il segno di addizione risulta spiegato solo se è spiegato il significato di ogni possibile collegamento di segni della forma "$a+b$", qualunque sia il nome proprio fornito di significato sostituito ad "a" e "b". Se però si spiegano tali collegamenti di segni limitatamente al caso che per "a" e per "b" vengano presi segni di numeri reali interi, allora si sono spiegati propriamente solo tali collegamenti, ma non il segno di addizione e si è cosí contravvenuto al secondo principio del definire, non ancora trattato. Purtuttavia ci si fa involontariamente l'idea che il significato del segno di addizione sia noto e lo si tratta in conseguenza anche in quei casi per i quali non si è data alcuna spiegazione.

Appena si tenda alla generalità delle proposizioni, si dovranno usare, nelle formule aritmetiche, oltre ai segni di oggetti determinati, — oltre cioè ai nomi propri, ad esempio "2" —, anche lettere, che indicano soltanto, senza denotare; da esse si viene già condotti senza accorgersene fuori del dominio nel quale si sono spiegati i nostri segni. Si può cercare di ovviare ai pericoli che ne scaturiscono, facendo sí che queste lettere non indichino oggetti in generale — come abbiamo fatto noi — ma soltanto oggetti di un dominio ben circoscritto. Supponiamo dapprima che il concetto *numero* sia definito rigorosamente e si sia stabilito che le lettere latine debbano indicare solo numeri e che il segno di addizione sia spiegato solo per i numeri. Allora, nella proposizione

$$\text{"}a+b=b+a\text{"}$$

dobbiamo sottintendere le condizioni che a e b siano numeri; e tali condizioni vengono facilmente dimenticate perché non espresse.[2] Ma proponiamoci una buona volta di non dimenticare queste condizioni! In base a una nota legge di logica potremo trasformare la proposizione

[1] Si confronti la lettera dell'autore a G. Peano, Rivista di Matematica, vol. 6, pp. 53 sgg.

[2] Ad esempio, quando si amplia il campo numerico, si pensa proprio sempre al fatto che con tale ampliamento quelle condizioni assumono un senso diverso, che tutte le proposizioni generali dimostrate fino a quel momento acquistano un altro contenuto di pensiero e che perfino le dimostrazioni cessano di esser valide?

"Se a è un numero e se b è un numero, allora $a+b=b+a$",
in quest'altra:

"Se $a+b$ non è uguale a $b+a$, e se a è un numero, allora b non è un numero";

e qui è impossibile mantenere la limitazione al dominio dei numeri. La situazione stessa ci costringe, in modo irresistibile, a rompere l'anzidetta limitazione. Ma allora la nostra proposizione condizionale

"Se $a+b$ non è uguale a $b+a$"

non ha alcun senso, data la spiegazione incompleta del segno di addizione.

Anche qui vediamo di nuovo che le leggi della logica presuppongono concetti rigorosamente delimitati e con essi anche spiegazioni complete dei nomi di funzione, per esempio del segno piú.[1] Nel primo volume abbiamo espresso queste esigenze affermando che ogni nome di funzione deve avere un significato. Di conseguenza sono da rigettare tutte le definizioni condizionate e tutto il definire frammentario. Ogni segno deve essere spiegato completamente in un solo colpo, cosicché, come noi diciamo, esso riceva un significato.

Tutto ciò è intimamente connesso e può essere riguardato come conseguenza del principio di completezza delle definizioni.

Principio della semplicità dell'espressione spiegata

66. ILLUSTRAZIONE E FONDAZIONE DI QUESTO PRINCIPIO Che il significato di un'espressione e quello di una sua parte non valgano sempre a determinare il significato della parte rimanente, è evidente. Non si può quindi spiegare un segno o una parola limitandosi a spiegare un'espressione nella quale esso o essa ricorrono, e in cui le parti rimanenti sono conosciute. Dapprima sarebbe infatti necessaria un'indagine per stabilire se è possibile la soluzione rispetto all'incognita — mi servo di una figurazione algebrica ben comprensibile — e se l'incognita viene determinata univocamente. Ma, come abbiamo già detto, non si può accettare di far dipendere l'esattezza di una definizione dal risultato di una tale indagine che, oltretutto, forse non si può affatto

[1] È chiaro che certe funzioni non possono venir definite, per la loro semplicità logica; ma anche queste debbono avere valori per tutti gli argomenti.

eseguire. La definizione deve piuttosto avere il carattere di un'equazione risolta rispetto all'incognita, a secondo membro della quale non figuri piú niente di incognito.

Ancor meno è lecito spiegare due segni con un'unica definizione: ogni definizione deve contenere un solo segno il cui significato venga stabilito attraverso essa. Infatti, analogamente, non si possono determinare due incognite con una sola equazione.

Accade anche che si costruisca tutto un sistema di definizioni, ognuna delle quali contiene parecchie parole che vanno spiegate, cosicché ognuna di queste parole ricorre in parecchie di queste definizioni. Questo è paragonabile a un sistema di equazioni con piú incognite, per il quale, di nuovo, sono del tutto problematiche la risolvibilità e l'unicità della determinazione.

Ogni segno, ogni parola, può senza dubbio venir considerato come costituito da parti; ma noi diciamo che quel segno o quella parola non è semplice soltanto se, in base alle regole generali della grammatica o dell'attribuzione dei segni, dai significati delle parti segue il significato della totalità, e se queste parti ricorrono anche in altri collegamenti e vengono ivi trattate come segni indipendenti, con significato proprio. In questo senso quindi si può dire: l'espressione spiegata — il segno spiegato — deve essere semplice. Altrimenti potrebbe accadere che le parti venissero spiegate anche singolarmente e che queste spiegazioni contraddicessero quella della totalità.

A dire il vero, nomi di funzione non possono figurare da soli in un membro dell'uguaglianza definitoria, a causa della loro peculiare non saturazione; ma i loro posti di argomento debbono sempre venire in qualche modo occupati. Come abbiamo visto, ciò vien fatto nell'ideografia, per mezzo delle lettere latine, che allora debbono ricorrere anche nell'altro membro. Nella lingua non simbolica intervengono a tale scopo pronomi e particelle che indicano qualcosa di indeterminato ("qualcosa", "che cosa", "vi"). Con ciò non si viola il nostro principio, perché queste lettere, pronomi, particelle, non significano niente, ma indicano soltanto.

67. Infrazioni contro entrambi i princípi del definire Spesso si contravviene contemporaneamente a entrambi i nostri princípi del

definire, per esempio quando si spiega il segno di uguaglianza assieme al contenuto dei due membri che stanno a sinistra e a destra di esso. In questi casi, il segno di uguaglianza è già stato spiegato in precedenza, ma in modo incompleto. Si origina cosí una singolare oscurità, poiché si tratta il segno di uguaglianza in modo oscillante, ora come noto, ora di nuovo come incognito. Da una parte sembra che si ricordi quella definizione precedente e che si debba trarre qualcosa da essa per la determinazione del contenuto dei due membri. D'altra parte tuttavia quella spiegazione precedente non risulta sufficiente per il caso presente. Qualcosa di analogo succede per altri segni. Parecchi matematici sfruttano questa oscurità nel condurre i loro giochi di prestigio logici. Agli scopi che cosí debbono essere raggiunti ci conduce in modo non obiettabile la nostra sostituzione della generalità di un'uguaglianza in un'uguaglianza di decorso di valori, in base al principio V.

Senza pretendere di aver dato qui una prospettiva esauriente su ciò che bisogna tener presente nel definire, mi accontento di aver presentato questi due princípi, riguardo ai quali i matematici cadono per lo piú in difetto.

2.

Critica alla teoria degli irrazionali di Georg Cantor

[La critica di Frege alla teoria cantoriana degli irrazionali consta di due momenti successivi, corrispondenti alle due opposte interpretazioni che il modo di esprimersi di Cantor — a parere del nostro autore piuttosto oscuro — permette di trarre riguardo al suo pensiero fondamentale..

Secondo Frege infatti, si può sostenere con pari diritto: da una parte, che Cantor aderisca a una concezione formalistica dell'aritmetica, dall'altra, al contrario, che egli sia assertore dell'indirizzo contenutistico. Diciamo però subito che Frege propende per la seconda interpretazione, pur se conduce la sua critica in entrambe le direzioni ora accennate.

La prima interpretazione del pensiero cantoriano ha in realtà lo scopo precipuo di permettere a Frege i primi accenni di quella che sarà la vasta polemica con i formalisti, intrapresa e sviluppata a fondo nelle pagine che costituiscono il terzo capitolo di questa quinta parte. Frege tuttavia tende a difendere Cantor dall'accusa di autentico formalismo che altri matematici — ad esempio Illigens — avevano troppo affrettatamente lanciato nei suoi riguardi.

Nel secondo caso invece — ossia nella piú probabile ipotesi che Cantor si muova su un piano contenutistico — la critica di Frege assume toni e argomenti di cui si era già servita nella recensione del 1892 (parte terza del nostro volume). Essa è diretta contro i procedimenti definitori di Cantor: in particolare, in questo contesto, le definizioni cantoriane non ci portano oltre il campo razionale, non ci permettono cioè di cogliere i numeri irrazionali, in quanto non specificano la natura della relazione che — secondo Cantor — dovrebbe appunto rendere possibile il passaggio da una particolare successione di numeri razionali al numero irrazionale da essa determinato.

Da un altro punto di vista, Frege ritiene di poter ravvisare nel procedimento cantoriano una profonda connessione con la geometria, la quale, lungi dallo svolgere una funzione "esplicativa" interverrebbe in modo essenziale nell'elaborazione di Cantor; di conseguenza, Frege conclude che il tentativo cantoriano non risulta condotto su un piano puramente aritmetico (logico) contro le intenzioni stesse del suo autore.

Il tono di Frege si mantiene sufficientemente equilibrato e la sua critica risulta nel complesso serena, anche se molto prolissa. Particolarmente notevoli, per la loro portata generale, i paragrafi 73 e 83.]

68. CANTOR FA CORRISPONDERE A OGNUNA DELLE SUE SUCCESSIONI FONDAMENTALI UN NUMERO *b*. DUBBIO SUL SENSO DI QUESTA CORRISPONDENZA. IPOTESI CHE IL NUMERO *b* SIA UN SEGNO E DEBBA DENOTARE LA SUCCESSIONE FONDAMENTALE Georg Cantor comincia col definire [1] la sua successione fondamentale:

"Chiamo una successione fondamentale ogni insieme [2] (a_ν), tale da poter essere caratterizzato dalla condizione $\lim_{\nu=\infty}(a_{\nu+\mu}-a_\nu)=0$ (per ν arbitrario), e gli associo un numero b da definirsi per mezzo di tale successione."

È un grosso inconveniente che la parola "numero" venga usata dai matematici in modo oscillante: ora essi chiamano numero il segno numerico, ora invece il suo significato. Ogni scrittore di matematica che usa la parola "numero", dovrebbe propriamente dichiarare a quale delle due interpretazioni egli intenda riferirsi.[3] Cosí siamo anche qui in dubbio circa il senso della proposizione cantoriana. Se la parola "numero" è intesa nel significato di "segno numerico", la proposizione andrà interpretata nel modo seguente: attribuisco a ogni successione fondamentale un certo segno "*b*", cosicché la successione viene denotata per mezzo di questo segno. Allora a successioni fondamentali diverse si dovrebbero attribuire segni pure diversi. Ma due successioni fondamentali sono sempre diverse allorché esiste anche un solo numero che appartiene a una di esse e non all'altra. In realtà quest'attribuzione di un segno è del tutto indifferente; infatti, per poter dire: attribuisco a una successione fondamentale il segno "*b*", debbo già aver denotato in qualche modo tale successione. E di fatto non fa nessuna differenza se volendo parlare di essa io impiego il segno "*b*" o la denotazione originaria, ma tutt'al piú la nuova denotazione può essere piú conveniente per la sua maggior semplicità.

[1] G. CANTOR, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* [Sulle varietà lineari infinite di punti], Math. Ann., vol. 21, 567.

[2] Insieme di numeri razionali.

[3] Noi ci siamo decisi per la seconda.

70. OBIEZIONE DI ILLIGENS CONTRO LA TEORIA CANTORIANA Nel suo articolo *Sulla teoria dei numeri irrazionali di Weierstrass-Cantor,*[1] Illigens interpreta nel modo seguente la teoria di Cantor: col numero *b* si intende un segno per indicare il fatto che la successione viene data mediante una qualche legge. In base a ciò, può a tutta prima sembrare che il numero *b* debba rappresentare una proposizione;[2] ma l'espressione "segno numerico", usata piú volte nel seguito, chiarisce che Illigens ha inteso la teoria cantoriana proprio nello stesso senso da noi or ora tentato. Contro di essa egli obietta che un siffatto segno di successione numerica non denota affatto una quantità, come la denotano i numeri razionali, e che le parole "maggiore" e "minore" hanno qui un senso completamente diverso di quello che esse hanno per i numeri razionali, dal che segue che la stessa cosa vale anche per la parola "limite". Altra obiezione è che *b* non può diventare un segno di quantità mediante il puro e semplice uso della parola "maggiore" e che i numeri razionali appartengono certo ai nuovi numeri per il fatto che vengono usati come segni di successioni numeriche, ma non in quanto essi denotano una grandezza. Non si raggiunge quindi lo scopo di far apparire i numeri razionali come un tipo particolare di segno di successione numerica. [...] Illigens prosegue: "I segni di successioni numeriche cosí stabiliti, non possono diventare concetti quantitativi, qualunque sia la denominazione che noi attribuiamo loro per mezzo di definizioni diverse."

Certo! Un segno non può mai diventare un concetto. Ma forse non è necessario supporre che Cantor abbia confuso a questo modo segno e designato. Purtuttavia in questa obiezione c'è qualcosa di vero, se la si formula nel senso che le successioni numeriche, a dispetto di tutte le denominazioni che possano venir loro attribuite con definizioni diverse, non diventano grandezze.

71. ULTERIORI OBIEZIONI DI ILLIGENS. RIFLESSIONI CONTRO DI ESSE Illigens pensa inoltre che se $\sqrt{2}$ venisse concepito come puro e semplice segno di successione numerica (per la successione 1,4; 1,41;

[1] ILLIGENS, Math. Ann., vol. 33, 155.

[2] [Ossia la proposizione esprimente appunto la legge cui accenna Illigens.]

1,414; ...), a primo membro dell'uguaglianza $(\sqrt{2})^2=2$ avremmo soltanto un segno per la successione numerica $1{,}4^2$; $1{,}41^2$; $1{,}414^2$; ... Ma, qualunque cosa possa venir scelta come tale segno, a nessuno potrebbe saltare in mente di uguagliare questo segno alla grandezza denotata per mezzo del numero 2. Questa obiezione è giustificata soltanto se Cantor confonde il segno col designato, la qual cosa però va prima dimostrata. Se si pone il segno di uguaglianza fra segni diversi, con ciò non si afferma che il segno che sta a primo membro, nel nostro caso "$(\sqrt{2})^2$", è uguale al significato del segno che sta a secondo membro, ma si stabilisce l'uguaglianza fra il significato del segno a primo membro e il significato del segno a secondo membro. Qui dunque si stabilirebbe proprio l'uguaglianza fra una successione numerica e il significato del segno numerico "2", ossia il numero 2. La legittimità di questa posizione andrebbe esaminata.

Si può appunto rimproverare a Cantor di aver tralasciato questo esame, e di voler stabilire mediante una pseudo-definizione qualcosa che propriamente dovrebbe venir dimostrato. Nella teoria di Cantor, tanto la successione fondamentale $1{,}4^2$; $1{,}41^2$; $1{,}414^2$; ... quanto il numero 2 e il significato della parola "uguale" vanno presupposti come noti. Ma allora il fatto che quella successione fondamentale sia uguale al numero 2 deve essere un risultato di tali supposizioni, e non può essere oggetto di una stipulazione arbitraria. Questa obiezione, evidentemente, regge solo nell'ipotesi che sia esatta l'attuale nostra interpretazione della teoria cantoriana. Piú avanti dovremo tentare ancora un'altra interpretazione. [...]

72. Proposizione di Pringsheim, secondo la quale i numeri razionali possono, ma non debbono, rappresentare quantità determinate

[Alfred Pringsheim, a p. 55 del primo volume della "Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften", avanza l'opinione che i numeri razionali si presentino come segni che *possono*, ma non *debbono* rappresentare grandezze determinate. Ma ciò è insostenibile: o gli oggetti dell'aritmetica sono i significati dei segni, e allora questi ultimi hanno una parte puramente strumentale; oppure gli oggetti dell'aritmetica sono proprio i segni, e allora è indifferente il significato che a essi eventualmente si collega.]

73. Il numero reale è un rapporto di grandezze Infatti qual è propriamente il contenuto dell'asserzione che i segni numerici denotano grandezze? Osserviamo le applicazioni delle leggi aritmetiche alla geometria, all'astronomia, alla fisica! Di fatto, in queste discipline i numeri ricorrono in collegamento a certe grandezze come lunghezze, masse, ntensità luminose, tensioni elettriche; e, a una considerazione superficiale, si potrebbe pensare che uno stesso segno numerico significhi ora una lunghezza, ora una massa, ora un'intensità luminosa, il che sembrerebbe dar fondamento all'asserzione di Pringsheim che fra i segni numerici e le grandezze sussista sí un certo collegamento, ma di natura molto tenue. Esaminiamo piú accuratamente questo fatto. Invero, che cosa applichiamo a rigore, quando facciamo uso di una proposizione aritmetica? Il suono delle parole? Gruppi di strane figure composte con l'inchiostro tipografico? Oppure applichiamo un contenuto di pensiero che colleghiamo a quei segni, quelle parole? Che cosa dimostriamo, quando dimostriamo una proposizione aritmetica? Quel suono? Quelle figure? O dimostriamo questo contenuto di pensiero? Certo, dimostriamo proprio questo! Ma se è cosí allora dobbiamo avere un pensiero determinato anche nella proposizione, e non l'avremmo di sicuro se i segni e termini numerici in essa ricorrenti avessero ora questo e ora quel significato. A un esame piú accurato osserveremo che un segno numerico non può denotare nessuna lunghezza, nessuna forza ecc. di per sé solo, ma soltanto in collegamento con la denotazione di una misura, di una unità come metro, grammo, ecc. Allora, cosa significa qui, il segno numerico da solo? Evidentemente un rapporto di grandezze. E ciò è cosí ovvio, che non possiamo meravigliarci di imbatterci subito in questa conoscenza.[1] Ora, se con "numero" intendiamo il significato di un segno numerico, allora *numero reale* è nient'altro che rapporto di grandezze. E che cosa si ottiene, definendo *numero reale* come rapporto di grandezze? A tutta prima sembra solo di aver sostituito un'espressione con un'altra. Purtuttavia questo è un progresso. In primo luogo, infatti, nessuno scambierà un rapporto di grandezze con un segno, scritto o stampato che sia, e con ciò viene

[1] Si confronti: I. Baumann, *Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik* [Le teorie di tempo, spazio e matematica] (Reiner, Berlino 1868) vol. 1, p. 475.

eliminata una fonte di innumerevoli malintesi ed errori. In secondo luogo con l'espressione "rapporto di grandezze" o "rapporto di una grandezza a un'altra" si accenna al tipo di collegamento fra numeri reali e grandezze. Certamente rimane ancora da fare la cosa principale.[1] Per ora noi possediamo soltanto parole che ci dànno un'idea della direzione nella quale va cercata la soluzione. Bisogna fissare ancor piú precisamente il significato di queste parole. Già da questo momento però non diremo piú che un numero o un segno numerico denotano ora una lunghezza, ora una massa, ora un'intensità luminosa, ma diremo che una lunghezza può avere con un'altra lunghezza lo stesso rapporto che una massa ha con un'altra massa, un'intensità luminosa con un'altra intensità luminosa;[2] e questo rapporto uguale è lo stesso numero e può venir denotato mediante lo stesso segno numerico [...].

74. NELLA SUA REPLICA ALLE OBIEZIONI DI ILLIGENS, CANTOR CONFONDE SEGNO E DESIGNATO. DEGLI OGGETTI ASTRATTI DEL PENSIERO IN ESSA RICORDATI NON ESISTE TRACCIA NELLA SUA DEFINIZIONE [Le obiezioni di Illigens sono legittime solo se col termine "grandezza" egli intende rapporto di grandezze o numero reale (per noi i due termini hanno lo stesso significato). La risposta di Cantor a Illigens, apparsa nel ventitreesimo volume dei "Mathematische Annalen" (p. 476), non permette di decidere se Cantor concepisca i numeri *b* in questione come segni, come pure e semplici denotazioni di successioni fondamentali, o se viceversa attribuisca loro un significato.]

Cantor scrive:

"Ma né io né altri abbiamo mai asserito che i segni b, b', b'', ... siano grandezze *concrete* nel vero senso della parola. In quanto *oggetti astratti del pensiero* essi sono grandezze solo in senso improprio o traslato."

Qui b, b' ecc. vengono invero chiamati segni, ma contemporaneamente oggetti astratti del pensiero. È veramente necessaria una fede a tutta prova, per ritenere oggetti astratti del pensiero segni che ven-

[1] [Come abbiamo accennato, nel corso della sua critica Frege viene mettendo in evidenza alcune conclusioni che si riveleranno poi altrettanti punti fondamentali agli effetti della costruzione della propria teoria. L'interpretazione dei numeri reali quali rapporti di grandezze è appunto uno di questi punti base, anzi, ovviamente, il piú significativo. La "cosa principale che resta da fare" è la dimostrazione dell'esistenza di determinati enti fra i quali si possano stabilire rapporti identificabili appunto coi numeri reali. Frege però concluderà il suo volume *senza* aver dato la dimostrazione qui indicata come essenziale.]

[2] Vorrei bandire l'espressione "numero concreto", perché genera soltanto confusione.

gono scritti col gesso su una lavagna, o con l'inchiostro sulla carta, segni che si possono vedere coi propri occhi; occorre una fede capace di smuovere montagne e creare numeri irrazionali.

Probabilmente Cantor intende che i segni b, b' ecc. debbano denotare oggetti astratti del pensiero. Senza pretendere con ciò di dare una suddivisione esaustiva, possiamo dividere gli oggetti in logici e fisici. Mentre i primi sono reali in senso proprio, i secondi non lo sono, ma non per questo sono meno oggettivi; gli oggetti logici non possono certamente sollecitare i nostri sensi, ma vengono afferrati mediante le nostre capacità logiche. I nostri numeri naturali sono oggetti siffatti; ed è probabile che anche gli altri numeri siano di questo tipo. Orbene, se Cantor con l'espressione "oggetti astratti del pensiero" intende ciò che io chiamo oggetti logici, allora fra noi sembra sussistere in realtà una concordanza soddisfacente. Soltanto che, disgraziatamente, questi oggetti astratti non ricorrono affatto nelle spiegazioni cantoriane! In esse abbiamo successioni fondamentali e segni come b, b' ecc. Pur con la miglior buona volontà non possiamo ritenere questi segni oggetti astratti del pensiero, e neanche possiamo intendere, con oggetti astratti del pensiero, successioni fondamentali. Ammesso dunque che gli oggetti astratti del pensiero siano la cosa essenziale, ebbene, nelle definizioni cantoriane manca proprio questa cosa essenziale. [...]

75. LA DETERMINAZIONE QUANTITATIVA DELLE GRANDEZZE CONCRETE MEDIANTE GRANDEZZE ASTRATTE SECONDO CANTOR. NELL'ESPRESSIONE DEFINITA DA CANTOR NON RITROVIAMO LE CARATTERISTICHE DI UNA DEFINIZIONE Cantor spiega poi come fatto decisivo che con l'aiuto di queste grandezze astratte $b, b', b'', \ldots$ si è in grado di determinare quantitativamente con precisione vere e proprie grandezze concrete, come ad esempio dei segmenti geometrici. Ben lungi dall'essere una comoda appendice, l'applicazione alla geometria si rivela decisiva. Ma se questa applicazione è decisiva, lo è ai danni della teoria di Cantor, perché questo fattore decisivo non ricorre affatto nella definizione delle grandezze numeriche. La determinazione delle distanze mediante grandezze numeriche viene data solo dopo aver effettuato l'introduzione dei $b, b', b'', \ldots$ [1] Quell'introduzione delle grandezze nu-

[1] G. CANTOR, Math Ann., vol. 5, 127.

meriche è puramente aritmetica, ma non contiene il fattore decisivo; quest'indicazione, di come possano venir determinate le distanze mediante grandezze numeriche, contiene sí il fattore decisivo, ma non è puramente aritmetica. E proprio per questo Cantor fallisce nel suo intento. In quella definizione abbiamo a primo membro le successioni fondamentali, a secondo membro i segni b, b', b'', e niente di piú. Diversamente starebbe la cosa se avessimo una definizione puramente aritmetica o logica del termine *rapporto*,[1] dalla quale si potesse anche inferire che esistono rapporti e in particolare rapporti irrazionali. Allora il fattore decisivo risiederebbe in questa definizione, e la determinazione di una distanza per mezzo di un'unità e di un rapporto (numero reale) avrebbe soltanto il valore di un esempio chiarificatore che potrebbe anche essere omesso.

Ma esaminiamo piú da vicino come, secondo Cantor, dovrebbe realizzarsi questa determinazione quantitativa di grandezze concrete! Si suppone di sapere come viene determinata una distanza mediante un numero razionale. A ogni termine di una successione fondamentale corrisponde allora una distanza determinata, e quindi un punto determinato, il quale, su una retta data, ha questa distanza, presa in un determinato senso, da un'origine assegnata. Proseguendo nella successione fondamentale, questi punti si avvicinano illimitatamente a un punto che viene proprio determinato da tale procedimento. Cantor dice:

"Esprimiamo questo fatto dicendo: *la distanza dal punto O del punto da determinarsi è uguale a b*, dove b è la grandezza numerica associata alla successione (1)." [2]

Qui intanto va fatto notare l'errore che nell'espressione spiegata non si menziona affatto l'unità,[3] malgrado essa sia necessaria alla determinazione. Dal che può sorgere l'apparenza ingannevole che $b, b', b'', \ldots$ siano distanze, mentre può solo trattarsi di rapporti, che potrebbero ricorrere altrettanto bene rispetto a intensità di corrente, a lavori meccanici ecc. Tuttavia tale errore si correggerebbe facilmente. Ma quale espressione deve propriamente venir spiegata? Dobbiamo supporre come noto che cosa sia la distanza di un punto da un altro,

[1] Non si intendono naturalmente i rapporti aritmetici inutili.

[2] Alla successione fondamentale.

[3] [Ovviamente si intende qui unità di misura.]

le cosiddette grandezze numeriche (*b*) sono state testé introdotte e anche la parola "uguale" deve già essere nota. Con ciò nell'espressione spiegata è tutto noto e, se la cosa fosse regolare, il senso della proposizione "La distanza dal punto *O* del punto da determinarsi è uguale a *b*" dovrebbe essere altrettanto noto, cosicché una spiegazione sarebbe per lo meno superflua e quindi erronea. [...]

76. Le grandezze numeriche cantoriane sono superflue. Il fatto principale, ossia il rapporto, viene fornito dall'intervento della geometria, che cosí diventa decisivo   Ma parliamo della cosa principale! Evidentemente le grandezze numeriche cantoriane $b, b', b'', \dots$ siano esse segni, o oggetti astratti del pensiero, o entrambe le cose insieme, sono completamente inessenziali per la determinazione delle distanze. In effetti l'usarle rende la cosa piú complicata, senza apportare alcuna utilità. Si escludano del tutto le grandezze numeriche e si troverà che la successione fondamentale è perfettamente sufficiente allo scopo, tanto se a essa è associato un segno *b*, quanto se ciò non accade.

Senza la determinazione delle distanze su descritta, abbiamo soltanto da una parte successioni fondamentali, dall'altra segni, ma la cosa principale manca. E poiché i segni $b, b', \dots$ sono inessenziali, abbiamo in effetti soltanto le successioni fondamentali. Queste successioni possono servire alla determinazione di rapporti, ma soltanto dopo che abbiamo appreso che cos'è un rapporto di grandezze, e ciò che ci manca è proprio questo.

Facciamo l'ipotesi di conoscere alcuni spettri di linee, ma di non conoscere nessun metallo! Ci sarebbe di qualche utilità l'associare a uno di questi spettri il segno "K", a un altro il segno "Na" e a un terzo il segno "Fe"? Molto poco! E ci servirebbe a qualcosa, il chiamare metalli quei segni? Forse ci servirebbe a ingannarci sulla nostra ignoranza; ma cosí facendo non sapremmo niente di piú sui metalli veri e propri. Dapprima dobbiamo conoscere i metalli; e dopo possiamo scoprire come ci sia possibile determinarli con gli spettri. Allora abbiamo gli oggetti che ci interessano, e quell'associare i segni non contribuisce per nulla a tale conoscenza. Prima di avere i metalli stessi, quei segni sono soltanto dei gusci inutili e vuoti, e noi speriamo invano che essi possano colmarsi da sé di un nuovo contenuto.

Lo stesso accade qui. Prima dobbiamo conoscere i rapporti di grandezze, i numeri reali; poi possiamo scoprire come questi rapporti possano venir determinati per mezzo delle successioni fondamentali. È strano che si attribuisca all'associare i segni b, b', b'', una sorta di forza creatrice.[1] Il coinvolgere la geometria è quindi decisivo per il fatto che con ciò ci si impadronisce di quel contenuto al quale sono qui indirizzati tutti gli sforzi. Allora però il fattore decisivo risiede proprio nella geometria e la teoria di Cantor non è in nessun modo puramente aritmetica.

77. Tentativo di concepire le definizioni cantoriane in modo tale che le grandezze numeriche non siano segni di oggetti astratti del pensiero. Esso fallisce perché la corrispondenza è possibile solo a patto che si conosca ciò che si deve far corrispondere

[Sembra però preferibile una diversa interpretazione della teoria di Cantor, che può esprimersi pressappoco come segue.]

A ogni successione fondamentale è collegato un certo numero, non necessariamente razionale. Questi numeri, quindi, sono in parte di un nuovo tipo finora non considerato, ed essi debbono appunto venir determinati per mezzo delle successioni fondamentali con le quali sono collegati. Il segno "*b*" non denota allora la successione fondamentale, bensí il numero a essa collegato. In tal caso questo numero non è assolutamente un segno, ma è ciò che Cantor chiama un oggetto astratto del pensiero.[2]

Orbene, si riconosce facilmente lo scoglio contro cui deve urtare questo tentativo. Siamo completamente all'oscuro sul tipo di collegamento nel quale il numero deve stare con la successione fondamentale. Per mezzo di una relazione del tutto sconosciuta non può venir determinato un qualcosa altrettanto sconosciuto. L'errore consiste in questo:

[1] Per la singolare concezione dei segni e di ciò che essi debbono riuscire a fare, è caratteristica, in molti matematici della nuova generazione, l'importanza fondamentale che viene attribuita a questo associare; si dovrebbe circondarlo di cerimonie speciali!

[2] Allora l'espressione di Cantor sopra riportata, secondo la quale il segno "*b*" stesso dovrebbe essere un oggetto astratto del pensiero, sarebbe inesatta, e andrebbe intesa nel senso che "*b*" denoti un tal oggetto astratto del pensiero. Inesattezze di questo tipo sembrano godere di vasta popolarità, ma non per questo possiamo accettarle.

che si trattano assieme la definizione dei nuovi numeri e l'associarli a una successione fondamentale. Noi possiamo, certo, associare a una successione fondamentale un numero ben definito, ma non un numero che debba ancora essere definito e che quindi non è affatto in nostro possesso.[1] Riprendiamo il nostro paragone! Supponiamo di nuovo di non conoscere alcun metallo, ma di conoscere degli spettri di linee! Ora diciamo: associamo a questo spettro il metallo sodio che deve venir definito da questa corrispondenza. Ma da che cosa otteniamo il metallo? Non sicuramente da questa corrispondenza, che non può crearci niente che non sia già in nostro possesso. [...]

[Se vogliamo definire un numero b di tipo nuovo, per mezzo di una successione fondamentale, non possiamo limitarci ad accennare — come fa Cantor — all'esistenza di una relazione che colleghi b alla successione in parola; è necessario che venga specificata la natura di tale relazione. Se non abbiamo definito b, tanto meno possiamo definire il senso delle relazione $b > 0$, $b < 0$, $b = 0$. Consideriamo in particolare la definizione cantoriana di $b = 0$.]

78. NELLA SUA APPARENTE DEFINIZIONE DELL'ESPRESSIONE "UGUALE A ZERO", CANTOR FA CORRISPONDERE A CERTE SUCCESSIONI FONDAMENTALI IL NUMERO ZERO E NELLE DEFINIZIONI APPARENTI PER "POSITIVO" E "NEGATIVO" SI LIMITA AD ACCENNARE A ULTERIORI CORRISPONDENZE. CON QUESTO MEZZO NON VIENE DEFINITO NIENTE Cantor scrive:

"Nel primo caso dico che b è uguale a zero."

In primo luogo ci chiediamo: "uguale" va qui inteso nel senso di "coincidente con"? Ciò è probabile, perché altrimenti dovremmo ammettere numeri tutti uguali a zero, ma diversi fra loro. Non sarebbe allora determinato quale di questi numeri andrebbe nel primo caso associato alla successione fondamentale. Se invece "a è uguale a b" afferma "a coincide con b", allora esiste un solo numero uguale a zero, precisamente lo zero stesso, e il senso della proposizione diventa: se si presenta il primo caso associo alla successione fondamentale il numero zero. È evidente che qui non abbiamo una definizione, bensí l'associazione di un numero già noto. Contro questa associazione non c'è nulla da obiettare; ma con essa non otteniamo certo un numero nuovo. [...]

[1] Con pari diritto si potrebbe dire: "Impiccano il ladro che deve ancora essere arrestato".

79. LE DEFINIZIONI CANTORIANE DI SOMMA, DIFFERENZA E PRODOTTO SONO SCORRETTE SOTTO MOLTI ASPETTI Cantor prosegue:

"È ora la volta delle operazioni elementari. Se (a_ν) e (a'_ν) sono due *successioni fondamentali* che determinano i numeri b e b', si dimostra che anche $(a_\nu \pm a'_\nu)$ e $(a_\nu \cdot a'_\nu)$ sono successioni fondamentali, le quali determinano quindi tre nuovi numeri, che mi servono come definizioni per la somma e la differenza $b \pm b'$ e per il prodotto $b \cdot b'$."

Questa proposizione è gravemente erronea. Finora, solo dello zero si può dire in ogni caso che esso venga determinato mediante certe successioni fondamentali. Quindi tanto per b quanto per b', possiamo prendere soltanto lo zero. Ma allora il fatto che $(a_\nu + a'_\nu)$ determini lo zero è un teorema, non quindi una definizione. La proposizione può venir dimostrata, e quindi tutto ciò che essa contiene deve essere noto. In base a ciò qui non si deve impiegare una definizione. Qui si presenta la circostanza molto fortunata che ciò che può venir dimostrato coincide proprio con quanto afferma l'apparente definizione. Ma coi princípi del definire cui Cantor si attiene, o piuttosto, con la mancanza — qui messa in chiara luce — di tutti i sani princípi del definire, sarebbe altrettanto possibile che dalla definizione risultasse determinato qualcosa di cui si potrebbe poi provare la falsità.

[Le parole "somma", "differenza", "prodotto" vengono spiegate piú avanti mediante sé stesse, contro il nostro primo principio del definire.]

[80-82. Cantor spiega poi come le sue definizioni di tali operazioni contengano implicitamente anche il caso in cui uno dei termini sia razionale. Ciò è contraddittorio, e in ogni caso non ci fa determinare questi "numeri nuovi", anche se comporta qualche progresso, peraltro non essenziale, sulla via di tale determinazione. Cantor definisce inoltre le relazioni dell'essere maggiore, dell'esser minore, dell'essere uguale, nel caso in cui gli argomenti di tali relazioni siano entrambi numeri di tipo nuovo, ossia i b, b', ecc. L'obiezione fondamentale resta sempre questa: quelle definizioni non ci dicono nulla, perché non sappiamo determinare gli argomenti di tali relazioni, non conosciamo cioè il procedimento o la legge secondo cui associare a una successione fondamentale un numero di tipo nuovo. Le definizioni delle operazioni e delle relazioni fondamentali fra i b, b', contenendo segni o parole spiegati per altri domíni numerici (definire frammentario), possono però produrre l'ingannevole impressione di possedere anche i nuovi numeri, possono cioè farci pensare di aver dato un contenuto ai segni b, b' ecc.]

83. L'INGANNO SVANISCE NON APPENA SI SOSTITUISCANO ALLE PAROLE E AI SEGNI GIÀ SPIEGATI, TERMINI COMPLETAMENTE NUOVI Il definire frammentario genere l'oscurità necessaria alla riuscita dell'inganno. Questo scompare ben presto se, al posto delle parole e dei segni, laddove essi sono trattati come incogniti, si pongono segni e parole completamente nuovi, coi quali non sia collegato un senso o l'apparenza di un senso. Sostituiamoli come segue:

	"positivo"	con	"albig"
	"negativo"	»	"bebig"
	"uguale"	»	"azig"
	"maggiore di"	»	"bezig"
	"minore di"	»	"zezig"
	"zero"	»	"Poll"
	"somma"	»	"Arung"
	"differenza"	»	"Berung"
	"prodotto"	»	"Asal"
i segni	">"	»	"2"
	"<"	»	"2"
	"="	»	"3"
	"+"	»	"B"
	"—"	»	"B"
	"."	»	"C";

allora le spiegazioni cantoriane assumerebbero questa forma:

"Una successione fondamentale presenta tre casi; o i suoi termini, a_ν, per ν sufficientemente grande sono minori in valore assoluto di un numero arbitrario prefissato; oppure, da un determinato ν in poi, i suoi termini sono maggiori di un numero razionale ϱ, precisamente determinabile; o infine i suoi termini, da un certo ν in poi, sono minori di una grandezza negativa $-\varrho$ precisamente determinabile. Nel primo

caso dico che b è azig Poll, nel secondo dice che b è bezig Poll o albig, nel terzo caso dice che b è zezig Poll o bebig."[1]

"Se (a_ν) e (a'_ν) sono due successioni fondamentali per mezzo delle quali sono determinati i numeri b e b', allora si dimostra che anche $(a_\nu + a'_\nu)$, $(a_\nu - a'_\nu)$, $(a_\nu \cdot a'_\nu)$ sono successioni fondamentali, le quali quindi determinano tre nuovi numeri che mi servono come definizione per l'Arung b ≎ b', il Berung b ⋈ b' e l'Asal $b \cup b'$."

"Vengono ora in primo luogo le definizioni dell'essere azig, dell'essere bezig e dell'essere zezig di due numeri b e b'; precisamente si dice che b ⌒ b', o b ∾ b', o infine che b ⋉ b', a seconda che b ⋈ b' è azig Poll, o bezig Poll o zezig Poll."

I significati delle nuove parole e dei nuovi segni possono venir stabiliti mediante queste definizioni, per lo meno con lo stesso diritto col quale, mediante le definizioni cantoriane, possono venir completate le definizioni incomplete date in precedenza. Ma, come si vede, il senso cosí attribuito ai nuovi segni e alle nuove parole non conduce allo scopo qui perseguito. Scompare cosí ogni apparenza che i nuovi numeri vengano in qualche modo determinati piú da vicino mediante queste definizioni. Nelle definizioni di Cantor, questa apparenza può quindi essere generata soltanto dal fatto che si pecca contro il nostro primo principio del definire, in quanto le parole "uguale", "maggiore di", ecc. vengono impegnate in una continua oscillazione fra l'essere note e l'essere ignote. Le spiegazioni di esse poco prima fornite, suscitano l'apparenza di penetrare un po' nei nuovi numeri, sebbene tali spiegazioni non possano essere determinate per questo impiego piú ampio. Eliminata l'oscillazione ora detta, subito l'illusione scompare. [...]

84. SGUARDO GENERALE RETROSPETTIVO SUI RISULTATI DELL'ESAME DELLA TEORIA DI CANTOR Riassumiamo ancora brevemente i risultati del nostro esame della teoria di Cantor. Abbiamo distinto due interpretazioni: in base alla prima, i numeri che Cantor vuole associare alle sue successioni fondamentali sono meri segni, in base alla seconda tali numeri sono oggetti astratti del pensiero.

Nel primo caso, dovremo riguardare le successioni come significati

[1] Conformemente al nostro secondo principio del definire, le espressioni "azig Poll", "bezig Poll" e "zezig Poll" vanno considerate come un tutto non separabile.

dei cosiddetti numeri. L'associare questi numeri è inessenziale; in fondo abbiamo solo le successioni fondamentali mentre manca la cosa principale, i numeri veri e propri, i rapporti di grandezze. Cantor cerca di rimediare a questa mancanza mostrando come i suoi numeri possano servire alla determinazione quantitativa di distanze. Ma in primo luogo i suoi numeri sono del tutto superflui ai fini di questa determinazione, e in secondo luogo cosí facendo il fattore decisivo viene spostato sulla geometria, col che la teoria non è piú puramente aritmetica.

Nel secondo caso, l'associare nuovi numeri alle successioni fondamentali resta solo allo stadio dell'intenzione. Non riusciamo a cogliere queste idee astratte, e finché non le abbiamo afferrate non possiamo neppure associarle. A volte Cantor pensa che le sue successioni fondamentali determinino numeri, ma contraddice sé stesso. Tutto ciò che egli ottiene è questo: che ad alcune successioni fondamentali vengono associati numeri razionali; però non si riesce neppure ad associare con sicurezza il numero uno alla successione fondamentale

$$1/2,\ 2/3,\ 3/4,\ \ldots,\ \nu/(\nu+1),\ \ldots$$

ma soltanto si riconosce l'intenzione di associarle un numero uguale a 1, e "uguale", a dire il vero, non è qui usato nel senso di "coincidente con". Quale fra tutti i numeri uguali a 1 venga associato alla successione, rimane dubbio. Dal fatto che *somma*, *differenza*, *prodotto*, *uguale*, *maggiore*, *minore*, vengono definiti frammentariamente, e quindi contro il nostro primo principio, sorge la falsa apparenza di aver attribuito un significato ai segni numerici. La teoria di Cantor non raggiunge quindi in nessun modo il suo scopo.

3.

Le teorie degli irrazionali di E. Heine e J. Thomae

[La critica seguente, con la quale Frege riteneva di aver "annientato" una volta per tutte la consistenza di qualunque interpretazione formalistica dell'aritmetica rivela due aspetti nettamente diversi: per un lato infatti, contiene pagine estremamente suggestive e feconde, soprattutto perché ricche di sottilissime distinzioni che diverranno patrimonio comune della logica posteriore a Frege; per l'altro lato assume un tono cosí accesamente polemico (in particolare nelle pagine contro Thomae) da apparire dettata, piú che da intenti di obiettività scientifica, da una sorta di risentimento personale.

Questo secondo aspetto, peraltro, è facilmente motivabile su un piano strettamente psicologico, oltre che col prolungato ostracismo cui l'opera di Frege era stata fatta oggetto presso i matematici, anche dal recente fallimento della discussione che tre anni prima Frege aveva condotto — su una problematica evidentemente affine a quella trattata nelle pagine seguenti — con David Hilbert (cfr. pt. 4).

Nella nostra selezione abbiamo evitato le pagine piú aspre della polemica, anche in considerazione del fatto che il loro contenuto soltanto sporadicamente avrebbe avuto interesse ai fini di una piú profonda comprensione del pensiero di Frege; ci siamo invece soffermati ampiamente su quei paragrafi nei quali il nostro autore si eleva a considerazioni di portata generale caratteristiche del primo aspetto sopra segnalato.

La critica di fondo mossa da Frege ai matematici formalisti risiede nella costatazione del fatto che — a suo parere — per elaborare compiutamente l'aritmetica sui princípi fondamentali del loro indirizzo, essi sono costretti a mutuare metodi e risultati resi possibili soltanto da una concezione contenutistica; nel carattere contraddittorio di quest'affermazione andrebbe appunto ricercato il preteso "annientamento" della concezione formalistica.

Meritano particolare menzione: il paragrafo 93, per il chiaro accenno ivi contenuto a una distinzione fra teoria e metateoria, i paragrafi 98, 99 e 100, per le stipulazioni generali sui segni e sull'uso "autonimo" di questi; e infine il paragrafo 90. In quest'ultimo, pur se disposto ad annettere esclusiva significanza al solo momento semantico (cosa ovviamente oggi non piú accettabile), Frege mostra di aver chiaramente concepito la separazione di tale momento dall'aspetto meramente sintattico di una determinata teoria. Le argomentazioni contenute nel paragrafo in que-

stione saranno riprese nel 1910 da Löwenheim, il quale riuscirà a convincere Frege della possibilità di un'aritmetica formalistica, attraverso un intenso scambio epistolare tuttora inedito.

La polemica con Thomae ebbe uno strascico, in verità non molto edificante, nel volume 15 (1906) del "Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung": Thomae precisa alcuni argomenti sui quali la critica di Frege era stata particolarmente aspra; Frege risponde con parole durissime, alle quali Thomae replica a sua volta con una "spiegazione" sottilmente ironica. La questione sembra chiusa, ma due anni piú tardi, nel volume 17 della stessa rivista, Frege pubblica un secondo articolo col quale intende dimostrare da un nuovo punto di vista l'impossibilità dell'aritmetica formalistica di Thomae; questi risponde freddamente con una nota brevissima, alla quale Frege ribatte con una *Schlussbemerkung* che pone finalmente termine alla discussione.[1]]

86. Caratterizzazione preliminare di queste teorie A un primo sguardo, le teorie di E. Heine[2] e J. Thomae[3] sembrano quasi coincidere con la teoria di Cantor. In esse ritroviamo successioni e serie numeriche simili alle successioni fondamentali cantoriane. Anche nelle teorie di cui ora tratteremo, a queste successioni vengono associati segni, e a questo fatto viene attribuita un'importanza particolare. In generale, il modo di procedere, osservato esteriormente, è molto simile a quello seguito da Cantor. Tuttavia non è escluso che, in realtà, l'analogia sia molto piú ristretta di quanto non si possa pensare a prima vista, cosicché sembra desiderabile un esame piú approfondito di queste teorie. Esse non differiscono essenzialmente fra loro. Il pensiero fondamentale di Heine è soltanto elaborato piú profondamente da Thomae. E può darsi che questo pensiero fondamentale diverga in modo note-

[1] [Le successive fasi della disputa, svoltasi interamente sulla rivista sopra citata, si susseguono nel seguente ordine:

Nel volume 15 (1906):

1. Thomae J., *Gedankenlose Denker. Eine Ferienplauderei* [Pensatori senza pensiero. Una chiaccherata], pp. 434-38.

2. Frege G., *Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae* [Replica alla chiaccherata del sig. Thomae], pp. 586-90.

3. Thomae J., *Erklärung* [Chiarimento], pp. 590-92.

Nel volume 17 (1908):

4. Frege G., *Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiesen* [Nuova dimostrazione dell'impossibilità dell'aritmetica formale di Thomae], pp. 52-55.

5. Thomae J., *Bemerkung zum Aufsatze des Herrn Frege* [Osservazione sull'articolo del sig. Frege], p. 56.

6. Frege G., *Schlussebemerkung* [Osservazione conclusiva], p. 56.]

[2] E. Heine, Journal de Crelle, vol. 74, 172.

[3] J. Thomae, *Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer complexen Veränderlichen* [Teoria elementare delle funzioni analitiche di una variabile complessa] (2ª ed. Halle 1898) §§ 1-11.

vole dalla concezione di Cantor. Mi sembra infatti che quest'ultimo non consideri i segni numerici come vuoti, anche se forse il suo modo di scrivere non esclude del tutto questo dubbio e in verità neppure Cantor stesso ha raggiunto una consapevolezza veramente chiara dell'argomento. Per Cantor tuttavia l'essenziale non sono i segni stessi, ma è proprio qualcosa che viene denotato coi segni, qualcosa di cui egli vuole impadronirsi con sicurezza per mezzo dei segni.

Invece la caratteristica peculiare della teoria di Heine è proprio questa: che per essa i segni sono tutto, e ciò è stato espresso ancor piú chiaramente da Thomae. Entrambi questi autori hanno anche questo punto in comune: essi non sono conseguenti fino in fondo con questo pensiero fondamentale, ma alla fine lasciano che i loro segni denotino qualcosa, e precisamente quelle successioni o serie numeriche che corrispondono alle successioni fondamentali di Cantor. Mentre però si può ben supporre che queste successioni fondamentali consistano di *oggetti astratti del pensiero*, tanto per parlare con Cantor, bisognerà invece pensare quelle successioni o serie numeriche come composte da segni, da figure scritte o stampate, visibili, materiali. Quindi queste successioni saranno probabilmente gruppi di figure che si presentano agli occhi come successioni in virtú del loro ordinamento spaziale. Qui abbiamo, allora, una situazione singolare: certi segni denotano successioni o serie i cui termini denotano a loro volta successioni o serie... e cosí via all'infinito.

87. Le asserzioni fondamentali di Heine [...] Heine scrive:

"Alla domanda che cosa sia un numero non rispondo, se non voglio arrestarmi ai numeri razionali positivi, definendo il numero concettualmente e introducendo poi gli irrazionali come limiti, la cui *esistenza* sarebbe una mera ipotesi. Per dare una definizione mi pongo da un punto di vista puramente formale, *chiamando numeri certi segni materiali*, cosicché l'esistenza di questi numeri non è discutibile." [...] Vediamo che i segni numerici hanno qui tutt'altra importanza di quella che veniva loro riconosciuta prima del diffondersi delle teorie formalistiche. Essi non sono piú strumenti ausiliari esterni, come ad esempio il gesso o la lavagna, bensí formano una componente essenziale della teoria stessa. [...]

88. LE ASSERZIONI FONDAMENTALI DI THOMAE   Thomae scrive: "La concezione formale dei numeri si pone limiti piú modesti della concezione logica. Essa non indaga sull'essenza e il significato dei numeri, ma indaga sull'uso che si fa dei numeri nell'aritmetica. L'aritmetica poi, per la concezione formale, è un giocare con segni i quali si dicono per l'appunto vuoti, volendo con ciò affermare che a essi (nel gioco del calcolo) non spetta nessun altro contenuto se non quello che viene loro attribuito in considerazione del loro comportamento rispetto a certe regole di connessione (regole del gioco). In modo analogo il giocatore di scacchi si serve delle sue figure: attribuisce loro certe proprietà che condizionano il loro comportamento nel gioco, e le figure sono soltanto il segno esterno di questo comportamento. Certamente, fra il gioco degli scacchi e l'aritmetica è necessaria un'importante distinzione. Le regole degli scacchi sono arbitrarie, mentre il sistema delle regole dell'aritmetica è costituito in modo che i numeri possono venir correlati, per mezzo di semplici assiomi, a certe verità intuitive, con la conseguenza che ci rendono un servigio essenziale nella conoscenza della natura."

In altre parole:
per l'aritmetica hanno importanza solo le regole in base alle quali vanno manipolati i segni aritmetici, non il significato di questi segni. Si potrebbe osservare, come differenza fra la teoria di Thomae e quella di Heine, che il primo si rifiuta di indagare circa l'essenza del numero, considerando questo problema come inessenziale per l'aritmetica, mentre il secondo vi risponde affermando che i numeri sono segni. Dal momento però che entrambi sono concordi nell'affermare che l'aritmetica ha a che fare con segni, questa differenza è inessenziale. Heine dà il nome di numeri a questi segni; Thomae al contrario sembra intendere con "numero" qualcosa la cui essenza non viene presa in considerazione dall'aritmetica, qualcosa quindi che a dire il vero non è un segno, ma proprio il significato di un segno. Ma dove egli parla anche del significato dei numeri, lo qualifica di nuovo come un segno, sicché qui viene a mancare un tipo di discorso conseguente. Noi abbiamo sempre chiamato numeri questi significati dei segni numerici che sono, sí, ammessi da Thomae, ma considerati come esterni all'àmbito del-

l'aritmetica. Vediamo dunque che secondo questo matematico tali autentici numeri, o rapporti di grandezze vanno esclusi dall'aritmetica. Cosí otteniamo un'aritmetica singolare, del tutto diversa da quella che considera come suoi oggetti gli autentici numeri e che noi, per distinguerla dall'aritmetica formalistica, vogliamo chiamare contenutistica. In base a questa distinzione, possiamo quindi supporre che Cantor si muove sul terreno dell'aritmetica contenutistica, Thomae e Heine, al contrario, sul terreno dell'aritmetica formalistica. La differenza è oltremodo profonda. [...]

90. L'ARITMETICA FORMALISTICA E L'IDEOGRAFIA COME GIOCHI Cerchiamo di rendere ancor piú chiara l'essenza dell'aritmetica formalistica. La questione è del tutto ovvia: come si distingue tale aritmetica da un gioco puro e semplice? A questa domanda Thomae risponde richiamandosi al servigio che essa ci può rendere nella spiegazione della natura. Ciò può basarsi solo sul fatto che i segni numerici significano qualcosa, mentre al contrario le figure degli scacchi non significano niente. Questa può essere la sola ragione per cui si attribuisce all'aritmetica maggior dignità del gioco degli scacchi. Ma ciò che determina tale distinzione risiede per Thomae all'infuori dell'aritmetica, cosicché questa, in sé e per sé, è dello stesso rango del gioco degli scacchi e va chiamata arte o gioco, piuttosto che scienza. Malgrado che i segni numerici denotino qualcosa, è possibile, secondo Thomae, astrarre da questo qualcosa e considerarli semplicemente come figure che si maneggiano in base a certe regole. Se si volesse riandare ai significati, proprio in essi le regole troverebbero la loro fondazione; ma qui questo succede, per cosí dire, dietro le quinte; sulla scena dell'aritmetica formalistica non è dato osservare nulla di tutto ciò.

Ora, è ben vero che noi avremmo potuto introdurre le nostre regole di inferenza e le altre leggi dell'ideografia come stipulazioni arbitrarie, senza parlare in alcun modo del senso e del significato dei segni. Allora i segni verrebbero per l'appunto trattati come figure. In tal caso, quella che per noi era la rappresentazione esteriore di una deduzione, sarebbe paragonabile a una mossa del gioco degli scacchi, ossia soltanto al passaggio da una disposizione dei pezzi a un'altra, senza che a essa fosse associato il passaggio da un pensiero a un altro pensiero. Si

potrebbero presentare a una persona le nostre formule I-V e le definizioni *A-H* del primo volume come punto di partenza — paragonabili alla disposizione iniziale della scacchiera, — si potrebbero dire a questa persona le regole in base alle quali effettuare i passaggi, e si potrebbe quindi assegnarle il compito di ottenere da questi dati iniziali la nostra formula (71) del primo volume; tutto ciò senza che tale persona abbia la piú pallida idea del senso e del significato di questi segni, né dei pensieri che quelle formule esprimono. Si potrebbe sinanche pensare che questo compito venisse assolto come noi abbiamo fatto. Che nell'assolvere questo compito si debba eseguire un lavoro intellettuale, è ovvio; proprio come succederebbe se un còmpito analogo dovesse assolversi nel gioco degli scacchi — giungere cioè, conformemente alle regole del gioco, da una certa disposizione iniziale a una disposizione finale data — dove non si parlerebbe affatto di pensieri espressi dalle successive disposizioni, e dove nessuna mossa potrebbe essere considerata come una deduzione. Verrebbe dunque eseguito un lavoro intellettuale, ma ciò malgrado mancherebbe completamente quello sviluppo di pensieri che accompagna le nostre derivazioni e che propriamente ha loro conferito da tempo interesse. Ciò può anche essere possibile, ma ben difficilmente vantaggioso; potrebbe darsi invero che, eliminando il contenuto di pensiero, il compito divenga non piú facile, bensí notevolmente piú difficile.[1]

93. Nel gioco aritmetico non esistono né teoremi, né dimostrazioni, né definizioni, che invece esistono nella teoria del gioco stesso. La possibilità di una teoria del gioco aritmetico è dubbia [...] Sono possibili definizioni nell'aritmetica formalistica? In ogni

[1] [Abbiamo già varie volte richiamato l'attenzione sul contenuto di questo paragrafo, come pure abbiamo accennato come esso forní lo spunto a Löwenheim per impostare una fruttuosa discussione epistolare con Frege. Qui vogliamo ricordare che già nel 1895, nella sua prima lettera a Hilbert, Frege aveva assunto una netta posizione sfavorevole "all'impiego vuoto dei segni, che, a lungo andare, riassumerebbero in questo modo le difficoltà e gli errori della lingua corrente". Impiegando i segni in modo puramente meccanico, ossia sintattico, si mettono in pericolo da una parte la verità dei risultati, dall'altra la fecondità stessa della scienza. A parere di Frege, inoltre, mentre il primo pericolo si potrebbe evitare con la completezza delle denotazioni logiche, non sarebbe altrettanto facile evitare che un impiego puramente meccanico dei segni portasse la scienza a un punto fermo, il che avverrebbe se il *Formelmechanismus* prendesse tanto la mano da escludere il pensiero. È quindi evidente che Frege, pur ammettendo una possibile autonomia del momento sintattico, non giunga mai, in realtà, a considerarlo scisso da quello semantico.]

caso non quelle che stabiliscono significati per i segni numerici: tali significati infatti debbono restare qui completamente fuori questione. Invece delle definizioni, avremo qui l'introduzione di nuove figure,[1] accompagnata dall'aggiunta delle regole relative al loro maneggio. Se quindi nella teoria di Thomae ricorre l'espressione "definizione formale", con essa si deve intendere solo quanto or ora abbiamo detto. In una teoria dell'aritmetica formalistica, sono possibili anche vere e proprie definizioni; in esse però non vengono attribuiti significati alle figure, significati che per l'appunto debbono restare fuori questione, ma vengono spiegate certe espressioni colle quali si possono formulare piú brevemente i teoremi di tale teoria.

Thomae non effettua la distinzione fra gioco vero e proprio e teoria del gioco, distinzione che peraltro contribuisce essenzialmente a penetrare la questione. Se nella rappresentazione di Thomae incontriamo teoremi, c'è da supporre che essi appartengano alla teoria del gioco. Queste proposizioni diranno solo apparentemente qualcosa delle figure, le cui proprietà sono quasi del tutto indifferenti e vengono in questione solo in quanto servono a una differenziazione. Sono piuttosto le proprietà delle regole del gioco che vengono messe in luce per mezzo di tali proposizioni. Allo stesso modo, nella teoria degli scacchi, non si indaga propriamente dei pezzi; ma ciò che forma oggetto di indagine sono le regole e quanto da esse segue.

Quest'aritmetica formalistica differisce evidentemente dal gioco degli scacchi per il fatto che essa può introdurre figure sempre nuove, con nuove regole, mentre negli scacchi tutto rimane invariato. Con ciò si torna a porre in dubbio che risulti possibile una teoria del gioco del calcolo. Si può invero sospettare che in essa non esistano affatto proposizioni definitive. Introducendo infatti figure nuove, può diventare possibile parecchio di ciò che era impossibile prima di tale introduzione, come pure, viceversa, parecchio di ciò che precedentemente era possibile può diventare impossibile. Negli scacchi almeno, la presenza di figure nuove potrebbe ostacolare l'effettuazione di parecchie mosse.

[1] [Ricordiamo che Frege chiama qui "segno" un simbolo numerico inteso come denotazione del suo significato (costituito appunto dal numero come oggetto) mentre riserva il nome di "figura" a un simbolo numerico che proprio in quanto tale venga considerato come numero (è precisamente questo il nucleo della critica che Frege muove ai formalisti).]

Prima di esser sicuri che sia possibile una teoria del gioco del calcolo, bisognerebbe dimostrare che nell'aritmetica questo non succede.

97. Thomae concede che i simboli numerici possano talvolta essere usati anche come segni numerici Un po' piú oltre Thomae scrive: "A dire il vero si presentano casi nei quali anche nell'aritmetica ai numeri [1] non spetta semplicemente un significato formale; per esempio nella proposizione 'quest'equazione è di grado 3' ecc."

In base a ciò sembra che ai segni numerici, accanto al loro proprio significato — che nell'aritmetica viene considerato solo eccezionalmente — venga riconosciuto anche un significato formale, il che, se fosse vero, lascerebbe perplessi a causa dell'ambiguità; ma qui certo la nostra congettura è causata da un'espressione scelta in modo non felice. Si deve dire semplicemente che in alcuni casi i segni numerici non possono venir trattati soltanto come figure, ma che talvolta occorre rifarsi al loro significato. Sorprende certamente il fatto che nell'aritmetica formalistica o nella sua teoria possa venir preso in considerazione qualcos'altro oltre alle regole del gioco. Come si potrebbe pensare che nella teoria degli scacchi potessero essere importanti i significati dei singoli pezzi, significati che sono indifferenti per il gioco?

L'ammissione che anche nell'aritmetica formalistica i segni numerici non sempre vengono usati soltanto come figure, è molto grave per la teoria di Thomae; con ciò si ammette che il punto di vista formalistico non può sempre venir sostenuto. È chiaro che nel gioco del calcolo stesso non può esser preso in considerazione un significato dei segni. Si può indagare sul significato solo se i segni sono componenti di proposizioni che esprimano un pensiero. Orbene, proposizioni siffatte possono certamente presentarsi nella teoria del gioco; ma se nella rappresentazione della teoria si fanno servire le figure del gioco contemporaneamente come segni aventi un significato, ciò deve essere fonte di una confusione enorme. Infatti nella teoria il maneggio di questi segni sarebbe condizionato dal loro significato, mentre nel gioco stesso

[1] La parola "numeri" sta qui evidentemente per "segni numerici"; solo in questo caso infatti si può parlare di un significato, mentre sopra, dove veniva messa da parte la domanda "qual è l'essenza e il significato dei numeri", si intendeva manifestamente il significato dei segni numerici. Nel seguito tuttavia Thomae usa regolarmente la parola "numero" nel significato di *segno numerico*, o meglio di *figura numerica*. Se egli dovesse scostarsi da questo significato, lo faremo notare esplicitamente.

vigono regole del tutto arbitrarie per operare coi segni. Non può supporsi senz'altro che i due modi di maneggio coincidano. Per uscire dalla confusione originatasi da questa doppia parte sostenuta dai segni numerici, occorre dare ai segni numerici che si usano nella rappresentazione della teoria del gioco, un aspetto che li distingua dalle figure numeriche pure e semplici dal momento che ad essi viene attribuito un significato.

98. Che cosa sono i segni? A questo punto sarà utile trattare un po' piú dettagliatamente dei segni, dal momento che, attraverso le affermazioni fatte da Heine e da altri, secondo le quali i numeri sono segni, essi sono stati qualificati come fossero gli oggetti della matematica, e hanno cosí acquistato un'importanza che non avrebbero certo avuta quali puri e semplici strumenti ausiliari del pensiero e della comunicazione. È cosí facile far sorgere in proposito malintesi causati dall'uso oscillante della lingua, che non procederemo mai con sufficiente cautela, e non dovremo aver timore di dichiarare esplicitamente anche cose ovvie, per avere con sicurezza un punto di partenza comune.

Che cosa può dirsi sull'essenza di un segno? Voglio limitarmi a considerare figure generate scrivendo o stampando sulla superficie di un corpo fisico (lavagna, carta); è ovvio infatti che si pensa solo a esse quando ai numeri si dà il nome di segni. Ma noi non chiameremo segno ognuna di quelle figure — ad esempio non riterremo in generale degno di tale nome uno scarabocchio — bensí le daremo questo nome soltanto se essa ci serve a denotare, esprimere o affermare qualcosa. Nell'usare un segno, non vogliamo dire qualcosa del segno stesso, ma, di regola, la cosa principale è il suo significato. Cosí l'astronomo intende il pianeta Giove, quando ne usa il segno "♃"; il segno in sé è qui per lui, in realtà, indifferente, rappresenta soltanto uno strumento scelto arbitrariamente per esprimere il pensiero, e che resta del tutto estraneo alla trattazione. L'utilità del segno risiede proprio in questo "stare per". Certamente, anche se in via eccezionale, si presenta il caso in cui si voglia parlare del segno stesso, e ciò accadrà nella discussione con gli aritmetici formalisti. In questo caso, per evitare che subentrino dubbi, dobbiamo distinguere anche esteriormente un tale uso del segno. Si dimostra quanto mai opportuno, in questi casi, racchiudere il segno

tra virgolette. Per maggior chiarezza si può anche preporre la parola "il segno". Tutto ciò potrà sembrare pedante, ma non è affatto superfluo. Se si fosse sempre tenuta ben presente questa distinzione, si sarebbe forse evitata la possibilità di avere una presentazione come quella di Heine, la cui essenza sembra proprio consistere in questo doppio uso dei segni. I matematici sogliono servirsi di modi di espressione i quali hanno reso tanto abituale questo doppio uso dei segni, che ormai non lo si nota piú. Cosí si trovano espressioni come.

"*a* denoti la piú piccola radice dell'equazione (1)"

e se nel seguito ricorre alla lettera "*a*" con essa si intende la radice minore di quell'equazione. Qui abbiamo il doppio uso. Nella prima proposizione si intende un segno, in seguito il suo significato. Si dovrebbe quindi scrivere o

" '*a*' denoti la piú piccola radice dell'equazione (1)",

oppure

"Sia *a* la radice minore dell'equazione (1)."

Se ci si mettesse di buona lena, con esempi siffatti presi dalle opere dei matematici della nuova generazione si potrebbero forse riempire volumi.[1] Si considera ciò come una piccolezza insignificante; eppure tutto fa pensare che trascuratezze di questo tipo siano divenute la fonte di grosse confusioni. E se dovesse risultare che le teorie formalistiche dell'aritmetica hanno tratto il loro sostentamento proprio da questo, la cosa non dovrebbe certamente esser presa alla leggera.

99. Segni equiformi non sono lo stesso segno Ben scarsa utilità avrebbero i segni, se non potessero servire a denotare la medesima cosa ripetutamente e in contesti diversi, in modo da far riconoscere facilmente che si intende proprio la stessa cosa. Ciò si ottiene usando in queste varie volte segni il piú possibile simili. Certamente non avverrà quasi mai di imbatterci per la seconda volta esattamente nella stessa forma, e anche se ciò dovesse accadere, l'acutezza della nostra vista non sarebbe sufficiente a riconoscere con sicurezza questo fatto. Ma ciò non è neppure necessario. Infatti, se i segni hanno il solo scopo di servire alla comprensione degli uomini fra loro, o di un uomo con sé stesso

[1] Mi cade proprio sotto gli occhi ancora quanto segue: "Sul numero dei valori diversi che una funzione di date *lettere* può assumere se si permutano queste lettere." (Math. Ann., vol. 33, 584).

— di servire quindi alla riflessione, — occorre soltanto che chi scrive abbia l'intenzione di fare un segno simile a quello già fatto in precedenza, ed è sufficiente che ciò riesca nella misura di far riconoscere esattamente quest'intenzione a chi legge. Nel seguito con "segni equiformi" intenderemo quelli che debbono essere tali in base all'intenzione di chi scrive, in quanto debbono denotare una medesima cosa. Di solito non ci si esprime esattamente, poiché si parla di segni equiformi come di uno e uno stesso segno, quantunque io costruisca un altro oggetto ogni volta che scrivo un segno di uguaglianza. Queste figure si distinguono fra loro per il luogo, per il momento nel quale sono state tracciate e probabilmente anche per la forma. Forse si dirà che si astrae dalle diversità in modo da poter considerare le anzidette figure come lo stesso segno. Ma questo astrarre deve proprio rendere possibile tutto! Cose diverse non possono essere portate a coincidere da nessuna astrazione, e se ciò malgrado le si riguarda come uguali, ebbene si compie semplicemente un errore. Se io, astraendo dalla diversità fra la mia casa e quella del mio vicino, volessi considerarle tutte e due come la stessa casa e in base a ciò volessi comandare nella casa altrui come a casa mia, mi si farebbe ben presto notare con chiarezza l'erroneità della mia astrazione. Ciò che forse si può ottenere con l'astrarre è un concetto, e se noi chiamiamo brevemente "classe" l'estensione di un concetto, possiamo annoverare nella stessa classe tutti i segni equiformi. Ma questa classe non è il segno; non posso generarla scrivendo, posso sempre soltanto indicare i singoli oggetti che a essa appartengono. Se ciò malgrado si parla di questi oggetti come dello stesso segno, si trasferisce al segno la coincidenza del significato.

100. Ancora sull'aritmetica formalistica. Qui abbiamo simboli. Simboli equiformi. Differenze tra aritmetica formalistica e aritmetica contenutistica Tutto ciò vale per l'uso ordinario e regolare dei segni. Nell'aritmetica formalistica la parte da essi sostenuta è un'altra; essi non debbono denotare nient'altro; ma sono essi stessi ciò di cui ci si interessa. Occasionalmente, come ad esempio per Heine, la loro vera natura — la concretezza — può saltar fuori e venir gettata nel piatto della bilancia come base della dimostrazione. In questo caso

noi li chiamiamo piú volentieri figure proprio perché lo scopo di denotare qualcosa non viene assolutamente preso in considerazione. Si dovranno chiamare equiformi quelle figure, le cui diversità formali eventualmente osservabili non influiscano per niente sul modo di operare con esse secondo le regole del gioco. Nell'uso corretto, segni equiformi debbono significare la stessa cosa e sotto molti riguardi vengono trattati come se fossero la stessa cosa, perché vengono considerati solo come segni dei loro significati. Ma per figure equiformi questa ragione viene a cadere. Non possiamo trattare i pedoni bianchi della scacchiera come se fossero un'unica figura. Nello stabilire le regole del gioco degli scacchi e nella teoria di quel gioco, non possiamo usare la parola "pedone" come nome proprio, con l'articolo determinato; infatti ci sono molti pedoni. Mentre nell'aritmetica contenutistica sono leciti come nomi propri nomi quali "il numero uno", oppure "l'uno", o anche semplicemente "uno", essi nella teoria dell'aritmetica formalistica sono da rifiutare; esistono infatti moltissime uno-figure.[1] Ne vengono formate sempre di nuove, mentre le antiche vengono distrutte. In verità qui si potrebbe dire "una uno-figura", "alcune uno-figure", "tutte le uno-figure", ma non "la uno-figura", perché ciò equivarrebbe a introdurre determinazioni che accennerebbero univocamente a una unica uno-figura.

Si può stabilire quest'ulteriore distinzione fra l'aritmetica formalistica e l'aritmetica contenutistica. In questa, la parola "uno" e il segno "1" significano la stessa cosa — e precisamente il numero uno vero e proprio, non percepibile coi sensi, — mentre nella teoria dell'aritmetica formalistica la parola "uno-figura", o l'altra "uno" erroneamente usata per la prima, significa il concetto sotto cui cade il segno "1" assieme a tutti gli altri segni ad esso equiformi.

[101-105. Heine attribuisce un'importanza particolare alle operazioni del calcolo: i segni numerici debbono venir scelti in modo da dare un adeguato "sostegno" alla definizione di tali operazioni. Egli però si esprime in modo molto oscuro già quando cerca di spiegare che cosa siano per lui queste operazioni. Pensiamo che egli intenda dire: "Le operazioni del calcolo sono scambi — effettuantisi in base a determinate regole — per mezzo dei quali un gruppo composto da due numeri e da un segno di

[1] [Cioè esistono infinite "figure" — nel senso qui dato da Frege a questo termine — che convenzionalmente stabiliamo essere uguali alla figura 1. Cosí sono esempi di uno-figure "2 — 1", "8/8" e simili.]

operazione che li separa, può essere sostituito da un solo numero." È chiaro che qui egli intende la possibilità di sostituire ad esempio il gruppo "5+3" con "8". Ma sostituzioni di questo tipo non sono lecite in generale in una aritmetica puramente formalistica; esse infatti sono eseguibili solo in quanto noi colleghiamo ai segni precedenti un senso e un significato. Heine abbandona quindi il piano formalistico, nel definire le operazioni, ed è costretto a non essere conseguente coi suoi princípi anche quando vuol precisare la natura delle regole che governano gli scambi su accennati. Le definizioni generali sono possibili — per un indirizzo formalistico — solo riecheggiando risultati già noti dell'aritmetica contenutistica. Un'impostazione puramente formalistica dell'aritmetica comporta l'esigenza di definire le operazioni caso per caso, relativamente cioè ai singoli gruppi interessati all'operazione stessa.]

106. Le regole del calcolo secondo Thomae Qualcosa di analogo troviamo nella teoria di Thomae. Leggiamo:

"Queste regole sono contenute nelle formule seguenti:

$$a+a'=a'+a, \qquad a+(a'+a'')=(a+a')+a''=a+a'+a'',$$

$$(a'-a)+a=a', \qquad aa'=a'a, \qquad a(a'a'')=(aa')a''=aa'a'',$$

$$(a':a)a=a', \qquad a(a'+a'')=aa'+aa''."$$

Questa è una bella sorpresa. Che cosa direbbe una persona che avesse chiesto informazioni sulle regole degli scacchi, e alla quale, per tutta risposta, venisse mostrato un gruppo di pezzi disposti sulla scacchiera? Probabilmente direbbe di non poter riconoscere nessuna regola in quella disposizione, perché a quei pezzi e alla loro combinazione non collega proprio nessun senso. Il nostro sembra solo apparentemente un caso diverso, perché noi conosciamo già, dall'aritmetica contenutistica, il segno piú, il segno di uguaglianza e l'uso delle lettere; infatti qui noi vogliamo fare dell'aritmetica formalistica e quindi sorge la questione se quei segni vadano qui trattati in generale come segni oppure soltanto come figure. In quest'ultimo caso non è dato vedere come, per mezzo di quelle formule, venga data una regola. Se al contrario essi vanno trattati come segni, non possono certamente avere lo stesso significato che hanno nell'aritmetica contenutistica: in tale ipotesi infatti noi avremmo una proposizione di quest'aritmetica e non una regola dell'aritmetica formalistica.

[107-109. Come già per Heine anche per Thomae un gruppo di figure sembra poter sostenere due parti: può intervenire nel gioco stesso, dove allora non esprime

alcun senso; oppure può presentarsi nella teoria del gioco (regole) dove diventa un teorema e quindi esprime un senso. È evidente la complicazione che ne sorge, ma a prescindere da ciò, se si volesse procedere rigorosamente si dovrebbero stabilire due sistemi di regole, in relazione appunto alle due distinte funzioni dei segni. Solo in un secondo tempo si potrebbe eventualmente concludere che quei sistemi coincidono, e in ogni caso ciò dovrebbe formare oggetto di una dimostrazione. I due autori di cui stiamo esaminando le teorie, si limitano invece a presupporre tale coincidenza. Per poter procedere con chiarezza nella nostra analisi, evitando questo doppio modo di considerare le figure, stipuliamo quindi le seguenti convenzioni: consideriamo le figure numeriche e le figure del calcolo ("+", "=", ecc.) come facenti parte del gioco vero e proprio, sicché esse non esprimono un senso né hanno alcun significato; per rendere le regole del gioco facciamo invece uso della lingua comune. In base a queste convenzioni, dal momento che le regole di Thomae or ora elencate non hanno in definitiva altro scopo che quello di autorizzare certi scambi fra figure, si può stabilire la seguente regola: "Si abbia una formula che contenga una componente uguale a un membro di una data uguaglianza; allora nella formula è lecito sostituire tale componente col secondo membro di quell'uguaglianza".]

110. REGOLE DELL'ARITMETICA FORMALISTICA. LEGGI DELL'ARITMETICA CONTENUTISTICA E LEGGI MORALI Anche questa regola accorda un permesso, al pari delle regole degli scacchi, dove nulla può accadere che non sia autorizzato da una regola. Si possono aggiungere ancora altre regole sulla sostituibilità delle lettere con altre lettere o con figure numeriche. Anche queste regole permetteranno qualcosa. In realtà, con esse, non è possibile dare a nessuno una libertà che già non possieda; queste regole non vengono stabilite in nome della ragione o della natura; per loro mezzo vengono soltanto riconosciuti come leciti alcuni modi di operare nel gioco del calcolo. Qui non si parla di verità, come nell'aritmetica contenutistica; sta all'arbitrio del legislatore aritmetico riconoscere qualcosa come legittimo, e nel far questo egli non è limitato da alcun riferimento a significati che per lui ufficialmente non esistono. Le regole dell'aritmetica formalistica come norme per l'agire sono piú affini alle leggi morali che non alle leggi dell'aritmetica contenutistica, che possono sí venir misconosciute, ma non trasgredite.

111. INCOMPLETEZZA DELL'ELENCO DI REGOLE DEL THOMAE [...] Se ora gettiamo uno sguardo sull'aritmetica contenutistica, osserviamo che in essa esistono certamente leggi valide per tutti i numeri, ma osserviamo anche che in nessun modo tutto ciò che vale per un numero vale anche

per un altro. Al contrario: ogni numero è essenzialmente diverso da ogni altro e di conseguenza deve anche venir indicato con un suo segno particolare. Ora, se l'aritmetica formalistica non deve perdere ogni connessione con quella contenutistica, se le molteplici forme delle figure numeriche non debbono ridursi a qualcosa di molestamente superfluo, occorre che alle regole introdotte da Thomae se ne aggiungano altre non valide per tutte le figure numeriche, cosicché a ogni diversità di forma corrisponda una diversità delle regole. Tali regole saranno stipulate in modo da permettere ad esempio che ogni gruppo di figure della forma "1+1" possa venir sostituito da una due-figura, o ancora che un gruppo della forma "2+1" possa venir sostituito da una tre-figura, che un gruppo come "1—1" possa venir sostituito da una zero-figura, un gruppo come "$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$" da una uno-figura e cosí di seguito. Ora, poiché non esiste una delimitazione fissa del dominio delle figure numeriche, anche l'elenco delle regole, a quanto sembra, non dovrà essere concluso in modo definitivo. Comunque sia, possiamo ritenere sicuro che l'elenco di regole di Thomae è notevolmente incompleto.

112. La sottrazione formale come inverso dell'addizione formale

[Come abbiamo già detto non si hanno mai due segni assolutamente uguali: essi pifferiranno sempre per il luogo ove sono stati scritti, per il tempo nel quale sono stati scritti, e con molta probabilità anche per la forma. Di conseguenza, per quanto semplice si possa immaginare un'operazione, sia ad esempio "2 — 1", ogni qualvolta noi la eseguiamo otteniamo sempre un risultato diverso.]

Si potrebbe cercare di evitare questa conseguenza facendo appello al significato formale che Thomae attribuisce alle figure numeriche. Si potrebbe dire, per esempio: poiché tutte queste figure o questi gruppi di figure, che vengono presentati come risultati di una certa operazione, debbono venir trattati in base alle stesse regole, essi hanno lo stesso significato formale e proprio questo costituisce il risultato vero e proprio di tale operazione. Contro di ciò si deve obiettare:

1) che non dobbiamo assolutamente accettare questo significato formale;

2) che questo significato formale, se fosse ammissibile, risulterebbe

identico per tutte le figure numeriche, per lo meno fintanto che si assumano soltanto le regole di Thomae che debbono valere indifferentemente per tutte le figure numeriche;
3) che non sarebbe possibile svolgere nessun ulteriore calcolo sul risultato della sottrazione, perché le regole del calcolo si riferiscono a figure numeriche, non ai loro discutibili significati formali. Anche il gioco degli scacchi si svolge sui pezzi stessi, non su un certo qualcosa che fosse comune, ad esempio, a tutti i pedoni neri.

Quanto si è detto per la sottrazione si può riportare essenzialmente al caso della divisione.

113. LA POSIZIONE D'ECCEZIONE DELLO ZERO RIVELA UNA REGOLA DI DIVIETO [...] Nella proposizione:

"Un quoziente il cui divisore è lo zero, non ha significato", vengono evidentemente chiamati quozienti [1] gruppi di figure come quelli sopra introdotti. Il fatto che manchi il significato per l'aritmetica formalistica non è una ragione per rifiutare gruppi siffatti; infatti, essa non indaga assolutamente sul significato, e la ragione vera e propria per cui essa viene preferita all'aritmetica contenutistica è che non abbisogna di questo significato. Per essa "2/3" ha tanto poco significato quanto "2/0" e, in base alle regole, entrambi questi gruppi possono venir trattati egualmente bene.[2]

Orbene, che cosa vuol dire propriamente Thomae quando asserisce di negare ogni significato a un quoziente il cui divisore sia lo zero? Senza dubbio vuol dire che non è lecito un gruppo di figure nel quale, a destra dei due punti o sotto una linea di frazione, compaia una zero-figura. Si vuol dire con ciò che le regole del gioco del calcolo non forniscono un'autorizzazione per questi gruppi? Oppure si vuol proprio dire che esse li vietano? Nel primo caso avremmo una proposizione della teoria del gioco, paragonabile ad esempio alla proposizione esistente nel gioco degli scacchi, secondo la quale un alfiere che stia su una casella bianca non può passare su una casella nera. Contro questo

[1] Se lo stesso quoziente fosse un significato, ben difficilmente si potrebbe parlare del suo significato.

[2] L'aritmetica formalistica qui non è in carattere con sé stessa. A volte sembra proprio che l'aritmetica formalistica sia nient'altro che la contenutistica e che, solo per evitare questioni non gradite, tenti di essere formalistica, senza peraltro riuscirci bene.

passaggio non c'è alcun divieto, ma la libertà di movimento conferita all'alfiere non è sufficiente a renderlo possibile. Ora però, noi abbiamo una regola di Thomae che ammette il presentarsi di un gruppo di figure sul tipo di quello che viene qui indicato come non lecito. Si tratta della regola che permette di sostituire una due-figura con il gruppo "(2 :0)·0". Se quindi in generale è permesso scrivere una due-figura, sarebbe anche permesso di conseguenza scrivere un gruppo della forma "2:0". Se quindi vogliamo che ciò non sia lecito, non bastano — per ricavarlo — le regole finora introdotte, ma occorre a tale scopo un preciso divieto; e la nostra proposizione:

"Un quoziente il cui divisore è zero non ha significato" va concepita come una regola che sanziona un divieto, ossia come una proposizione della teoria del gioco Se essa è tale, allora è una conseguenza delle regole del gioco. Almeno una di queste ultime, allora, deve sanzionare un divieto, perché da sole regole che forniscono permessi non può seguire alcun divieto che possa limitare la portata di una di esse. In ogni caso accanto alle regole di permesso deve esisterne almeno una di divieto.

114. TENTATIVO DI ESPORRE LE REGOLE CHE ESPRIMONO DIVIETI [...] Possiamo meglio esprimere come segue la regola di divieto di Thomae: "È vietato formare gruppi di figure nei quali, a destra dei due punti indicanti divisione, stia o una zero-figura, o un gruppo di figure che, in base a una qualsiasi regola dell'aritmetica formalistica, possa venir sostituito da una zero-figura."

[Le regole cosí concepite — di divieto e di permesso — comportano non poche oscurità: dovrebbero essere chiariti i loro reciproci rapporti, come pure si dovrebbero introdurre in generale le classi di figure lecite. Sono anche necessarie regole che sanciscano le modalità di sostituzione delle lettere per mezzo di altre lettere o di figure numeriche.

Thomae dichiara poi che figure nuove "sono non contraddittorie nell'aritmetica", se esse sono "non contraddittorie rispetto alle quattro operazioni fondamentali". C'è da chiedersi che cosa Thomae intenda con quest'ultima espressione, ma in ogni caso si può pensare che una tale contraddizione appaia ogni qualvolta regole valide per una classe particolare di figure contrastino con le regole che invece valgono per tutte le figure indistintamente.

Una successiva affermazione di Thomae, secondo la quale l'indirizzo contenuti-

stico dell'aritmetica stabilisce relazioni fra numeri e oggetti sensibili, è del tutto erronea; e la migliore dimostrazione di ciò è proprio fornita dal complesso delle nostre indagini sulla natura del numero.

Sorprende inoltre che Thomae stabilisca una singolare coincidenza fra l'ordinare in successione e il cadere sotto il concetto di grandezza: un libro, per esempio, sarebbe una grandezza, dal momento che dei libri possono venir ordinati in una successione. Piú sorprendente ancora la disinvoltura con cui Thomae dà esplicitamente all'infinito il nome di concetto, senza addurre particolari ragioni. Non riusciamo a vedere perché egli non lo chiami figura. L'infinito attuale, che Cantor ha con ragione introdotto nella matematica, non è invero una figura e di conseguenza non dovrebbe trovar posto nell'aritmetica formalistica.]

124. INTRODUZIONE DELL'IRRAZIONALE. SUCCESSIONI NUMERICHE DI HEINE Orbene, come viene introdotto l'irrazionale nell'aritmetica formalistica? A un primo sguardo proprio come nella teoria di Cantor, alle cui successioni fondamentali corrispondono qui le successioni numeriche di Heine e le serie numeriche di Thomae. Ma i termini delle successioni fondamentali di Cantor non sono figure visibili, concrete, ma, come sembra, sono di tipo non sensorio, mentre le successioni e serie numeriche di Heine e Thomae debbono manifestamente essere costituite di figure materiali. Se questa interpretazione è esatta, quell'analogia delle teorie è soltanto esteriore e non essenziale. Malgrado manchino a questo proposito chiare enunciazioni da parte dei predetti autori, a quanto sembra possiamo supporre che la relazione di ordinamento in successione abbia, per Thomae e per Heine, un carattere spaziale. Supponiamo che tanto una successione numerica di Heine quanto una serie numerica di Thomae, debba essere un gruppo di figure numeriche scritte da sinistra a destra, a distanza non eccessiva l'una dall'altra, e pensiamo che si dia il nome di termine della serie a ognuna di queste figure. Si dovrà ancora assumere che fra i singoli termini sia visibile soltanto uno spazio vuoto.

Dalla rappresentazione di Heine si dovrà ora inferire che una successione siffatta procede all'infinito. Ma per costruirci una tale successione abbisogneremmo di una lavagna infinitamente lunga, di una quantità infinita di gesso e di infinito tempo. Si potrà aspramente criticare come inaudito il voler stroncare cosí alto volo del pensiero per mezzo di una obiezione cosí prosaica; ma con tale critica l'obiezione non viene confutata. Se si riducono i numeri a figure concrete e ci si basa su questa

concretezza per non dubitare della loro esistenza, ebbene, si devono sottoporre i numeri anche a tutte le esigenze di una siffatta esistenza materiale. Qui riconosciamo un singolare destino: nell'opera di Heine, l'esistenza delle successioni numeriche, e con essa contemporaneamente l'esistenza dei numeri irrazionali, viene annullata proprio da quella concretezza che invece avrebbe dovuto garantirla.

Heine stabilisce poi l'esigenza di attribuire un segno a ognuna di quelle successioni numeriche, e dice:

"Si introduce come segno la successione stessa posta fra parentesi quadre, cosicché il segno associato alla successione *a*, *b*, ecc. è [*a*, *b*, ecc.]."

Per poter far uso di questo segno si dovrebbe prima scoprire l'arte di porre fra parentesi una successione estendentesi all'infinito.

Piú avanti Heine dà questa definizione:

> "Dicesi numero o segno numerico piú generale il segno associato a una successione numerica."

In base a ciò una successione numerica posta fra parentesi quadre, ammesso che esista, sarebbe un numero piú generale. Da ciò riconosciamo come il vero e proprio oggetto delle considerazioni di Heine debba essere costituito non dalle successioni numeriche nella loro nudità originaria, bensí nel loro rivestimento con parentesi quadre.[1]

125. Definizione di successione infinita secondo Thomae Thomae cerca di aggirare la difficoltà che l'estendersi di una successione all'infinito presenta per l'aritmetica formalistica, per mezzo di una definizione della serie infinita. Egli dice, nel paragrafo 5:

"Una serie di numeri (per ora ordinari) $(a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \ldots)$ si chiama una serie infinita se non possiede un ultimo termine, ma se in base a una prescrizione da stabilirsi, possono venir formati nuovi termini senza limitazione."

Se noi non sapessimo qual è lo scopo di Thomae, potremmo pensare a un ordinamento di figure numeriche che rientrasse in sé stesso. Poiché evidentemente non si intende ciò, una serie di figure numeriche deve

[1] Del resto sorprende trovare l'articolo determinativo davanti a "segno associato a una successione numerica", poiché alla stessa successione numerica si possono associare segni diversi, e di questa possibilità Heine ha anche fatto uso.

sempre avere due estremi, e un termine deve sempre essere l'ultimo. A causa però dell'ultima parte della proposizione che inizia con "ma", si deve supporre che "ultimo" non sia qui da considerarsi nel suo senso ordinario. Scrivo qui sotto una serie numerica

2 3 5

e chiedo: secondo Thomae è essa una serie infinita? Se al primo termine si dà il nome di due-figura, in base all'uso linguistico, all'ultimo termine dovremo dare il nome di cinque-figura. In base a ciò non avremmo una serie infinita. Ma nella spiegazione di Thomae viene posto l'accento sul "potere". Secondo Thomae la cinque-figura non è l'ultimo termine, se in base a una prescrizione da stabilirsi possono venir formati sempre nuovi termini senza limitazione. A questo scopo però non è necessario che vengano realmente formati sempre nuovi termini; è sufficiente la possibilità di fare ciò; in quanto esistente la serie non ha bisogno mai di contenere piú di quei tre termini, e tuttavia sarebbe una serie infinita se esistesse quella possibilità. Ma essa esiste? Per un dio onnipotente, senza dubbio; per un uomo, no. Qui ci imbattiamo nell'arduo concetto del "possibile", ma vediamo che per decidere la nostra questione è del tutto indifferente di quali termini si componga la nostra serie. Le serie non vengono cosí suddivise in finite e infinite, ma saranno o tutte finite o tutte infinite, a seconda del senso che noi colleghiamo alla parola "potere". Abbiamo un caso analogo per una successione di case che si snodi gradualmente da una città ai campi. Noi possiamo definire: "Una successione di case si chiama infinita se nessuna casa che in essa figura è l'ultima, ma se, in base a una prescrizione da stabilirsi, si possono sempre costruire nuove case senza limitazione." Se in quanto precede presupponiamo il "potere" degli uomini e prendiamo la parola "sempre" nel suo senso piú stretto, nessuna successione di case sarà infinita. Sotto la stessa ipotesi e per la stessa ragione nessuna serie di figure numeriche è infinita; infatti prevediamo che la possibilità di continuare prima o poi cesserà.

Riconosciamo dunque come sia vano volerci ingannare, mediante una definizione, sulla limitatezza del nostro "potere".

[Le figure numeriche concrete che gli aritmetici formalisti assumono come numeri veri e propri, formano evidentemente un insieme finito. Con questa considera-

zione si sanziona a priori il fallimento di ogni tentativo, compiuto nell'àmbito di una teoria formalistica, inteso a introdurre i numeri irrazionali: questi infatti sono raggiungibili soltanto come limiti, e quindi per mezzo di infiniti numeri.

Vogliamo concludere il nostro esame con un'esemplificazione generale della teoria di Thomae.]

137. SGUARDO RETROSPETTIVO SULL'ARITMETICA FORMALISTICA [...] Questo tentativo di un'aritmetica formalistica può considerarsi non riuscito già per il fatto che non può essere attuato conseguentemente. Le figure numeriche alla fine vengono impiegate di nuovo come segni. L'elenco delle regole del gioco, stabilito da Thomae stesso, è incompleto e noi dobbiamo supporre che un elenco siffatto in generale non potrebbe mai venir concluso, che oltre a regole di permesso dovrebbero essere stabilite anche regole di divieto, dal che sorgerebbe un'incertezza su che cosa sarebbe permesso, incertezza questa che non potrebbe mai esser eliminata del tutto. Abbiamo cercato possibilmente di eliminare l'oscurità che sorgeva dalla mancanza di una distinzione fra gioco e teoria del gioco. Ma a dire il vero non è stato possibile dare una teoria del gioco prima che tutte le regole non fossero espresse. Abbiamo visto che inavvertitamente e senza darne ulteriori spiegazioni venivano assunte denotazioni ed espressioni dell'aritmetica contenutistica, ad esempio "maggiore" e "minore", la cui parte nel gioco del calcolo rimaneva oscura, malgrado apparisse importantissima. L'aritmetica formalistica si dimostra incapace di definire il numero irrazionale, perché ha a sua disposizione soltanto un insieme finito di figure numeriche.

A dire il vero molti matematici non vedono chiaro circa la portata del pensiero fondamentale dell'aritmetica formalistica. A quanto sembra la si concepisce essenzialmente come l'aritmetica contenutistica alla quale siano detratti i doveri che le provengono dai significati dei segni. In effetti la concezione dei numeri come figure vien fatta valere propriamente all'inizio, dove quei doveri sono pressanti; piú tardi, senza accorgersene, si riscivola nell'aritmetica contenutistica. Pur tuttavia quella concezione ha conseguenze che possono anche diventare importune; essa produce una cosí totale e radicale variazione dell'aritmetica che pare appena lecito usare il nome "aritmetica" tanto per quella formalistica quanto per quella contenutistica. L'aritmetica formalistica può sostenersi soltanto se diventa non conseguente con sé

stessa.[1] Questa sua esistenza apparente le viene facilitata dalla fretta con la quale per lo piú i matematici si allontanano dai primi fondamenti della loro scienza — ammesso che in generale se ne occupino — per conseguire obiettivi piú importanti. Molto viene trascurato del tutto, qualcosaltro toccato solo di sfuggita, niente viene esaminato a fondo nei singoli punti. A questo modo una teoria può assumere l'aspetto della solidità che si manifesterebbe immediatamente come sua debolezza, non appena si tentasse seriamente di farne un esame realmente dettagliato. E con ciò si accenna alla via per la confutazione. Si devono ulteriormente proseguire quei sentieri del pensiero ora soltanto tracciati, per vedere dove essi conducano. Eseguire sul serio questo programma con l'aritmetica formalistica significa distruggerla; e cosí noi abbiamo fatto.[2]

[1] Chi ha il gusto dei paradossi potrebbe forse dire: l'esatta concezione della teoria formalistica consiste nel considerarla falsa.

[2] Helmholtz, nel suo articolo *Numeri e misure considerati da un punto di vista gnoseologico* (in *Philosophische Aufsätze*, articoli filosofici dedicati a E. Zeller per il cinquantesimo anno di dottorato), sembra aderire a una teoria formale, quando dice, per esempio: "Io considero l'aritmetica o la teoria dei numeri puri come un metodo costruito su fatti puramente psicologici, mediante il quale viene insegnata l'applicazione logica di un sistema di segni (precisamente dei numeri) di estensione e possibilità di raffinamento illimitate. L'aritmetica ricerca specialmente quali diversi modi di collegamento di questi segni (operazioni del calcolo) conducono allo stesso risultato."

Anche qui i segni ricevono una forza magica, poiché i loro significati si sono dileguati alla vista. A ciò si aggiunge l'accostamento di psicologia ed empiria che non fa che aumentare l'oscurità. Helmholtz vuole fondare empiricamente l'aritmetica, per amore o per forza. Conformemente a ciò, egli non si chiede: fino a che punto ci si può spingere senza intromettere fatti dell'esperienza? Ma si chiede: qual è il modo piú celere perché io possa intromettere certi fatti dell'esperienza sensibile? A tutti coloro che hanno quest'aspirazione, ciò riesce molto facilmente nel medesimo modo, precisamente mescolando le applicazioni delle proposizioni aritmetiche con le proposizioni stesse. Come se le questioni intorno alla verità di un pensiero non fossero completamente diverse dalle questioni riguardanti la sua applicabilità! Invero, io posso riconoscere con estrema chiarezza la verità di una proposizione, senza sapere se posso fare anche una sola applicazione di quella proposizione. Ma com'è grazioso mescolare queste cose fra loro e non distinguere mai ciò che è diverso! Allora la chiarezza comparirà certamente. Ben poco mi si è presentato di meno filosofico di questo articolo filosofico, e ben poche volte è stato piú misconosciuto il senso della questione gnoseologica di come qui accade.

4.

Sguardo retrospettivo e previsioni. Grandezze. Teoria delle grandezze

[Abbiamo già motivato la decisione di non comprendere in questa scelta dai *Principi* le pagine che Frege — esaurita la critica ai formalisti — dedica all'esame delle teorie di Dedekind e Weierstrass, prima di passare all'impostazione e alla successiva elaborazione simbolica del suo originale procedimento diretto a introdurre i numeri reali per via puramente aritmetica; di quest'ultima fase "costruttiva" presentiamo ora le pagine piú significative, che vengono appunto brevemente illustrate in questa premessa.

La sostanza delle critiche svolte da Frege in precedenza si può riassumere come segue: il metodo di Cantor aveva rivelato — fra l'altro — un legame troppo intimo con la geometria, ed era venuto cosí a perdere il carattere propriamente aritmetico che il suo autore intendeva attribuirgli; Dedekind pretendeva di introdurre i numeri reali accordando alle definizioni un'ingiustificata "potenza creatrice"; la concezione di Weierstrass poggiava su molteplici equivoci, cosí basilari, da sconsigliarne addirittura un esame piú approfondito; e i formalisti, infine, si trovavano nell'impossibilità di principio di fornire una giustificazione alla teoria dei numeri reali.

Frege interpreta i numeri reali come rapporti di grandezze mantenendosi cosí — contro i formalisti — su un terreno strettamente contenutistico; ed evitando di considerare grandezze di tipo particolare, quali ad esempio le grandezze geometriche, intende sfuggire all'errore compiuto da Cantor; contro Dedekind, infine, egli viene caratterizzando la classe dei numeri reali, di cui intende successivamente *dimostrare* l'esistenza.

Data la fondamentale concezione ora esposta, una teoria dei numeri reali coinciderà, per Frege, con una teoria generale delle grandezze; di qui la necessità di chiarire a fondo questo ultimo concetto prima di intraprendere una qualunque elaborazione sistematica della teoria.

Per il nostro autore, ogni sforzo inteso a caratterizzare come grandezza un singolo oggetto considerato isolatamente, è destinato al fallimento; ciò perché l'essere un ente quantitativo (ossia una grandezza) deriva a un oggetto dall'apparteenre assieme ad altre grandezze (omogenee con esso) a una classe, cioè all'estensione di un determinato concetto. Di conseguenza, il problema va aggirato, nel senso che il

nostro scopo principale deve essere quello di precisare le proprietà che caratterizzano una classe come *dominio di grandezze* o *dominio quantitativo*.[1] Ovviamente, e a seconda degli scopi particolari che ci muovono, noi possiamo stabilire di volta in volta la natura degli elementi di una classe siffatta, restando inteso però che a questo punto ci attende un duplice còmpito:

1) stabilire le proprietà che caratterizzano la classe di quei particolari elementi come un dominio di grandezze,

2) dimostrare l'esistenza di tale classe.

Individuate cosí le linee sulle quali si muoverà la sua ricerca, Frege, seguendo un suggerimento contenuto in un brano di Gauss, afferma che gli elementi di cui si servirà saranno Relazioni (si veda piú avanti) e intraprende quindi l'indagine precisata nei due punti su enunciati, relativamente a una classe di Relazioni. Fra gli elementi di tale classe, ossia fra queste Relazioni, dovranno esistere rapporti identificabili coi numeri reali; e dal momento che questi ultimi formano un insieme sovrannumerabile, la nostra classe — che all'occorrenza chiameremo per brevità classe C — dovrà possedere un numero sovrannumerabile di elementi. Essa ci è fornita dall'estensione del concetto *classe di numeri naturali finiti*.[2]

A questo punto Frege mostra come fra gli elementi della classe C cosí ottenuta, ossia fra le classi di numeri naturali, si possano effettivamente stabilire rapporti interpretabili come numeri reali; passa quindi a trattare simbolicamente il primo dei due còmpiti su enunciati, assumendo come caratteristiche di un dominio quantitativo i cui termini siano Relazioni, la validità del principio associativo e del principio commutativo per la composizione delle Relazioni di quel dominio. La dimostrazione di questo primo punto è oltremodo laboriosa e complessa; si basa essenzialmente sull'introduzione del concetto molto comprensivo di *classe positivale*, un cui sub-concetto, detto da Frege *classe positiva*, fornisce la richiesta proprietà caratteristica: in altre parole, una classe C per essere un dominio quantitativo deve essere una *classe positiva*. Entrare in maggiori particolari inerenti alle successive fasi della dimostrazione richiederebbe complicazioni non lievi; rimandiamo quindi senz'altro ai passi che di tale dimostrazione abbiamo riportato.

Si è già detto che Frege non conduce la dimostrazione indicata al punto 2); questa lacuna è senza dubbio molto grave, specialmente se considerata nel contesto delle critiche mosse da Frege a Dedekind e ai formalisti; ciò nonostante, la via qui seguita dal nostro autore, e condotta con la solita, scrupolosa aderenza ai canoni della logica, conserva ancor oggi un suo valore di efficace suggerimento per una sistematica impostazione del problema.

2. Vogliamo infine avvertire di due norme da noi seguite nella pagine seguenti.
a) Frege usa il termine *Beziehung* per indicare una relazione intesa come *funzione* di primo grado a due argomenti, che assuma come valori sempre e solo valori

[1] [Abbiamo preferito di norma adottare quest'ultima versione per il tedesco *Grössengebiet*.]

[2] [L'estensione di tale concetto è infatti l'insieme potenza dell'insieme dei numeri naturali; come noto a esso spetta proprio il numero cardinale $2^{\aleph_0}$, uguale alla potenza del continuo.]

di verità; mentre impiega il termine *Relation* per indicare il *campo* di quella relazione, (Frege lo chiama estensione della relazione) ossia l'insieme degli argomenti della funzione in parola. In italiano i due termini tedeschi corrispondono entrambi alla parola *relazione*. Per ovviare l'inconveniente che renderebbe praticamente incomprensibile il testo, abbiamo convenuto di differenziare tipograficamente i due casi, scrivendo "relazione" (con l'iniziale minuscola) in corrispondenza del tedesco *Beziehung* e "Relazione" (con l'iniziale maiuscola) in corrispondenza di *Relation*. b) Nei *Princípi*, quando si tratta di dimostrare simbolicamente una determinata proposizione, Frege illustra brevemente il senso della proposizione stessa, e traccia le linee essenziali della dimostrazione in un paragrafo che intitola *Zerlegung* (analisi), cui fa seguire uno o piú paragrafi nei quali svolge l'effettiva dimostrazione simbolica; a tali paragrafi dà il titolo di *Aufbau* (costruzione). Per non appesantire l'esposizione delle pagine dedicate alla teoria delle grandezze, abbiamo riportato solo alcuni paragrafi di "analisi" riassumendo brevemente il contenuto dei paragrafi di "costruzione" soppressi.]

156. ARITMETICA FORMALISTICA E ARITMETICA CONTENUTISTICA. ENTRAMBI QUESTI INDIRIZZI NON HANNO FINORA CONDOTTO ALLO SCOPO Riepiloghiamo ora brevemente i tentativi effettuati per introdurre i numeri superiori, e chiediamoci quale vantaggio possiamo trarne per le nostre proprie fatiche.

Distinguiamo due direzione principali lungo le quali si muovono questi tentativi: quella formalistica e quella contenutistica. La prima chiama numeri certe figure costruite per iscritto, con le quali si opera secondo regole arbitrarie. Senza dubbio in un altro contesto queste figure possono anche essere segni che significano qualcosa; ma l'aritmetica formalistica astrae completamente da questo qualcosa. Per l'aritmetica contenutistica invece quelle figure non sono altro che segni dei suoi autentici oggetti, segni numerici, strumenti ausiliari esteriori. L'aritmetica formalistica, come spinta da un destino inevitabile, sembra sempre confluire nel solco dell'aritmetica contenutistica, e urta, fra le altre, contro la seguente difficoltà. Ogni volta che introduce un nuovo tipo di figure, essa deve contemporaneamente stabilire nuove regole per il loro impiego, e precisamente tanto regole di permesso quanto regole di divieto. Ora, in verità, bisognerebbe mostrare che queste nuove regole non possono entrare in contraddizione nè fra loro nè con le regole precedenti. Non ci si accinge mai seriamente a questo còmpito, e quindi ancor meno lo si assolve.

A nostro giudizio può essere presa in considerazione solo un'aritmetica contenutistica. Ma, come abbiamo visto, anche i tentativi effettuati su questo terreno sono rimasti infruttuosi, almeno nella misura in cui essi volevano essere puramente aritmetici.

O non si distingue fra concetto e oggetto; e, allora, presentando un concetto si crede di avere contemporaneamente l'oggetto fornito delle proprietà che si desiderano; oppure si riconosce che un concetto può anche essere vuoto, e allora si richiede da esso che non sia contraddittorio. La necessità di questa condizione è tanto evidente, quanto problematica è la sua sufficienza. Il fatto che non sussista alcuna contraddizione sembra — a parere di molti — immediatamente chiaro, perché, se ne sussistesse una, essa dovrebbe venir notata subito. È facile confutare questa argomentazione rifacendosi alle dimostrazioni per assurdo. Tale fatto, dunque, deve venir dimostrato. Orbene, noi abbiamo, certo, la proposizione che un concetto è non contraddittorio se sotto esso cade un oggetto; ma proprio nel nostro caso questa proposizione è inutilizzabile. Dunque, fino a che non venga scoperto un principio del tutto nuovo, col quale si possa dimostrare la non contraddittorietà, non proseguiremo oltre per questa strada.[1]

[1] Sembra che L. Kronecker, come noi, abbia ritenuto erronei tutti i tentativi finora compiuti per dare una fondazione aritmetica dell'irrazionale; per lui le grandezze algebriche irrazionali sono estranee all'aritmetica vera e propria; egli vuole quindi eliminare tali grandezze, e fra i numeri vuol riconoscere solo gli interi positivi come oggetti dell'aritmetica. Ogni tentativo diretto a fondare la teoria dei numeri irrazionali in modo puramente aritmetico si ridurrà in definitiva a ricondurre tutto ai numeri naturali, sicché ogni proposizione aritmetica può venir ascritta alla teoria dei numeri naturali. Orbene, nello stesso senso si può ascrivere alla teoria dei punti, delle rette e dei piani ogni proposizione della teoria delle curve e delle superficie algebriche; ma c'è differenza fra il ritenere solo come inessenziale l'espressione "curva del quarto ordine" e il volerla bandire del tutto dalla geometria perché il concetto che essa denota non appartiene a questa scienza. E Kronecker sembra proprio considerare gli irrazionali non solo come inessenziali, ma addirittura come non aritmetici, tali cioè che le dimostrazioni condotte col loro ausilio poggiano su qualcosa che intorbida la purezza dell'aritmetica. Possiamo ben approvare il principio che l'aritmetica — ove possibile — non debba far uso nelle sue dimostrazioni di nessun argomento mutuato dalla geometria o comunque da una scienza estranea. Ma si pone la questione se, ammesso ciò, non si possa tuttavia riuscire a definire i numeri irrazionali per via puramente aritmetica; e noi tenteremo di aprire una tale via.

Del resto la teoria che Kronecker fornisce dei numeri naturali, e che gli serve come base di tutto, è insostenibile. Per lui il numero naturale è una totalità di segni numerici. Il che conduce all'assurda conseguenza che un popolo che usasse altri segni numerici avrebbe anche altri numeri naturali, sicché la sua aritmetica tratterebbe tutt'altri oggetti della nostra, e quindi sarebbe una scienza completamente diversa. Inoltre esisterebbe solo un numero finito di numeri naturali, perché fino a oggi sono stati scritti evidentemente solo un numero finito di segni numerici, e da questi possono costituirsi solo un numero finito di totalità. (Confrontare *Intorno al concetto di numero di Leopold Kronecker*, in *Philosophische Aufsätze* cit.)

157. I NUMERI REALI COME RAPPORTI DI GRANDEZZE. IL DOMINIO DEI NUMERI NATURALI NON PUÒ VENIR ESTESO A QUELLO DEI NUMERI REALI Tuttavia questo esame dei tentativi non coronati da successo non è stato del tutto infruttuoso. Abbiamo richiamato alla memoria la nostra conversione della generalità di una uguaglianza in una uguaglianza di decorso di valori; tale conversione ci fa sperare di poter compiere ciò che non sono in grado di fare le definizioni creative degli altri matematici. Abbiamo concepito i numeri reali come rapporto di grandezze, e cosí abbiamo escluso l'aritmetica formalistica nel senso sopra riportato. In questo ordine di idee abbiamo riguardato le grandezze come quegli oggetti fra i quali ha luogo un tale rapporto.[1]

Dal momento che i numeri naturali non sono rapporti, dobbiamo distinguerli dai numeri interi positivi. Per questo motivo non è possibile ampliare il dominio dei numeri naturali in modo da comprendere quello dei numeri reali; essi sono domíni nettamente e completamente separati. I numeri naturali rispondono alla domanda: "Quanti oggetti di un certo tipo ci sono?", mentre i numeri reali possono venir considerati come numeri-misura, che dicono quanto grande è una grandezza se confrontata con una grandezza unitaria. Parecchi lettori si sono forse meravigliati della nostra formula "$a \frown (b \frown f)$" e in sua vece si sarebbero aspettati la formula "$a + 1 = b$"; ma la f-relazione di un numero naturale al suo successivo è diversa dalla relazione "$\xi + 1 = \zeta$". Quella ha luogo solo per i numeri naturali, questa anche per numeri diversi dagli interi positivi, cosicché, mediante la sua inversione, riusciamo a raggiungere, a partire dai numeri positivi, oltrepassando lo zero, i numeri negativi, mentre non è possibile un regresso a partire dal numero $\emptyset$.[2] Per questo distinguiamo anche i numeri naturali $\emptyset$ e $\not 1$ dai numeri interi 0 e 1.

158. I SEGNI NUMERICI NON DENOTANO DISTANZE. DISTACCO DALLA GEOMETRIA. NATURA LOGICA DELL'ARITMETICA. "FORMALISTICO" IN ALTRO SENSO In un primo momento potrebbe sembrare necessario

[1] In questo concordiamo con Newton.

[2] Non abbiamo cosí prematuramente potuto introdurre in generale il segno più, senza spiegarlo in modo incompleto e frammentario e senza urtare cosí contro il nostro primo principio del definire.

appoggiarci alla geometria; ma, nel concepire il numero reale come rapporto di grandezze, abbiamo rifiutato l'opinione che il numero reale sia qualcosa come un segmento, ossia che un segno numerico significhi un segmento. Non si distingue sempre con precisione fra un segmento e il numero-misura che ad esso compete in rapporto a un segmento unitario. Cosí, a dire il vero, si parla del segmento *a* e poi, nel seguito si intende con "*a*" il numero-misura di tale segmento. La confusione che ne è scaturita ha proprio fatto sorgere l'opinione che un segno numerico significhi — o almeno possa significare — un segmento. Quel segno significa certamente qualcosa, ma niente di geometrico. Lo stesso e identico rapporto di grandezze che ha luogo fra due segmenti, lo abbiamo invece fra volumi, masse, intensità luminose ecc. Con ciò il numero reale si separa da questi tipi particolari di grandezze, e, per cosí dire, rimane sospeso sopra di esse. E perciò non mi sembra appropriato legare troppo strettamente la trattazione a figure geometriche. Queste si possono senza dubbio utilizzare con profitto per facilitare la comprensione, ma bisogna guardarsi dal fondare alcunché su di esse. Infatti, ogniqualvolta le proposizioni aritmetiche possono venir dimostrate indipendentemente dagli assiomi geometrici, esse vanno proprio dimostrate in questo modo. Altrimenti si rinnegano senza necessità l'indipendenza dell'aritmetica e la sua natura logica.

Forse, questa trattazione dell'aritmetica può anche venir chiamata formalistica, sempre che non si usi questa parola nel senso sopra esposto. Allora tale denominazione caratterizza la natura puramente logica dell'aritmetica, ma non vuole affatto affermare che i segni numerici siano figure prive di contenuto, con cui operare in base a regole arbitrarie. Anzi le regole sono qui una necessaria conseguenza dei significati dei segni e questi significati sono gli oggetti veri e propri dell'aritmetica; arbitraria è solo la denotazione.

159. Indirizzo intermedio fra i metodi di fondazione geometrici e le vie tentate in tempi piú recenti. Distacco da ogni tipo particolare di grandezze senza trascurare la misura. Le applicazioni. Riflessione La via che qui dobbiamo seguire si inserisce quindi fra l'antico modo geometrico di fondazione della teoria dei numeri irrazionali, ancora preferito da Hankel, e le vie intraprese in tempi piú

recenti. Del primo conserviamo la concezione del numero reale come rapporto di grandezze o numero-misura ma lo svincoliamo tuttavia dalle grandezze, siano esse geometriche o di ogni altro tipo particolare, accostandoci cosí a queste tendenze piú moderne. Nel contempo però evitiamo una deficienza che si manifesta in queste ultime, nelle quali il misurare o non ricorre affatto, oppure viene aggiunto in modo puramente esteriore, senza una connessione interna, fondata sull'essenza del numero stesso: ciò ha per conseguenza che, a rigor di termini, per ogni tipo di grandezza dovrebbe essere specificamente stabilito come essa vada misurata e come, con questa operazione, si ottenga un numero. In queste teorie manca completamente un'indicazione che stabilisca dove i numeri possano essere usati come numeri-misura, e come si articoli quest'applicazione.

Cosí possiamo sperare, da una parte, di non lasciarci sfuggire gli appigli dell'applicazione in particolari domíni del sapere, senza, d'altra parte, contaminare l'aritmetica con gli oggetti, i concetti e le relazioni mutuati da quelle scienze e senza minacciare la sua essenza peculiare e la sua indipendenza. Tuttavia ci si può ben attendere che l'aritmetica ci presenti tali appigli, anche se l'applicazione stessa non è un fatto che la riguardi.

Il tentativo che faremo deve renderci edotti se il nostro piano sia attuabile. Accingendosi a esso può sorgere questa riserva. Se la radice quadrata positiva di 2 è un rapporto di grandezze, allora, per definirla, sembra necessario indicare grandezze che abbiano fra loro questo rapporto. Ma dove prendere tali grandezze, visto che è vietato ricorrere a grandezze fisiche e geometriche? E tuttavia abbisognamo di un tal rapporto di grandezze, per il fatto che, in caso contrario, il segno "$\sqrt{2}$" non potrebbe venir usato.

Prima di tentare di eliminare questa riserva, dobbiamo intenderci sul significato della parola "grandezza".

Grandezze

160. TENTATIVI FALLITI DI CHIARIRE IL TERMINE "GRANDEZZA" La parola "grandezza" ("quantità") ha, per molti matematici, lo stesso significato di "numero reale", o "numero" *tout court*. Quest'abitudine è

strettamente connessa col fatto che il numero-misura e la grandezza da esso determinata rispetto a un'unità (a una misura) non sempre vengono tenuti separati; tale abitudine non può essere qui presa in considerazione.

Non è ancora stato mai detto in modo soddisfacente che cosa sia una grandezza. Scorrendo i tentativi fatti per spiegarlo, ci imbattiamo spesso nella parola "omogeneo" o in una a essa simile. Si richiede dalle grandezze che quelle omogenee si possano fra loro confrontare, sommare, sottrarre, e che una grandezza possa venir scomposta in parti a essa omogenee.[1] Con la parola "omogeneo", evidentemente, non si è detto proprio niente; infatti delle cose possono essere omogenee sotto un certo riguardo, e non omogenee sotto un altro. Alla domanda quindi se un oggetto sia omogeneo a un altro, non si può rispondere con un "sí" o con un "no"; si pecca contro la prima esigenza della logica, quella di una rigorosa delimitazione.

Altri definiscono la grandezza con le parole "maggiore", "minore", o "decrescere", "diminuire", con le quali però non si ottiene niente; infatti resta oscuro in che cosa consista la relazione dell'esser maggiore o l'attività dell'accrescere. Altrettanto inutile è l'impiego delle parole "addizione", "somma", "moltiplicazione", se esse sono state spiegate in modo non soddisfacente.

Quando Hankel dice:[2]

"Per somma di due grandezze *a* e *b* si intende una nuova grandezza che scaturisce quale risultato dalla loro sintesi", egli usa la parola "sintesi" a sua volta non spiegata, e rimane dubbio se due dati oggetti non possano dar luogo a sintesi diverse.

Se si sono spiegate parole in un contesto particolare, non si può poi pensare di collegare a esse un senso in contesti diversi. È chiaro che qui ci si muove solo circolarmente, spiegando sempre una parola con un'altra che necessita a sua volta di una spiegazione, senza avvicinarsi con questo all'essenza della cosa.

[1] O. Stolz, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* [Lezioni di aritmetica generale] (Teubner, Lipsia 1885), introduzione.

[2] H. Hankel, *Theorie der complexen Zahlensysteme* [Teoria dei sistemi di numeri complessi] (Voss, Lipsia 1867) § 14.

161. **Motivo dei fallimenti è una falsa posizione del problema. Classe. Quali proprietà deve possedere una classe per essere un dominio di grandezze?** La ragione di questi insuccessi risiede in un'errata impostazione del problema. Esistono tipi di grandezze molto diversi: lunghezze, grandezze angolari e temporali, masse, temperature ecc., e sarà appena possibile indicare in che cosa gli enti appartenenti a questi tipi di grandezze si distinguano dagli oggetti che non appartengono a un tipo di grandezza. Anche con ciò si otterrebbe ben poco; infatti mancherebbe ancora ogni mezzo con cui riconoscere quali di queste grandezze appartengano allo stesso dominio quantitativo.

Invece di chiedere: quali proprietà deve possedere un oggetto per essere una grandezza? si deve chiedere: di che natura deve essere un concetto affinché la sua estensione sia un dominio quantitativo? [1] Per brevità vogliamo ora dire "*classe*" invece di "estensione di un concetto". Allora la domanda si può anche porre in questi termini: quali proprietà deve avere una classe per essere un dominio quantitativo? Una cosa non è una grandezza in sé, isolatamente, ma solo in quanto appartiene con altri oggetti a una classe che è un dominio quantitativo.

[1] Otto Stolz prende questa direzione, quando, nell'opera già citata, scrive: "... Cosí, un concetto quantitativo sarà un concetto tale che due qualunque delle cose contenute sotto di esso sono spiegate o come uguali o come disuguali." In effetti in questa proposizione si compie il tentativo di precisare le qualità desiderate di un concetto, cui sopra accennavo; ma nella proposizione immediatamente seguente: "In altre parole: 'Si chiama grandezza ogni cosa che deve venir posta uguale o disuguale a un'altra'", questo tentativo viene lasciato di nuovo cadere. Se per un concetto l'essere quantitativo dipendesse dall'essere spiegato, allora esso sarebbe quantitativo da un certo momento in poi, prima di quel momento no. Per decidere la questione tendente a stabilire se in un dato istante un concetto fosse o no quantitativo, dovrebbero venir istituite caso per caso difficili ricerche storiche. A ciò si aggiunge quanto segue. O le parole "uguale" e "disuguale" hanno già in precedenza un significato noto, e in questo caso la questione se certe cose siano uguali o disuguali non può piú essere oggetto della spiegazione; oppure queste parole non sono note in precedenza, e allora per esse si possono assumere parole configurate in modo del tutto arbitrario, per esempio "azig", "bezig": abbiamo però già visto che, cosí facendo, nulla può venir determinato con maggiore approssimazione. Forse si ritiene possibile ancora un terzo caso e cioè che finora le parole "uguale" e "disuguale" non siano né completamente note, né del tutto incognite, in quanto si conoscono certe proprietà dei loro significati. Ma prima di poter parlare in generale dei significati di queste parole, essi debbono essere completamente determinati, e solo allora ha senso chiedersi se questi significati hanno le proprietà desiderate. Ma spiegazioni siffatte non possono assolutamente decidere se un concetto sia o no quantitativo. O un concetto è quantitativo, e allora lo è indipendentemente da ogni spiegazione di "uguale" e "disuguale"; oppure esso non è quantitativo e anche in questo caso indipendentemente da una spiegazione siffatta. Tale spiegazione stabilisce soltanto una connessione fra le anzidette parole e i significati che esse debbono avere; la sua azione non va oltre a questo. Noi dobbiamo avere estremamente chiaro il fatto che una spiegazione non può mai cambiare alcunché nella cosa stessa, e che essa può solo riguardare la nostra denominazione o la nostra denotazione.

162. OSSERVAZIONE DI GAUSS. RELAZIONE. IL DOMINIO DI GRANDEZZE COME UNA CLASSE DI RELAZIONI Poiché innanzi tutto dobbiamo solo occuparci di ottenere un fondamento per la teoria dei numeri reali, vogliamo facilitarci la cosa non prendendo in considerazione le grandezze assolute e tenendo presenti solo quei domíni quantitativi nei quali valga un'antitesi cui corrisponde, per i numeri-misura, quella del positivo e del negativo. E per questo può venirci in aiuto la seguente osservazione di Gauss:[1]

"I numeri positivi e negativi possono trovare un'applicazione soltanto dove il numerato ha un opposto, ha cioè un qualcosa che, se lo pensiamo unito al primo, va posto uguale all'annullamento. Esaminata bene, quest'ipotesi ha luogo soltanto ove i numerati non sono sostanze (oggetti pensabili in sé) ma relazioni fra due oggetti qualunque. In tal caso si postula che questi oggetti siano ordinati in una successione in un determinato modo, per esempio A, B, C, ... e che la relazione che intercorre fra A e B possa venir considerata uguale a quella che intercorre fra B e C ecc. Qui, al concetto di opposizione, corrisponde semplicemente lo scambio dei termini della relazione, cosicché, se la relazione (o il passaggio) di A a B vale come $+1$, la relazione di B ad A deve venir rappresentata come -1. Quindi, se una successione siffatta è illimitata nei due sensi, ogni numero reale rappresenta la relazione di un termine arbitrario, scelto come termine iniziale, a un determinato termine della successione".

Possiamo essenzialmente concordare con questi pensieri, tuttavia lasciamo cadere la limitazione ai numeri interi, e, invece de "il numerato", diciamo preferibilmente "il misurato". Gauss sembra pensare le relazioni come determinate dagli oggetti fra i quali esse intercorrono, e ha bisogno di un postulato sull'eguaglianza delle relazioni. Noi, al contrario, consideriamo la relazione come definibile senza che si debba ricorrere a oggetti determinati che stanno in tale relazione, cosicché col riconoscere in generale una relazione, non è ancor detto affatto che esistano oggetti i quali stanno in quella relazione. Ora, se è data una relazione nella quale A sta a B, con ciò è contemporaneamente deciso se B sta a C e C a D in questa stessa relazione, col che viene dato di

[1] K. F. GAUSS, *Werke* [Opere], vol. 2, p. 176.

per sé un ordinamento di oggetti in una successione. Certamente non ogni relazione produrrà una successione estendentesi all'infinito; di conseguenza non ogni relazione è utilizzabile per i nostri scopi. L'indagine seguente deve insegnarci quali siano le necessarie limitazioni.

Se per brevità diciamo "Relazione" invece di "estensione di una relazione", possiamo dire: le grandezze che noi dobbiamo considerare sono Relazioni. Riguarderemo di conseguenza i rapporti di grandezze o numeri reali come Relazioni di Relazioni. I nostri domíni quantitativi sono classi di Relazioni, e precisamente estensioni di concetti subordinati al concetto "Relazione". Al cambiamento di segno corrisponderà l'inversione della relazione (K e $\mathfrak{P}K$). All'addizione dei numeri-misura corrisponderà la composizione delle Relazioni ($K \sqcup \Pi$). Di conseguenza il segno "$\mathfrak{P}$" sarà paragonabile al segno meno e il segno "$\sqcup$" al segno piú; la formula "$A \sqcup \mathfrak{P}B$" corrisponderà alla "$a - b$" e la "$A \sqcup \mathfrak{P}A$" corrisponderà al segno zero.

163. Esempio: relazione di distanza A titolo d'esempio prendiamo come oggetti i punti di una retta. Fra questi intercorrono relazioni di distanza. Ad esempio il punto B dista dal punto A di un certo segmento orientato (per esempio verso destra). Se il punto D dista altrettanto da C e nello stesso senso, allora C sta a D nella stessa relazione in cui A sta a B. Evidentemente la Relazione di distanza di B ad A è l'inversa di quella di A a B. Perciò l'inversione di una Relazione di distanza corrisponde all'inversione del senso. Inoltre si vede immediatamente che la composizione di tali Relazioni di distanza coincide con l'addizione geometrica dei segmenti.

164. Provvisorio indebolimento della nostra riflessione del paragrafo 159 Possiamo ora approfondire la questione già sollevata nel paragrafo 159: donde prendiamo le grandezze i cui rapporti sono numeri irrazionali? Esse saranno Relazioni; e non possono essere Relazioni vuote, ossia non possono essere estensioni di relazioni tali che non esistano oggetti che stanno in queste relazioni. Infatti relazioni siffatte hanno la stessa e medesima estensione; esiste solo un'unica Relazione vuota. Con essa non potremmo definire alcun numero reale. Se q è la Relazione vuota, $\mathfrak{P}q$ lo è altrettanto e anche $q \sqcup \mathfrak{P}q$ coin-

cide con essa. Neppure la composizione delle Relazioni del nostro dominio quantitativo può dare come risultato la Relazione vuota; questo però avverrebbe se non esistesse alcun oggetto rispetto al quale un secondo oggetto stesse nella prima Relazione e che a sua volta stesse rispetto a un terzo oggetto nella seconda Relazione.

Abbiamo quindi bisogno di una classe di oggetti fra i quali intercorrano le Relazioni del nostro dominio quantitativo, e precisamente questa classe deve comprendere infiniti oggetti. Ora, al concetto *numero naturale finito,* compete un numero non finito che noi abbiamo chiamato infinito. Se noi chiamiamo *classe di numeri naturali finiti* l'estensione di un concetto subordinato al concetto *numero naturale finito,* allora al concetto *classe di numeri naturali finiti* spetta un numero non finito che è maggiore dell'infinito; ossia il concetto *numero naturale finito* si può rappresentare nel concetto *classe di numeri naturali finiti,* ma non viceversa questo in quello.

Ora dovremmo appunto dimostrare che esistono, fra le classi di numeri naturali finiti, Relazioni le quali possono essere concepite come appartenenti a un dominio quantitativo. Certamente, come vedremo subito, la cosa può mettersi ancora sotto un aspetto leggermente diverso.

Supponiamo, per il momento, di conoscere i numeri irrazionali! Ogni numero positivo a può essere denotato nella forma

$$\text{``}r + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{2^{n_k}}\right\}\text{''}$$

dove "r" è un numero intero positivo o nullo e "n_1", "n_2", ecc. sono numeri interi positivi, che possiamo supporre in numero infinito. In questo modo, a ogni numero positivo, razionale o irrazionale, a, è associata una coppia il cui primo termine (r) è un numero intero positivo o nullo, e il cui secondo termine è una classe di numeri interi positivi (classe degli n_k). Invece dei numeri interi possiamo prendere anche i numeri naturali, cosicché ora a ogni numero reale positivo viene associata una coppia il cui primo termine è un numero naturale e il cui secondo termine è una classe di numeri naturali che non contiene lo $\emptyset$. Se ora a, b, e c sono numeri positivi, ed è $a+b=c$, per ogni b sussiste una relazione fra le coppie associate ad a e a c. E si può definire questa relazione senza ricorrere ai numeri reali a, b, c, quindi senza ipotiz-

zare la conoscenza dei numeri reali. Cosí abbiamo relazioni, ognuna delle quali è di nuovo indicata per mezzo di una coppia (quella associata a *b*). Fra esse rientrano ancora le relazioni inverse. Le estensioni di queste relazioni (queste Relazioni) corrispondono univocamente ai numeri positivi e negativi. All'addizione dei numeri *b* e *b'* corrisponde la composizione delle Relazioni associate. La classe di queste Relazioni è ora un dominio che è sufficiente al nostro programma. Questi accenni possono provvisoriamente bastare a eliminare il dubbio circa l'eseguibilità del programma. Il che non significa che ci atterremo strettamente a questa via. Ancora su due punti vorrei richiamare in particolare l'attenzione. Primo: né le classi di numeri naturali finiti, né le coppie menzionate, né le Relazioni fra queste coppie sono numeri irrazionali. E tanto meno esse sono segni di numeri irrazionali; esse non sono figure generate scrivendo o stampando; ma sono semplicemente classi, coppie, Relazioni. Secondo: le relazioni menzionate fra le coppie si possono definire senza supporre nota la connessione coi numeri irrazionali, dalla quale noi abbiamo preso le mosse per ottenere una maggiore comprensione. Nell'esecuzione del nostro programma non potremo quindi assolutamente parlare, in un primo momento, di numeri irrazionali; ma prenderemo le mosse da classi di numeri naturali finiti, fra le quali definiremo certe relazioni senza minimamente accennare con questo a una connessione con l'addizione dei numeri reali. Cosí facendo riusciremo a definire i numeri reali in modo puramente aritmetico o logico, come rapporti di grandezze che si possono dimostrare esistenti, cosicché non può rimanere alcun dubbio che esistano numeri irrazionali.

Per prima cosa però dobbiamo rispondere alla domanda: Quali proprietà deve avere una classe di Relazioni per essere un dominio quantitativo?

La teoria delle grandezze.

165. Analisi La delimitazione di un dominio quantitativo scaturisce dall'esigenza che per l'addizione valgano quelle leggi essenziali note sotto il nome di principio commutativo e principio associativo. La domanda quindi va posta in questi termini: quali proprietà deve avere

una classe di Relazioni, affinché in essa valgano, per la composizione delle Relazioni, la legge commutativa e la legge associativa? Per quanto concerne quest'ultima, si dimostra che essa vale in generale, sicché non ci produce alcuna determinazione piú stretta per il nostro dominio quantitativo Per dimostrare ciò abbisognamo di alcune proposizioni sull'uguaglianza di Relazioni, proposizioni che deriviamo preliminarmente.

[Il paragrafo successivo è dedicato alla derivazione ideografica delle proposizioni or ora menzionate, cui segue la preannunciata dimostrazione della legge associativa per la composizione di Relazioni. Indi Frege si accinge a una dimostrazione analoga della legge commutativa. Si limita dapprima a dimostrarla per la composizione di Relazioni che appartengono a una successione del tipo K, $K \sqcup K$, $K \sqcup (K \sqcup K)$...]

173. Analisi La proposizione (501)[1] contiene la legge commutativa per la composizione di Relazioni che appartengono a una successione del tipo

$$K, K \sqcup K, K \sqcup (K \sqcup K), \ldots$$

Con ciò possiamo riguardare la classe degli elementi di questa successione come un dominio quantitativo, e possiamo definire tutti i numeri razionali positivi come rapporti di due grandezze di un siffatto dominio quantitativo. Sarebbe facile introdurre i numeri razionali negativi, prolungando la successione in senso inverso oltre il termine iniziale. Tuttavia la difficoltà principale risiede negli irrazionali. Questi possono essere ottenuti soltanto come limite; e per definire il limite abbiamo bisogno della relazione del maggiore al minore. Nel nostro caso una relazione siffatta si presenta da sé, ed è precisamente quella del susseguirsi nella nostra successione. Questa relazione però non ci serve per Relazioni che non appartengano alla successione. Sarà dunque necessario porre a una relazione ben determinate condizioni, che debbono essere soddisfatte affinché si possa concepirla come relazione del maggiore al minore: il susseguirsi nella nostra successione deve apparire come caso parti-

[1] [La (501) ha la forma seguente:

$$p \sqcup q = q \sqcup p$$
$$t \frown (p \frown \smile_* t)$$
$$t \frown (q \frown \smile_* t)$$

In essa $_*t$ è appunto il simbolo di una successione di relazioni del tipo ora accennato.]

colare di questa relazione.[1] In tal caso si può impiegare una relazione siffatta per delimitare il dominio quantitativo, dicendo: appartengono al dominio quantitativo tutte le Relazioni che stanno rispetto a una e una stessa Relazione in questa relazione. Tuttavia è molto piú opportuno ricondurre al positivo la relazione del maggiore al minore. Il positivo infatti si può spiegare o come ciò che è maggiore della grandezza nulla, oppure si può dire: a verrà detto maggiore di b se la Relazione composta da a e dall'inverso di b è positiva. Non possiamo parlare semplicemente della classe del positivo con l'articolo determinativo poiché in ogni dominio quantitativo esisterà una classe di questo tipo. La parola "*classe positiva*" sarà per noi piuttosto un nome di concetto, e noi poniamo la questione nel modo seguente: quali proprietà deve avere una classe, per poter valere come classe positiva? Se poi abbiamo una classe positiva, siamo facilmente in grado di delimitare il dominio quantitativo corrispondente. A esso appartiene ogni Relazione tale che: o essa appartiene alla classe positiva, o è l'inversa di una Relazione appartenente a una classe positiva, oppure risulta dalla composizione di una Relazione appartenente alla classe positiva con la sua inversa (grandezza nulla).

175. Analisi Quand'è, dunque, che una classe è positiva? Se il dominio quantitativo corrispondente deve essere continuo, deve aver luogo quanto segue. Se una grandezza di questa dominio ha una proprietà Φ, che spetta anche a tutte le grandezze minori, mentre in questo dominio esiste anche una grandezza che non ha la proprietà Φ, allora in questo dominio deve esistere un limite superiore di tutte le grandezze aventi la proprietà Φ; vale a dire deve esistere una grandezza tale che tutte le grandezze minori di essa abbiano la proprietà Φ, mentre invece ogni grandezza maggiore è maggiore di almeno una grandezza che non ha la proprietà Φ. Ciò tuttavia è soltanto approssimativo. Come si vede, per la definizione del limite facciamo uso di una relazione del minore al maggiore che volevamo spiegare con la classe positiva. Non giungeremo quindi allo scopo con un passo solo: prima di definire il

[1] [Si noti che la grande generalità delle macchinose considerazioni freghiane a questo proposito è diretta conseguenza delle stipulazioni stabilite nel primo principio del definire o principio della completezza.]

concetto di classe positiva stabiliamo un concetto piú ampio — che vogliamo chiamare *classe positivale* — col quale possiamo definire il limite superiore. Con questo ulteriore concetto giungeremo poi alla classe positiva.

Le determinazioni che in un primo momento ci interessano sono le seguenti:

Ciò che appartiene a una classe positivale deve essere una Relazione univoca assieme alla sua inversa. La Relazione composta da una Relazione siffatta e dalla sua inversa non può, come grandezza nulla, appartenere alla classe positivale. Inoltre, se due Relazioni appartengono a una medesima classe positivale, a essa deve appartenere anche la Relazione che risulta dalla loro composizione (come loro somma), e la Relazione composta dalla prima e dall'inversa della seconda deve appartenere (come loro differenza) al dominio quantitativo della classe positivale. La stessa cosa deve valere per la Relazione composta dall'inversa della prima e dalla seconda.

Se Γ sta nella Relazione Π con un certo oggetto, diremo che *Γ figura come primo termine della Relazione Π*; e se un certo oggetto sta con Δ nella Relazione Π diciamo che *Δ figura come secondo termine della Relazione Π*. Per ogni Relazione esiste una prima classe di oggetti che possono comparire come primi termini della Relazione, e una seconda classe di oggetti che possono comparire come secondi termini della Relazione. Orbene, noi richiediamo che se le Relazioni Π e K appartengono alla stessa classe positivale, la prima classe associata a Π coincida con la seconda classe associata a K. Col che si dice anche che la prima classe associata a Π, coincide con la seconda. Quindi, per ogni classe positivale Σ, esiste un'unica classe di oggetti che possono comparire tanto come primi quanto come secondi termini di ogni Relazione che appartiene a Σ.

[Data la definizione simbolica di classe positivale, Frege passa a dimostrare alcune proposizioni relative alla classe stessa (esistenza di una e una sola Relazione nulla; tale Relazione nulla è elemento indifferente rispetto alla composizione di Relazioni della classe, e simili). Stabilisce inoltre che se due Relazioni Π e K appartengono al dominio di una stessa classe positivale Σ, si dirà $\Pi > K$ se la composizione di Π con l'inversa $\mathfrak{P}K$ di K appartiene alla classe Σ. Dà quindi la seguente definizione di limite superiore in una classe positivale.]

193. ANALISI Vogliamo ora definire il limite superiore in una classe positivale, come è indicato nel paragrafo 175. Invece di "limite superiore di quelle Relazioni in una classe positivale Σ che appartengono una classe Φ", diremo piú brevemente:

"Σ-limite di Φ".

Orbene, quando diciamo che Δ è un Σ-limite di Φ? Ciò richiede:
1) che Σ sia una classe positivale;
2) che Δ appartenga alla Σ-classe;
3) che ogni Relazione appartenente alla Σ-classe e minore di Δ, appartenga alla classe Φ;
4) che tutte le Relazioni in Σ che sono maggiori di Δ, siano maggiori di almeno una Relazione in Σ che non appartiene alla classe Φ.

[La definizione in simboli del concetto di limite superiore su espresso, non fa che tradurre simbolicamente le proprietà su elencate. Come al solito, Frege occupa i successivi paragrafi nella derivazione di proposizioni che esprimono proprietà relative al concetto prima definito (nel nostro caso, per esempio: il Σ-limite di una classe è unico ecc.). Può finalmente precisare quali proprietà caratterizzano una classe positiva.]

197. ANALISI Nel paragrafo 175 ci siamo posti la domanda: quand'è che una classe è una classe positiva? A questa domanda non è ancora stato risposto. Allora ci vedemmo costretti a definire il concetto piú ampio di classe positivale. Dopo che, con essa, abbiamo definito il Σ-limite di una classe, possiamo finalmente rispondere a quella domanda. Affinché una classe Σ sia una *classe positiva* essa deve avere le seguenti proprietà:
1) deve essere una classe positivale;
2) per ogni Relazione che le appartenga deve esisterne un'altra, minore della prima, e che ugualmente le appartiene;
3) se esiste una Relazione della classe Σ tale che in Σ tutte le relazioni a essa minori appartengano a una classe Φ, mentre in Σ esiste una Relazione che non appartiene alla classe Φ, allora deve esistere un Σ-limite della classe Φ.

[Raggiunto cosí lo scopo di caratterizzare il concetto "classe positiva", per poter soddisfare con esso alla domanda postasi alla fine del paragrafo 164, Frege deve

dimostrare che in una classe positiva vale la legge commutativa per la composizione delle Relazioni a essa appartenenti. Prima però di accingersi a tale dimostrazione, egli si preoccupa di stabilire la validità, per queste classi, dell'assioma di Archimede, ossia deriva la proposizione: "Se due Relazioni appartengono alla stessa classe positiva, allora esiste un multiplo dell'una che è non minore dell'altra". Per "multiplo" di una Relazione K va inteso ovviamente uno qualunque dei termini della successione

$$K, K \sqcup K, K \sqcup (K \sqcup K), \ldots$$

Frege si accinge finalmente a dimostrare la legge commutativa. Spezza questa dimostrazione in due momenti principali: prima mostra che essa vale per gli elementi di una classe positiva, successivamente che è altrettanto valida per l'intero dominio quantitativo di una classe positiva. Cosí si è ottenuta una risposta per la domanda: quali proprietà deve avere una classe di Relazioni per essere un dominio quantitativo? Questa risposta sarà: essa deve essere una classe positiva.]

245. IL PROSSIMO COMPITO Il compito immediatamente seguente sarà quello di dimostrare, come accennato al paragrafo 164, che esiste una classe positiva. Con ciò sarà offerta la possibilità di definire il numero reale come rapporto di grandezze di un dominio associato e una classe positiva. Allora potremo anche dimostrare che i numeri reali stessi, come grandezze, appartengono al dominio di una classe positiva.

segue parte quinta

Nota finale

ai *Principi dell'aritmetica* (volume secondo)

[Il 16 giugno 1902 Bertrand Russell indirizzava a Gottlob Frege una breve lettera con la quale lo informava dell'antinomia derivabile nel sistema logico dei *Princìpi*; essa metteva in dubbio la possibilità di considerare per un qualunque concetto l'estensione corrispondente, e colpiva direttamente il quinto postulato del sistema freghiano. Tale postulato — come specificheremo meglio in nota alla traduzione — può considerarsi composto da due proposizioni — indicate da Frege come Va e Vb — la seconda delle quali veniva ora a perdere validità generale.

La scoperta di Russell, se da una parte apre ufficialmente quell'importante capitolo della matematica moderna che va sotto il nome di "crisi dei fondamenti", dall'altra segna praticamente l'abbandono dell'attività scientifica da parte di Frege. Sarebbe inesatto affermare che questi *cessò* la sua produzione; ché anzi, nel dare comunicazione dell'antinomia egli si impegna anche nel tentativo di eliminarla; ma è fuori dubbio che i suoi lavori successivi perdono di fatto ogni rilevanza e non fanno che ripetere, pur se con maggiore cautela, temi ormai ampiamente e compiutamente trattati in opere precedenti.

Per quanto riguarda la tentata "via d'uscita" cui abbiamo or ora accennato, Frege cerca con essa di porre riparo alla falla apertasi nel suo sistema limitandosi semplicemente a eliminare quegli elementi che in base alla comunicazione di Russell davano luogo a conclusioni antinomiche; in altre parole, egli attenua la generalità del suo quinto postulato dandogli forma di implicazione le cui premesse traducono appunto l'esclusione di quei particolari elementi. Frege quindi non affronta il problema generale delle antinomie, che investiva l'impostazione stessa della teoria ingenua degli insiemi allora accettata; si accontenta di tracciare una "linea di soluzione" immediatamente applicabile al suo proprio sistema. Va notato peraltro che — come riferito da Sobocinski [1] — Lesniewski riuscí a dimostrare, nel 1938, che era illusorio cercare una soluzione seguendo la via indicata da Frege, dal momento che essa conduceva a una nuova contraddizione. Si consulti anche in proposito il paragrafo 11 dell'introduzione al presente volume.

Alla prima comunicazione di Russell fece seguito uno scambio epistolare fra i

[1] [B. Sobocinski, *L'analyse de l'antinomie russellienne par Lesniewski* [L'analisi dell'antinomia di Russell condotta da Lesniewski], Methodos, 94-107, 220-28, 237-57, 308-16 (1949).]

due scienziati, che si protrasse fino al dicembre del 1904. La corrispondenza Frege-Russell però, pur contenendo ovviamente un preciso riferimento all'antinomia, non ne offre un'analisi di interesse particolare; il suo contenuto al riguardo è praticamente riassunto da Frege nelle prime pagine dell'epilogo. Purtuttavia, il logico tedesco, rispondendo alle richieste di Russell (che stava preparando la nota appendice dei suoi *Principles* [1] dedicata appunto all'opera di Frege) fornisce sottilissime delucidazioni su alcuni fra i piú importanti temi del suo pensiero, in particolare sulla distinzione fra senso e significato. A quanto comunicatoci dal professor Hermes, dell'Università di Münster, la pubblicazione del carteggio in questione è molto prossima.

L'epilogo è stato tradotto integralmente. La sua lettura richiede senza dubbio molto impegno: il lettore che voglia seguire i singoli passaggi delle varie derivazioni potrà valersi della presentazione sistematica che del simbolismo freghiano viene fatta nell'introduzione al nostro volume. Abbiamo comunque illustrato, a titolo d'esempio, le prime due formule.]

A uno scrittore di scienza ben poco può giungere piú sgradito del fatto che, dopo completato un lavoro, venga scosso uno dei fondamenti della sua costruzione.

Sono stato messo in questa situazione da una lettera del signor Bertrand Russell, quando la stampa di questo volume stava per essere finita. Si tratta del mio principio (V).[2] Non mi sono mai nascosto che

[1] [B. RUSSELL, *The Principles of Mathematics* (Londra 1903); trad. it. di L. Geymonat (Longanesi, Milano, 2ª ed. 1963).]

[2] [Nel simbolismo di Frege tale principio assume la forma seguente

$$\Vdash\!\!-\!\!-\,(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)) = (-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}-f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))\,.$$

Esso afferma che il decorso di valori di due funzioni è uguale se e solo se esse, qualunque sia lo argomento, assumono lo stesso valore per lo stesso argomento; in altri termini, esso permette di compiere tanto il passaggio dall'uguaglianza di decorsi di valori alla generalità di un'uguaglianza, quanto il passaggio inverso.

Il principio V può considerarsi la congiunzione logica delle due proposizioni Va e Vb. La prima di queste, in simboli

$$\text{Va} \qquad \Vdash\!\!\begin{array}{l} \!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\,F(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)) = F(\grave{\alpha}g(\alpha)) \\ \;\llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}-f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}) \end{array}$$

afferma che se due funzioni assumono lo stesso valore per lo stesso argomento, qualunque sia l'argomento, allora esse hanno anche lo stesso decorso di valori; la seconda, in simboli

$$\text{Vb} \qquad \Vdash\!\!\begin{array}{l} \!\!-\!\!-\!\!-\,f(a) = g(a) \\ \;\llcorner\!-\!-\,\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha) \end{array}$$

esprime l'affermazione inversa, ossia stabilisce che se due funzioni hanno lo stesso decorso di valori, allora esse, qualunque sia l'argomento, assumono lo stesso valore per lo stesso argomento.

In termini di concetto, l'assioma quinto afferma che due concetti hanno uguale estensione se e

esso non è cosí evidente come tutti gli altri e come propriamente si deve esigere da una legge logica. E infatti ho accennato a questa debolezza anche a pagina VII della prefazione al primo volume.[1] Avrei volentieri rinunciato a questo fondamento se avessi saputo come sostituirlo. E ancora adesso non comprendo come l'aritmetica possa venir fondata scientificamente, e come i numeri possano venir afferrati e inseriti nella trattazione quali oggetti logici, se non è permesso — almeno in modo condizionale — passare da un concetto alla sua estensione. Posso parlare in ogni caso dell'estensione di un concetto, ossia posso in ogni caso parlare di una classe? E se no, in che modo si riconoscono i casi che fanno eccezione? Dal fatto che l'estensione di un concetto coincide con quella di un altro, si può sempre concludere che ogni oggetto che cade sotto il primo concetto, cade pure sotto il secondo? Tali questioni vengono sollevate dalla comunicazione di Russell.

Solatium miseris, socios habuisse malorum. Questo conforto, se conforto è, soccorre anche me; infatti tutti coloro che nelle loro dimostrazioni hanno fatto uso di estensioni concettuali, classi, insiemi [2] sono nella mia stessa situazione. Qui non è in causa il mio metodo di fondazione in particolare, ma la possibilità di una fondazione logica dell'aritmetica in generale.

Ma veniamo al fatto! Il signor Russell ha scoperto una contraddizione che ora esporrò.

Nessuno vorrà asserire, della classe degli uomini, che essa è un uomo. Abbiamo qui una classe che non appartiene a sé stessa. Dico infatti che qualcosa appartiene a una classe, se questo qualcosa cade sotto un concetto, la cui estensione è proprio la classe stessa. Fissiamo ora il concetto: *classe che non appartiene a sé stessa*! L'estensione di questo concetto, ammesso che se ne possa parlare, è, per quanto detto, la classe delle classi che non appartengono a sé stesse. Vogliamo chia-

solo se sotto di essi cadono gli stessi oggetti.

Come Frege dimostrerà piú avanti, l'argomentazione di Russell fa cadere in difetto la proposizione Vb (il che ovviamente comporta la non validità della V), ma non la Va.]

[1] [Nel luogo citato Frege afferma, infatti: "... A quanto mi è dato vedere, una questione può sorgere soltanto a proposito del mio principio V, o principio del decorso di valori che forse non è ancora stato espresso esplicitamente dai logici, malgrado si pensi proprio a esso quando, ad esempio, si parla di estensioni concettuali. Io ritengo quel principio puramente logico. Comunque sia, con ciò viene indicato il luogo dove deve cadere la decisione..."]

[2] Anche i sistemi di Dedekind rientrano fra essi.

marla brevemente la classe *K*. Chiediamoci ora se questa classe *K* appartenga a sé stessa! Supponiamo in primo luogo che essa appartenga a sé stessa! Se qualcosa appartiene a una classe, cade sotto il concetto la cui estensione è la classe in esame, di conseguenza, se la nostra classe appartiene a sé stessa, allora essa è una classe che non appartiene a sé stessa. La nostra prima supposizione conduce quindi a una contraddizione. Supponiamo, in secondo luogo, che la nostra classe *K* non appartenga a sé stessa: in questo caso essa cade sotto il concetto di cui essa stessa rappresenta l'estensione, quindi appartiene a sé stessa. Qui di nuovo abbiamo una contraddizione!

Che posizione assumere a questo riguardo? Dobbiamo supporre che per le classi non valga la legge del terzo escluso? Oppure dobbiamo supporre che esistano casi, nei quali a un inoppugnabile concetto non corrisponda alcuna classe quale sua estensione? Nel primo caso ci vedremo costretti a negare alle classi l'oggettività completa. Infatti, se le classi fossero oggetti veri e propri, per esse dovrebbe valere la legge del terzo escluso. D'altra parte, le classi non hanno nulla di insaturo, di predicativo, col che esse sarebbero se mai caratterizzate come funzioni, concetti, relazioni. Ciò che siamo abituati a considerare come nome di una classe, per esempio "la classe dei numeri primi", ha piuttosto l'essenza di un nome proprio, non può comparire predicativamente, bensí come soggetto grammaticale di una proposizione particolare, per esempio "La classe dei numeri primi comprende infiniti oggetti". Se noi volessimo negare validità alla legge del terzo escluso per le classi, potremmo pensare di concepire le classi — e, anzi, i decorsi di valori in generale — come oggetti impropri. Esse allora non potrebbero comparire quali argomenti per tutte le funzioni di primo grado. Esisterebbero però anche funzioni suscettibili di avere come argomenti tanto oggetti veri e propri quanto anche oggetti impropri. Di questo tipo sarebbe perlomeno la relazione dell'uguaglianza (identità). Si potrebbe tentare di sfuggire all'inconveniente, ipotizzando un tipo particolare di uguaglianza per gli oggetti impropri. Ma ciò è del tutto escluso. L'identità è una relazione cosí ben determinata che non è dato vedere come per essa possano sussistere tipi diversi.[1] Ora, però, ne risulterebbe una

[1] [Ricordiamo che per Frege l'identità (il coincidere completo) è il significato dell'uguaglianza.]

grande varietà di funzioni di primo grado, e precisamente, in primo luogo si avrebbero funzioni che potrebbero avere come argomenti solo oggetti veri e propri, in secondo luogo funzioni che potrebbero avere come argomenti tanto oggetti veri e propri quanto oggetti impropri, e infine anche funzioni che potrebbero avere come argomenti solo oggetti impropri. Un'ulteriore suddivisione risulterebbe dai valori delle funzioni. In base a quanto detto dovremmo distinguere funzioni che avrebbero come valori solo oggetti veri e propri, in secondo luogo funzioni che avrebbero come valori tanto oggetti veri e propri quanto anche oggetti impropri, e infine funzioni che avrebbero come valori solo oggetti impropri. Entrambe le suddivisioni delle funzioni di primo grado sussisterebbero contemporaneamente, cosicché si otterrebbero nove tipi. A questi corrisponderebbero a loro volta nove tipi di decorsi di valori, oggetti impropri, che dovrebbero venire logicamente distinti gli uni dagli altri. Le classi di oggetti veri e propri dovrebbero venir distinte dalle classi di classi di oggetti veri e propri, le relazioni fra oggetti veri e propri dalle classi di oggetti veri e propri, dalle classi di relazioni fra oggetti veri e propri e cosí via. Otterremmo a questo modo una interminabile varietà di tipi; e, in generale, oggetti appartenenti a due diversi di questi tipi, non potrebbero comparire quali argomenti della stessa funzione. Sembra però oltremodo difficile stabilire un completo sistema di leggi mediante le quali poter decidere in generale quali oggetti sarebbe lecito assumere come argomenti di quali funzioni. Inoltre può essere messa in dubbio la legittimità degli oggetti impropri.[1]

Se queste difficoltà ci scoraggiano dal concepire le classi, e con esse i numeri, come oggetti impropri; ma se d'altra parte non vogliamo riconoscere questi enti come oggetti veri e propri, precisamente tali che possano comparire quali argomenti di ogni funzione di primo grado; allora evidentemente non rimane altra via che considerare i nomi delle classi come nomi propri apparenti, i quali perciò non avrebbero in verità alcun significato. Essi dovrebbero allora venir riguardati come parti di segni, i quali avrebbero un significato solo se presi nella loro

[1] [La discussione qui svolta circa la possibilità di considerare le classi come oggetti impropri riproduce sostanzialmente le obiezioni mosse da Frege alla proposta in tal senso formulatagli da Russel nel corso del loro carteggio.]

totalità.[1] Si può invero stimare vantaggioso, per un certo scopo, costruire segni diversi che abbiano una parte identica, senza considerarli in base a ciò come segni composti. Perché un segno sia semplice, infatti, si richiede soltanto che le parti, che eventualmente si possono distinguere nel segno stesso, non abbiano un significato se prese singolarmente.[2] Anche ciò che siamo abituati a concepire come segno di un numero, non sarebbe allora propriamente un segno, ma la parte non indipendente di un segno. Sarebbe impossibile una spiegazione del segno "2"; invece di esso si dovrebbero spiegare molti segni che contengono "2" come parte costitutiva non indipendente, ma che da un punto di vista logico non si dovrebbero pensare come composti dal segno "2" e da un'altra parte. Non sarebbe allora lecito far rappresentare da una lettera una di tali parti non indipendenti, poiché, rispetto al contenuto, non esisterebbe proprio alcuna connessione. Con questo andrebbe perduta la generalità delle proposizioni aritmetiche; e neppure si comprenderebbe come da questo punto di vista, si potrebbe parlare di un numero di classi, di un numero di numeri.

Io penso: tutto ciò è sufficiente per fare apparire impraticabile anche questa via. Non rimane quindi proprio altro che riconoscere le estensioni concettuali o classi come oggetti nel vero e pieno significato di questa parola, concedendo però nello stesso tempo che la concezione fino a oggi accettata dell'espressione "estensione di un concetto" debba essere sottoposta a revisione.

Prima di entrare nei dettagli di tale revisione, sarà utile indagare col nostro simbolismo il comparire della contraddizione su riferita. Il fatto che Δ è una classe che non appartiene a sé stessa, possiamo esprimerlo cosí: [3]

$$\top\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{g}(\Delta) \\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \Delta \end{array}$$

[1] Si confronti per questo il primo volume (§ 29).

[2] [Si vedano i princìpi del definire (in particolare il secondo) stabiliti da Frege nel secondo volume dei *Princìpi*, e da noi riportati nel primo capitolo di questa quinta parte.]

[3] [Come avevamo annunciato nella premessa, allo scopo di assicurare a questo epilogo una certa autonomia rispetto alla descrizione del simbolismo svolta in generale nell'appendice all'introduzione del presente volume, diamo il significato delle due prime formule. La prima afferma:

Non per ogni *g*, se Δ è l'estensione di un concetto $g(\xi)$, allora Δ cade sotto *g*. (Ricordiamo che in notazione freghiana *la* o *le* premesse di un'implicazione vengono scritte inferiormente alla conclusione, la quale occupa sempre la prima riga della formula). Più semplicemente possiamo dire in

E la classe delle classi che non appartengono a sé stesse sarà denotata come segue:

$$\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \top\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \qquad \llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right)$$ [1]

Nella derivazione che segue userò, per tale classe, l'abbreviazione "∀" e tralascerò qui il segno di giudizio, a causa della dubbia verità delle espressioni. Di conseguenza, con

$$\text{“}\begin{array}{l} \top\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{g}(\forall) \\ \qquad \llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \end{array}\text{”}$$

esprimerò che la classe ∀ non appartiene a sé stessa.[2]

Orbene, in base alla (Vb) abbiamo,

$$\begin{array}{l} \top\, (-f(\forall)) = \top\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{g}(\forall) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \\ \llcorner\, \grave{\varepsilon}(-f(\varepsilon)) = \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \top\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \qquad \llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right) \end{array}$$

oppure, utilizzando l'abbreviazione e applicando la (IIIa),[3]

$$\begin{array}{l} \top\!\!\!\top\, f(\forall) \\ \quad \llcorner\, \grave{\varepsilon}(-f(\varepsilon)) = \forall \\ \llcorner\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{g}(\forall) \\ \qquad \llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \end{array} \qquad (\alpha$$

questo caso: Δ è l'estensione di un concetto sotto il quale Δ non cade.

La seconda formula va letta "l'estensione del concetto: oggetto che è l'estensione di un concetto sotto il quale esso non cade".]

[1] Per l'uso delle lettere greche si confronti il primo volume (§ 9). [In tale paragrafo Frege introduce appunto la notazione per i decorsi di valori. Data cioè una funzione $f(\xi)$ (ci limitiamo a un esempio di funzione di primo grado con un argomento) egli stabilisce che la notazione $\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$ ne rappresenti il decorso di valori. In tale paragrafo stabilisce inoltre le modalità di passaggio da una funzione qualunque al corrispondente decorso di valori. Per maggiori dettagli si veda l'introduzione al volume.

[2] [Per un evidente errore di stampa, l'originale porta: *appartiene a sé stessa*. L'errore è già stato notato e corretto nell'edizione inglese del 1952 curata da Peter Geach e Max Black.]

[3] [Tale formula è la seguente $\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\!\top\, f(a) \\ \quad \llcorner\, f(b) \\ \llcorner\, a = b \end{array}$; essa afferma in sostanza che una qualunque funzione assume lo stesso valore per lo stesso argomento.]

Introduciamo ora per "*f*" la "$\mathfrak{g}$" gotica

$$\vdash \neg\,\forall\mathfrak{g}\big(\grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \rightarrow \mathfrak{g}(\forall)\big) \rightarrow \forall\mathfrak{g}\big(\grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \rightarrow \mathfrak{g}(\forall)\big) \qquad (\beta$$

cioè: Se $\forall$ non appartiene a sé stessa allora appartiene a sé stessa. Questo da una parte.[1]

D'altra parte abbiamo, in base alla (IIb),[2]

$$\vdash \forall\mathfrak{g}\big(\grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \rightarrow \mathfrak{g}(\forall)\big) \rightarrow \big(\grave{\varepsilon}(-f(\varepsilon)) = \forall \rightarrow f(\forall)\big) \qquad (\gamma$$

e, se per "$f(\xi)$" prendiamo

$$\text{“}\ \neg\,\forall\mathfrak{g}\big(\grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \xi \rightarrow \mathfrak{g}(\xi)\big)\ \text{”}$$

otteniamo

$$\vdash \forall\mathfrak{g}\big(\grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \rightarrow \mathfrak{g}(\forall)\big) \rightarrow \Big(\grave{\varepsilon}\Big(\neg\,\forall\mathfrak{g}\big(\grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \rightarrow \mathfrak{g}(\varepsilon)\big)\Big) = \forall \rightarrow \neg\,\forall\mathfrak{g}\big(\grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \rightarrow \mathfrak{g}(\forall)\big)\Big) \qquad (\delta$$

e, avuto riguardo alla nostra abbreviazione,

$$\vdash \forall\mathfrak{g}\big(\grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \rightarrow \mathfrak{g}(\forall)\big) \rightarrow \neg\,\forall\mathfrak{g}\big(\grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \rightarrow \mathfrak{g}(\forall)\big) \qquad (\varepsilon$$

[1] [Anche qui, nell'originale, premessa e conclusione sono invertite.]

[2] [La formula in questione è la seguente: $\vdash \forall\mathfrak{f}\, M_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \rightarrow M_\beta(f(\beta))$. Essa esprime: ciò che vale per ogni funzione di primo grado con un argomento vale di una qualunque funzione dello stesso tipo.]

ossia: Se $\forall$ appartiene a sé stessa, allora non appartiene a sé stessa.[1] Da (ε) segue, in base alla (Ig), [2]

$$\begin{array}{l} \top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(\forall) \\ \qquad\;\llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \end{array} \qquad (\zeta$$

e da questa, con (β)

$$\begin{array}{l} -\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(\forall) \\ \qquad\;\llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall \end{array} \qquad (\eta$$

Le proposizioni (ζ) e (η) sono fra loro contraddittorie. L'errore può trovarsi solo nella nostra legge (Vb), che quindi deve essere falsa.

Vogliamo ora vedere che aspetto assume la cosa, se facciamo uso del nostro segno "$\frown$". In luogo di "$\forall$" subentrerà "$\grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon \frown \varepsilon)$".[3] Se nella (82) [4] prendiamo "$\top\, \xi \frown \xi$" per "$f(\xi)$", "$-\,\xi$" per "$F(\xi)$ e "$\grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon \frown \varepsilon)$" per "$a$", otteniamo

$$\begin{array}{l} \top\!\top\, \grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon \frown \varepsilon) \\ \llcorner\, \grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon \frown \varepsilon) \end{array} \qquad (\theta$$

dalla quale, in base a (Ig) segue

$$\top\, \grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon \frown \varepsilon) \qquad (\iota$$

Con la medesima sostituzione otteniamo dalla (77) [5]

$$\begin{array}{l} \top\, \grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon \frown \varepsilon) \\ \top\, \grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon \frown \varepsilon) \end{array} \qquad (\varkappa$$

[1] [Si veda p. 579, n. 2.]

[2] [È la formula $\begin{array}{l} \vdash\!\top\, a \\ \;\;\llcorner\!\top\, a \\ \;\;\;\llcorner\, a \end{array}$; nel nostro simbolismo $(a \to \neg a) \to \neg a$).]

[3] [Il segno $\frown$ è l'equivalente, in simbolismo freghiano, del segno di appartenenza $\in$ di Peano. Frege però l'introduce come una funzione di due argomenti $\xi \frown \zeta$. In questo caso essa ha ε come ξ-argomento e ancora ε come ζ-argomento. La notazione completa ($\grave{\varepsilon}\, \top\, \varepsilon \frown \varepsilon$) rende evidente la sua equivalenza con $\forall$.]

[4] [Si tratta della formula $\begin{array}{l} \vdash\, F(f(a)) \\ \;\llcorner\, F(a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)) \end{array}$ (la funzione F è di secondo grado; si veda piú avanti). Ci si convince facilmente della sua validità, osservando che, per definizione, $a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$ ha lo stesso significato di $f(a)$.]

[5] [Tale formula è la seguente: $\begin{array}{l} \vdash\, F(a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)) \\ \;\llcorner\, F(f(a)) \end{array}$. Si confronti la nostra nota precedente.]

Da questa, con la (ι), segue

$$—\grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon \frown \varepsilon) \qquad (\lambda$$

che contraddice la (ι). Quindi almeno una delle due proposizioni (77) e (82) sarà falsa, e quindi sarà tale anche la (1),[1] della quale esse sono conseguenza. Osservando la derivazione della (1), nel paragrafo 55 del primo volume, risulta che anche per essa si è fatto uso della (Vb). Anche qui dunque il sospetto va a cadere su questa proposizione. Con la (Vb) cade in difetto anche la (V) stessa, ma non la (Va). Nulla impedisce la trasformazione della generalità di un'uguaglianza in una uguaglianza di decorsi di valori; solo la trasformazione inversa è da riguardare come non sempre lecita. Con questo si riconosce chiaramente che la mia introduzione dei decorsi di valori, nel paragrafo 3 del primo volume, non è sempre lecita. Non possiamo usare, in generale, le parole:

"La funzione $\Phi(\xi)$ ha lo stesso decorso di valori della funzione $\Psi(\xi)$",

come aventi lo stesso significato delle parole:

"Le funzioni $\Phi(\xi)$ e $\Psi(\xi)$ hanno sempre lo stesso valore per lo stesso argomento",

e dobbiamo prendere in considerazione la possibilità che esistano concetti i quali — almeno nel senso ordinario della parola — non hanno alcuna estensione. Questo invalida la legittimità della nostra funzione di secondo grado $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$. E tuttavia essa è indispensabile per la fondazione dell'aritmetica.

Adesso vogliamo ancora completare la nostra ricerca come segue: invece di partire dalla (Vb) e imbatterci cosí in una contraddizione, assumiamo la falsità della (Vb) come risultato finale. In questo esame, per essere indipendenti dai pur sempre sospetti segni dei decorsi di valori, vogliamo condurre la derivazione del tutto in generale per una funzione di secondo grado con un argomento di secondo tipo,[2] usando

[1] [$\vdash\!\!—f(a) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$). Si confronti p. 581, n. 3. La formula in questione si può tradurre come segue: un oggetto cade sotto un concetto se e solo se appartiene all'estensione di questo.]

[2] Vol. 1, § 23, p. 40. [Nel paragrafo qui ricordato Frege dà una classificazione delle funzioni in base al loro grado e al tipo degli argomenti che esse sono suscettibili di assumere. Nel testo Frege accenna a una funzone che può avere come argomenti solo funzioni di primo grado a un argomento (le quali ultime costituiscono appunto gli argomenti di secondo tipo qui menzionati). Funzioni siffatte sono di secondo grado e vengono indicate con $M_\beta(\varphi(\beta))$ (dove $\varphi(\ )$ indica l'argomento e M la funzione di secondo grado). Una tale notazione si può leggere: la M della funzione $\varphi(\ )$; nello stesso senso, ad esempio, dell'espressione "l'integrale definito della funzione...". Per la classificazione delle funzioni e degli argomenti si veda il paragrafo 9 dell'introduzione.]

le stesse denotazioni utilizzate nel primo volume, al paragrafo 25. Conformemente a ciò, il nostro complesso di segni

$$\text{“}\dot{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\mathfrak{g}(\varepsilon)\\ \qquad\llcorner\,\dot{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\varepsilon\end{array}\right)\text{”}$$

verrà sostituito con

$$\text{“}M_\beta\left(\begin{array}{l}\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\mathfrak{g}(\beta)\\ \qquad\llcorner\,M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)\text{”}$$

e a tale caso devono essere opportunamente riportate tutte le determinazioni che abbiamo stabilito sul dominio di una lettera greca nel primo volume (paragrafo 9) a proposito dei segni dei decorsi di valori. Nella nostra formula figurano due “M”, il primo all'inizio della formula, l'altro all'interno della parentesi. Come argomento del primo sta il segno di funzione

$$\text{“}\begin{array}{l}\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\mathfrak{g}(\xi)\\ \qquad\llcorner\,M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\xi\end{array}\text{”}$$

come argomento del secondo “$-\mathfrak{g}(\xi)$”. Dapprima risulta quanto segue:

$$\text{IIb}\quad\vdash\begin{array}{l}\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\mathfrak{g}(a)\\ \qquad\llcorner\,M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\\ \llcorner\!-\!-\,M_\beta\left(\begin{array}{l}\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\mathfrak{g}(\beta)\\ \qquad\llcorner\,M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a\\ \llcorner\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\mathfrak{g}(a)\\ \qquad\llcorner\,M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\end{array}$$

$$\times$$

$$\vdash\begin{array}{l}\top\!-\,M_\beta\left(\begin{array}{l}\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\mathfrak{g}(\beta)\\ \qquad\llcorner\,M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a\\ \llcorner\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\mathfrak{g}(a)\\ \qquad\llcorner\,M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\end{array}\qquad(\mu$$

$$\times$$

$$\vdash\begin{array}{l}\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\mathfrak{g}(a)\\ \qquad\llcorner\,M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\\ \llcorner\!-\!-\,M_\beta\left(\begin{array}{l}\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\mathfrak{g}(\beta)\\ \qquad\llcorner\,M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=(\beta)\end{array}\right)=a\end{array}\qquad(\nu$$

Se in quest'ultima poniamo, per abbreviazione,

$$\text{“}\Phi(\xi)\text{” per “}\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\left[\mathfrak{g}(\xi) \leftarrow M_{\beta}(-\mathfrak{g}(\beta)) = \xi\right]\text{”}$$

e “$M_{\beta}(\Phi(\beta))$” per “a”, otteniamo allora dalla (ν)

$$\Phi(M_{\beta}(\Phi(\beta)))$$

ossia il valore della nostra funzione di secondo grado per il concetto $\Phi(\xi)$ cade sotto questo stesso concetto. Ma, d'altra parte, abbiamo, sempre da (ν)

$$\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\left[\mathfrak{g}(M_{\beta}(\Phi(\beta))) \leftarrow M_{\beta}(-\mathfrak{g}(\beta)) = M_{\beta}(\Phi(\beta))\right]$$

cioè: Esiste un concetto tale che, preso come argomento della nostra funzione di secondo grado, le fa assumere lo stesso valore di $\Phi(\xi)$, sotto il quale però questo valore non cade. In altre parole, per ogni funzione di secondo grado con argomento di secondo tipo, esistono due concetti tali che 1) presi come argomenti di questa funzione, le fanno assumere lo stesso valore e 2) questo valore cade sotto il primo di tali concetti, ma non cade sotto il secondo.

In simboli possiamo derivare questo risultato nel modo seguente:

$$\nu \vdash \left[\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\left[\mathfrak{g}(a) \leftarrow M_{\beta}(-\mathfrak{g}(\beta)) = a\right] \leftarrow M_{\beta}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\left[\mathfrak{g}(\beta) \leftarrow M_{\beta}(-\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\right]\right) = a\right]$$

(IIIa):

$$\vdash \left[\left[f(a) \leftarrow M_{\beta}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\left[\mathfrak{g}(\beta) \leftarrow M_{\beta}(-\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\right]\right) = a\right] \leftarrow f(a) = \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\left[\mathfrak{g}(a) \leftarrow M_{\beta}(-\mathfrak{g}(\beta)) = a\right]\right] \qquad (\xi$$

– – – – – – – – – – – – – – – – –

(IIb)::

$$
\begin{array}{l}
\vdash f(a) \\
\quad M_\beta\left(\smile^{\mathfrak{g}}\; \mathfrak{g}(\beta) \;\; M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\right) = a \\
\quad M_\beta(-f(\beta)) = M_\beta\left(\smile^{\mathfrak{g}}\; \mathfrak{g}(\beta) \;\; M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\right) \\
\smile^{\mathfrak{F}}\; \mathfrak{F}(a) = \smile^{\mathfrak{g}}\; \mathfrak{g}(a) \;\; M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = a \\
\quad M_\beta(-\mathfrak{F}(\beta)) = M_\beta\left(\smile^{\mathfrak{g}}\; \mathfrak{g}(\beta) \;\; M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\right)
\end{array}
\qquad (o
$$

(IIb, IIIa)::

$$
\begin{array}{l}
\vdash f(a) \\
\quad M_\beta(-f(\beta)) = a \\
\quad M_\beta\left(\smile^{\mathfrak{g}}\; \mathfrak{g}(\beta) \;\; M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\right) = a \\
\smile^{\mathfrak{G}} - \smile^{\mathfrak{F}}\; \mathfrak{F}(a) = \mathfrak{G}(a) \\
\quad M_\beta(-\mathfrak{F}(\beta)) = M_\beta(-\mathfrak{G}(\beta))
\end{array}
\qquad (\pi
$$

$$
\begin{array}{l}
\vdash \smile^{\mathfrak{g}}\; \mathfrak{g}(a) \\
\quad M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = a \\
\quad M_\beta\left(\smile^{\mathfrak{g}}\; \mathfrak{g}(\beta) \;\; M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\right) = a \\
\smile^{\mathfrak{G}} - \smile^{\mathfrak{F}}\; \mathfrak{F}(a) = \mathfrak{G}(a) \\
\quad M_\beta(-\mathfrak{F}(\beta)) = M_\beta(-\mathfrak{G}(\beta))
\end{array}
\qquad (\varrho
$$

(μ):

$$
\begin{array}{l}
\vdash \top M_\beta\left(\smile^{\mathfrak{g}}\; \mathfrak{g}(\beta) \;\; M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\right) = a \\
\quad M_\beta\left(\smile^{\mathfrak{g}}\; \mathfrak{g}(\beta) \;\; M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = \beta\right) = a \\
\smile^{\mathfrak{G}} - \smile^{\mathfrak{F}}\; \mathfrak{F}(a) = \mathfrak{G}(a) \\
\quad M_\beta(-\mathfrak{F}(\beta)) = M_\beta(-\mathfrak{G}(\beta))
\end{array}
\qquad (\sigma
$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

(Ig): ———————————————————

$$\vdash\begin{array}{l} \top\; M_\beta\left(\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\top\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a \\ \overset{\mathfrak{G}}{\smile}-\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\top\begin{array}{l}\mathfrak{F}(a)=\mathfrak{G}(a)\\ M_\beta(-\mathfrak{F}(\beta))=M_\beta(-\mathfrak{G}(\beta))\end{array}\end{array} \qquad (\tau$$

(IIa):: ———————————————————

$$\vdash\begin{array}{l} \top\; M_\beta\left(\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\top\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}-\overset{\mathfrak{G}}{\smile}-\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\top\begin{array}{l}\mathfrak{F}(\mathfrak{a})=\mathfrak{G}(\mathfrak{a})\\ M_\beta(-\mathfrak{F}(\beta))=M_\beta(-\mathfrak{G}(\beta))\end{array}\end{array} \qquad (\upsilon$$

X

$$\vdash\begin{array}{l} \top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}-\overset{\mathfrak{G}}{\smile}-\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\top\begin{array}{l}\mathfrak{F}(\mathfrak{a})=\mathfrak{G}(\mathfrak{a})\\ M_\beta(-\mathfrak{F}(\beta))=M_\beta(-\mathfrak{G}(\beta))\end{array} \\ M_\beta\left(\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\top\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a\end{array} \qquad (\varphi$$

———— ● ————

IIIe $$\vdash M_\beta\left(\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\top\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=M_\beta\left(\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\top\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)$$

(φ): ———————————————————————————

$$\vdash\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}-\overset{\mathfrak{G}}{\smile}-\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\top\begin{array}{l}\mathfrak{F}(\mathfrak{a})=\mathfrak{G}(\mathfrak{a})\\ M_\beta(-\mathfrak{F}(\beta))=M_\beta(-\mathfrak{G}(\beta))\end{array} \qquad (\chi$$

vale a dire: per ogni funzione di secondo grado con un argomento di secondo tipo, esistono concetti i quali, presi come argomenti di quelle funzioni, fanno loro assumere lo stesso valore, malgrado non tutti gli oggetti che cadono sotto uno di questi concetti cadano anche sotto gli altri.

La nostra dimostrazione è stata condotta senza impiegare proposizioni o denotazioni la cui legittimità possa in qualche modo essere messa in dubbio. La nostra proposizione, quindi, vale anche per la funzione di secondo grado $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$, ammesso che essa sia lecita, ossia,

in parole: nel caso che per ogni concetto di primo grado si possa parlare in generale della sua estensione, allora si presenta il caso di concetti che hanno la stessa estensione, malgrado non tutti gli oggetti che cadono sotto uno di questi concetti cadano parimenti sotto gli altri.

Con questo risultato però è a rigore eliminata l'estensione concettuale nel senso tradizionale della parola. Non è lecito dire in generale che l'espressione "L'estensione di un primo concetto coincide con quella di un secondo" abbia lo stesso significato dell'espressione "Tutti gli oggetti che cadono sotto il primo concetto cadono anche sotto il secondo e viceversa". Dal risultato della nostra derivazione vediamo che non è affatto possibile collegare alle parole "l'estensione del concetto $\Phi(\xi)$", un senso di questo genere: che dall'uguaglianza dell'estensione di concetti possa in generale venir dedotto che ogni oggetto, il quale cade sotto uno di quei concetti, cada anche sotto gli altri.

Possiamo giungere alla nostra proposizione anche per altra via e precisamente cosí:

$$\text{IIb} \vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = a\end{array} \\ M_\beta\left(-\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a \\ \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\end{array}\end{array}$$

$$\times$$

$$\vdash \begin{array}{l} M_\beta\left(-\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a \\ \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\end{array}\end{array} \qquad (\psi$$

$$\times$$

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = a\end{array} \\ M_\beta\left(-\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a \end{array} \qquad (\omega$$

In questa poniamo per brevità “$\Psi(\xi)$” per

$$\text{“}\; -\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\; \mathfrak{g}(\xi) \;\; \llcorner\; M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = \xi \;\text{”}$$

e poniamo “$M_\beta(\Psi(\beta))$” per “a”; otteniamo cosí da (ω)

$$\top\!\!\!\!\!\!\,\top\; \Psi(M_\beta(\Psi(\beta)))$$

cioè, il valore della nostra funzione di secondo grado per l’argomento $\Psi(\xi)$ non cade sotto il concetto $\Psi(\xi)$. D’altra parte pure da (ω) abbiamo

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\; \mathfrak{g}(M_\beta(\Psi(\beta))) \;\; \llcorner\; M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = M_\beta(\Psi(\beta))$$

ossia, esiste un concetto tale che, preso come argomento per la nostra funzione di secondo grado, le fa assumere lo stesso valore che essa assume per l’argomento $\Psi(\xi)$, e sotto il quale (concetto) cade questo valore. Anche qui abbiamo quindi due concetti tali che, presi come argomenti della funzione di secondo grado, le fanno assumere lo stesso valore, che ora cade sotto il secondo di questi concetti, ma non sotto il primo. Dalla proposizione (ω) possiamo derivare la proposizione (χ) con procedimento analogo a quello seguito per derivarla da (ν).

Proviamo ora ad assumere la funzione $\grave{\varepsilon}(-\varphi(\varepsilon))$ quale funzione di secondo grado delle nostre proposizioni! Allora in

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\; \mathfrak{g}(\xi) \;\; \llcorner\; \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \xi$$

abbiamo un concetto sotto il quale cade la sua propria estensione. Ma in base alla (ν), esiste allora un concetto la cui estensione coincide con quella del concetto ora detto, ma sotto il quale tale estensione non cade. Vorremmo averne un esempio. Come può trovarsi un concetto siffatto? Questo non è possibile senza una piú esatta determinazione della nostra funzione $\grave{\varepsilon}(-\varphi(\varepsilon))$ o dell’estensione concettuale; infatti il criterio finora adottato per decidere della coincidenza delle estensioni concettuali qui non ha efficacia.

D’altra parte, in

$$-\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\; \mathfrak{g}(\xi) \;\; \llcorner\; \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \xi$$

abbiamo un concetto sotto il quale non cade la sua propria estensione. In base alla (ω) però, esiste in questo caso un concetto la cui estensione coincide con quella del nostro concetto, e sotto il quale cade quest'estensione. Tutto questo naturalmente nell'ipotesi che il nome di funzione "$\grave{\varepsilon}(-\varphi(\varepsilon))$" sia logicamente legittimo.

In entrambi i casi vediamo che è l'estensione concettuale stessa a provocare il caso eccezionale, cadendo sotto uno solo dei due concetti che l'hanno come estensione; e vediamo pure che il presentarsi di quest'eccezione non si può evitare in nessun modo. Di conseguenza sarà opportuno fissare come segue il criterio per l'uguaglianza delle estensioni: l'estensione di un primo concetto coincide con quella di un secondo, se ogni oggetto che cade sotto il primo concetto — a eccezione dell'estensione del primo concetto stesso — cade anche sotto il secondo, e se, viceversa, ogni oggetto che cade sotto il secondo concetto — a eccezione dell'estensione del secondo concetto stesso — cade anche sotto il primo.

Va da sé che questa non può venir riguardata come definizione dell'estensione concettuale, ma soltanto come attribuzione della proprietà caratteristica di questa funzione di secondo grado.

Trasportando ai decorsi di valori in generale quanto abbiamo detto intorno alle estensioni concettuali, giungiamo a stabilire il principio

$$\vdash (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) = \grave{\alpha} g(\alpha)) = -\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\begin{array}{l} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}) \\ \mathfrak{a} = \grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \\ \mathfrak{a} = \grave{\alpha} g(\alpha) \end{array} \qquad \text{(V}'$$

che deve prendere il posto della (V) (vol. 1, § 20). Da questa legge segue la (Va). Al contrario la (Vb) deve venir sostituita dalle seguenti proposizioni:

$$\vdash \begin{array}{l} f(a) = g(a) \\ a = \grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \\ \grave{\varepsilon} f(\varepsilon) = \grave{\alpha} g(\alpha) \end{array} \qquad \text{(V}'\text{b}$$

oppure

$$\vdash \begin{array}{l} f(a) = g(a) \\ a = \grave{\alpha} g(\alpha) \\ \grave{\varepsilon} f(\varepsilon) = \grave{\alpha} g(\alpha) \end{array} \qquad \text{(V}'\text{c}$$

Orbene, convinciamoci che ora viene evitata la contraddizione che precedentemente si presentava fra le proposizioni (β) e (ε). Procediamo come per la derivazione di (β), usando (V'c) invece di (Vb). Sia di nuovo "$\forall$" l'abbreviazione per

$$\text{“}\,\grave{\varepsilon}\left(\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\varepsilon)\\ \llcorner\,\grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon\end{array}\right)\text{”}$$

Abbiamo, in base alla (V'c),

$$\vdash\!\!\top\!\!\top\begin{array}{l}(-f(\forall)) = \top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\forall)\\ \llcorner\,\grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall\end{array}\\ \forall = \grave{\varepsilon}\left(\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\varepsilon)\\ \llcorner\,\grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon\end{array}\right)\\ \grave{\varepsilon}(-f(\varepsilon)) = \grave{\varepsilon}\left(\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\varepsilon)\\ \llcorner\,\grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon\end{array}\right)\end{array}$$

Utilizzando l'abbreviazione otteniamo

$$\vdash\!\!\top\!\!\top\begin{array}{l}(-f(\forall)) = \top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\begin{array}{l}g(\forall)\\ \llcorner\,\grave{\varepsilon}(-g(\varepsilon)) = \forall\end{array}\\ \forall = \forall\\ \grave{\varepsilon}(-f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\left(\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\varepsilon)\\ \llcorner\,\grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon\end{array}\right)\end{array}$$

ciò che è ovvio, a causa del termine inferiore [premessa] "$\top \forall = \forall$" e che appunto per questo non può mai condurre a una contraddizione.

Avevamo stabilito (Vol. 1 § 17) che l'estensione di un concetto sotto il quale cade solo il Vero, deve essere il vero, e che l'estensione di un concetto sotto il quale cade solo il falso, deve essere il Falso. Queste determinazioni non subiscono nessuna variazione, con l'adozione della nuova concezione dell'estensione concettuale.

Quale influenza ha ora questa nuova concezione sul valore della nostra funzione $\backslash\xi$, se noi conserviamo le determinazioni del primo volume (§ 11). Supponiamo che $\Phi(\xi)$ sia un concetto vuoto! Allora, secondo la primitiva concezione dell'estensione concettuale, $\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ coincideva con $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, perché non esisteva alcun oggetto Δ tale che $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$ coincidesse con $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$. Secondo la nuova concezione dell'estensione concettuale un tale oggetto esiste, e precisamente è $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ stesso. Il risultato è però ancora lo stesso, precisamente che $\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ coincide

con $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$. Otterremo la stessa cosa se $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ cade sotto il concetto $\Phi(\xi)$ come unico oggetto. Se supponiamo che Δ sia l'unico oggetto che cade sotto il concetto $\Phi(\xi)$, allora $\setminus\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ coincide con Δ. Lo stesso accade ancora se oltre a Δ cade sotto il concetto $\Phi(\xi)$ ancora e solo $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$; e qui si trova una distinzione con quanto accadeva in precedenza; infatti, in questo caso, secondo la concezione precedente, $\setminus\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ sarebbe coincisa non con Δ, bensí con $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$. In tutti gli altri casi, non ha luogo alcuna distinzione fra la nuova e l'antica concezione dell'estensione concettuale per quanto riguarda i valori della funzione $\setminus\xi$, e il nostro principio (VI) vale ora come prima.

Dobbiamo ancora chiederci come i valori della nostra funzione $\xi\frown\zeta$ vengano influenzati dalla nuova concezione del decorso di valori. Nel caso che Γ sia un decorso di valori, ora non è piú determinato in ogni caso quale valore assuma per l'argomento Θ una funzione, il cui decorso di valori sia Γ, e precisamente questo valore non è determinato allorché Θ coincida con Γ. Possono allora esistere funzioni che, pur avendo lo stesso decorso di valori Γ, assumono valori diversi per l'argomento Γ. L'estensione del concetto

$$\top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\Gamma)=\xi\\ \llcorner\,\Gamma=\grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}$$

ora non può piú coincidere con l'estensione di un concetto quale $\Delta = \xi$, perché sotto il primo cadono tutti gli oggetti, sotto il secondo cade Δ quale unico oggetto. Infatti, se Γ è un decorso di valori e E un oggetto, sarà sempre possibile dare una funzione $X(\xi)$ in modo che risulti $\grave{\varepsilon}X(\varepsilon)=\Gamma$ e $X(\Gamma)=E$. Di conseguenza, secondo quanto stabilito nel primo volume (§ 11),

$$\setminus\grave{\alpha}\left(\top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\Gamma)=\alpha\\ \llcorner\,\Gamma=\grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right)$$

coincide con

$$\grave{\alpha}\left(\top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\Gamma)=\alpha\\ \llcorner\,\Gamma=\grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right)$$

Se, conformemente a questo, Γ è un decorso di valori, allora risulta

$$\Gamma\frown\Gamma=\grave{\alpha}\left(\top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\Gamma)=\alpha\\ \llcorner\,\Gamma=\grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right)$$

ossia, $\Gamma \frown \Gamma$ è l'estensione di un concetto che comprende tutto. Se Γ non è un decorso di valori, allora $\Gamma \frown \Gamma$ è l'estensione di un concetto vuoto. Nel primo caso $-\Gamma \frown \Gamma$ è il Falso:

$$\vdash\!\!\top\, \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \qquad (\alpha,$$

Questo è importante per la funzione $\mathfrak{P}\xi$. Si potrebbe a tutta prima temere che a concetti aventi uguale estensione dovesse essere attribuito, secondo le nostre convenzioni, uno stesso numero, malgrado che sotto uno di essi cada un oggetto in piú che sotto gli altri, e precisamente l'estensione stessa del concetto, cosicché, in definitiva, si otterrebbe un unico numero finito. Intanto per la funzione $\mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, viene considerato il concetto $-\xi \frown \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, non il concetto $\Phi(\varepsilon)$; e, se l'estensione concettuale $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ cade sotto questo secondo concetto, allora essa non cade sotto $-\xi \frown \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$.

Se si ripete la derivazione della (1) (Vol. 1, § 55) usando (V′b) invece di (Vb), al posto della (1) si ottiene la proposizione (1′)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\!-\, f(a) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \\ \;\;\lfloor\!\top\, a = \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \end{array} \qquad (1'$$

dalla quale si deriveranno, invece della (77) e della (82), le proposizioni (77′) e (82′):

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\, F(a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)) \\ \;\;\;\;\;\lfloor\, F(f(a)) \\ \;\;\lfloor\!\top\, a = \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \end{array} \qquad (77'$$

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\, F(f(a)) \\ \;\;\;\;\;\lfloor\, F(a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)) \\ \;\;\lfloor\!\top\, a = \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \end{array} \qquad (82'$$

Traiamo ancora alcune conseguenze.

$$\alpha' \;\vdash\!\!\top\, \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$$

$$(\text{IIIa}): \overline{\hspace{6em}}$$

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\, a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \\ \;\;\lfloor\, a = \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \end{array} \qquad (\beta'$$

— — — — — — — —

(Ia): — — — — — — — — —

$$\vdash \; f(a) \;\; | \;\; a \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \;\; | \;\; a = \grave{\varepsilon} f(\varepsilon)$$

(82'): ·—·—·—·—·—·—·

$$\vdash \; f(a) \;\; | \;\; a \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \qquad (82''$$

——— ● ———

$$82'' \;\; \vdash \; \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \;\; | \;\; \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon)$$

(Ig): ————————————

$$\vdash \top \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \qquad (\gamma'$$

Questo segue in modo del tutto analogo a quanto già fatto per (ι). Tuttavia qui non sorge alcuna contraddizione, come vedremo subito. (γ') è soltanto un caso particolare di (α').

$$77' \;\; \vdash \; \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \;\; | \;\; \top \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \;\; | \;\; \top \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon)$$

X

$$\vdash \; \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \;\; | \;\; \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \qquad (\delta'$$

(γ'):: ————————————

$$\vdash \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \qquad (\varepsilon'$$

(ε') è un caso particolare della (IIIe). Non è comparsa alcuna contraddizione.

Condurrebbe troppo lontano il seguire le conseguenze della sostituzione della (V) con la (V'). Bisogna riconoscere che a molte proposizioni dovrebbero venir annessi termini inferiori [premesse]; ma a dire il vero non v'è da temere che da questo possano sorgere ostacoli

essenziali nel condurre le dimostrazioni. In ogni caso si renderà necessario un controllo su tutte le proposizioni fin qui trovate.

Quale problema fondamentale dell'aritmetica va riguardata la seguente questione: come intendiamo gli oggetti logici, in particolare i numeri? A che titolo siamo autorizzati a riconoscere i numeri come oggetti? Anche se la soluzione di questo problema non è cosí avanzata come io pensavo nel comporre questo volume, non dubito tuttavia che sia stata trovata la via per giungere ad essa.

Jena, ottobre 1902

APPENDICE

INEDITI DAL *NACHLASS* DI FREGE

[Per gentile concessione del professor Hans Hermes, direttore dell'Istituto di logica matematica e ricerche sui fondamenti presso l'Università di Münster, nel cui archivio — come già si è detto — è conservata la maggior parte degli inediti freghiani, siamo in grado di presentare al lettore italiano le pagine seguenti, che provengono appunto dal *Nachlass* scientifico inedito di Gottlob Frege. Rinnoviamo al professor Hermes il nostro vivo ringraziamento.

Il primo inedito non è datato, ma può farsi risalire con buona approssimazione al periodo compreso fra il novembre 1896 e i primi mesi del 1897. Salta agli occhi la sua relazione con la lettera di Frege a Peano del settembre 1896, e con ogni probabilità il logico tedesco iniziò appunto la stesura del presente abbozzo dopo aver ricevuto, nell'ottobre del '96, la risposta di Peano cui si è già accennato (vedasi nella parte quarta del presente volume la suddetta lettera e la nostra premessa).

Il secondo inedito è costituito da *Diciassette proposizioni fondamentali della logica*: sebbene anch'esso sia difficilmente databile, il fatto che non contenga alcun accenno alla fondamentale distinzione fra senso e significato ci induce a considerarlo anteriore al 1892. Pur con questa lacuna, le proposizioni in questione, nella loro schematica stringatezza, riescono a dare una efficace visione d'assieme dei *punti base* sui quali si sviluppa il pensiero logico di Frege. Proprio questo loro carattere di sintetica essenzialità ci ha spinto a porle a conclusione della nostra raccolta.]

1.

Abbozzo di una lettera a Giuseppe Peano

Sulla molteplicità e condizionalità delle definizioni

L'importanza della questione mi spinge a riprendere l'argomento della molteplicità e condizionalità delle definizioni.

Lei concorda con me finché si tratta di definire nomi propri, non piú però quando si debbono definire segni di funzione. Tuttavia, Lei non confuta le ragioni che io porto a conforto della mia tesi, ma fa valere punti di vista di carattere storico e pratico. È vero: storicamente si è seguito il procedimento di ampliare gradualmente il significato di un segno, per esempio del segno di addizione; ma è pericoloso attenersi a tale procedimento in una trattazione sistematica. La logica esige — e io mi sono attenuto a questa direttiva — confini assolutamente fissi e determinati. Il fluire delle delimitazioni e l'incompletezza dei concetti e delle relazioni — introdotti dagli ampliamenti suddetti — non possono avere altro risultato se non quello di mettere in pericolo la sicurezza delle inferenze. Manifestamente anche Lei è dello stesso parere, dal momento che non obietta nulla contro ciò; ma ragioni pratiche Le impediscono di riconoscere la giustezza della mia esigenza, perché Lei non sa come si possa soddisfarla. Certamente questo è un compito che non risulta facilissimo da assolvere, ma che nondimeno deve venir assolto; le esigenze della logica, infatti, non possono venir respinte per difficoltà pratiche.

Per quanto riguarda poi i segni delle operazioni — addizione, moltiplicazione, ecc. — credo che, nel definirli, si debba porre a fondamento il dominio dei numeri complessi; con l'inclusione di questi numeri

complessi si è infatti raggiunta una naturale chiusura del dominio numerico. In base a ciò ritengo sia giusto dire in un'unica definizione quale significato debba assumere il nesso di segni "$a + b$", quando in luogo di a e b subentrano nomi propri qualunque. Questo significato naturalmente deve coincidere con quello accettato in generale quando ad a e b vengano sostituiti numeri complessi (fra i quali comprendo i numeri reali). È relativamente indifferente quale significato scaturisca da tale definizione quando al posto di a o di b o di entrambi subentrino nomi di oggetti che non siano numeri complessi, purché in tal caso si abbia sempre un significato. Cosí facendo, il significato del segno di addizione risulterebbe fissato una volta per tutte, risulterebbe posto un termine alla sua definizione e ottenuto un terreno stabile sul quale costruire con sicurezza delle inferenze. Manifestamente, con questo procedimento, ci si precluderebbe la possibilità di cogliere in un secondo tempo adeguate determinazioni per numeri ipercomplessi, per vettori ecc. e forse si sarebbe costretti a introdurre segni particolari per tali casi. Un inconveniente di sí scarsa rilevanza non dovrebbe però mai distoglierci dal soddisfare le esigenze inderogabili della logica.

Per quanto riguarda il segno di uguaglianza, l'osservazione da Lei compiuta — che i vari autori sono di opinioni diverse circa il suo significato — offre lo spunto a sorprendenti considerazioni, di certo non molto lusinghiere per la matematica. Se si riflette al fatto che moltissime fra le proposizioni matematiche si presentano sotto forma di uguaglianze, mentre altre per lo meno contengono uguaglianze, e se a questo si aggiunge la Sua osservazione, se ne ricava che i matematici concordano sí fra loro per quanto riguarda la forma esteriore delle loro proposizioni, ma non sui pensieri che a esse collegano; purtuttavia proprio questi ultimi sono l'essenziale. Ciò che l'un matematico dimostra non è la stessa cosa di ciò che l'altro intende coi medesimi segni. Solo apparentemente abbiamo un vasto patrimonio comune di verità matematiche. Questa è però una situazione insostenibile, alla quale si deve porre termine il piú presto possibile.

Da parte mia, io assumo come significato del segno di uguaglianza l'identità, la coincidenza completa, e mi sembra che, per lo meno nelle definizioni, non sia possibile nessun altro significato. Senza dubbio l'adozione generale di questa concezione viene spesso ostacolata dalla

seguente riflessione. Si pensa che, assumendo tale significato, l'intero contenuto dell'aritmetica si ridurrebbe al principio d'identità $a = a$, e che non si avrebbe nient'altro che monotoni esempi di questo monotono principio. Se le cose stessero proprio cosí l'aritmetica avrebbe a dire il vero un contenuto ben misero. Tuttavia la situazione è alquanto diversa. Quando agli inizi dell'astronomia si riconobbe che la stella della sera (Espero) è la stessa che la stella del mattino (Lucifero) e quando ai nostri giorni un astronomo ricava dai suoi calcoli che una cometa da lui osservata è la stessa di cui riferiscono antiche notizie, questi fatti costituiscono conoscenze fornite di un valore incomparabilmente maggiore che non quello di meri esempi del principio d'identità — ogni oggetto è identico a sé stesso — quantunque essi siano null'altro che conoscenze di identità. Se la proposizione, che $233 + 798$ è lo stesso numero che 1031, ha in base a quanto ora detto un valore conoscitivo maggiore di quanto non l'abbia un mero esempio del principio d'identità, ciò non impedisce tuttavia di concepire il segno di uguaglianza in "$233 + 798 = 1031$" come segno di identità. Quale caos di numeri avremmo, altrimenti? Non ci sarebbe un unico numero primo immediatamente successivo a 5, ma ve ne sarebbero infiniti: 7, $8-1$, $(8+6):2$ e cosí via. Non potremmo dire "La somma di 7 e 5" con l'articolo determinativo, bensí dovremmo dire "una somma", o "tutte le somme", "alcune somme" ecc. Cosí pure non potremmo dire "La somma di 7 e 5 è divisibile per 3", ma dovremmo dire "Tutte le somme di 7 e 5 sono divisibili per 3". In che cosa si distinguono 3×4 e $9+3$? In nient'altro che nel modo con cui vengono indicati. Non esiste nessuna proprietà di cui goda (3×4) e che non spetti anche a $(9+3)$ e viceversa. Allora non si può certamente porre il segno di uguaglianza fra segni di segmenti aventi la stessa lunghezza o fra segni di superficie equivalenti. Ciò nonostante il segno di uguaglianza si può impiegare anche per questi casi. Sarà sufficiente porre ai due lati di esso, invece dei segni dei segmenti, i segni dei numeri che si ottengono misurandoli rispetto a una stessa unità. Si può anche procedere come segue: da ogni segmento viene determinata una classe di segmenti di uguale lunghezza. Se due segmenti hanno uguale lunghezza, le due classi da essi determinate coincidono. Col che otteniamo di nuovo un'identità. Supponiamo che

A e B siano segmenti, e la denotazione "$A \cong B$" indichi che essi sono congruenti.

Ciò posto, indichiamo con $\hat{\varepsilon}(\varepsilon \cong A)$ la classe dei segmenti che hanno la stessa lunghezza di A e la denotazione

$$\hat{\varepsilon}(\varepsilon \cong A) = \hat{\varepsilon}(\varepsilon \cong B)$$

rende il contenuto essenziale di "$A \cong B$" sotto forma di un'uguaglianza. Anche in casi analoghi al precedente si può esprimere sotto forma di uguaglianza la coincidenza rispetto a una certa proprietà, senza rinnegare il significato del segno di uguaglianza poco sopra riferito. Con ciò naturalmente non viene ancora chiarito come sia possibile che un'identità abbia un valore conoscitivo superiore a quello di puro e semplice esempio del principio d'identità. Nella proposizione "La stella della sera è la stessa che la stella della sera" abbiamo soltanto quest'ultimo principio; ma nella proposizione "La stella della sera è la stessa che la stella del mattino" abbiamo di piú.

In che modo la sostituzione di un nome proprio con un altro nome proprio che denota esattamente lo stesso corpo celeste può provocare una tale variazione? Verrebbe fatto di pensare che tale sostituzione riguardasse solo la forma, ma non il contenuto della proposizione. E tuttavia è a tutti evidente che il pensiero della seconda proposizione è differente e senza dubbio essenzialmente piú ricco di contenuto che non quello della prima. Ciò non sarebbe possibile se la distinzione fra le due proposizioni consistesse soltanto nei nomi diversi "stella della sera" e "stella del mattino", senza che a essi risultasse in qualche modo collegata una distinzione anche da un punto di vista contenutistico. Ora, quei due nomi denotano entrambi lo stesso corpo celeste; essi hanno — come io dico — lo stesso significato; la distinzione quindi non può risiedere in questo significato comune. A chiarire la cosa interviene a questo punto la mia distinzione fra senso e significato. Io dico: quei due nomi hanno, certo, lo stesso significato, ma non lo stesso senso, e ciò è dimostrato dal fatto che chi parla può non avere alcuna nozione della coincidenza dei loro significati — e infatti un incompetente d'astronomia ignorerà per lo piú questa coincidenza — ma dovrà tuttavia collegare a tali nomi un senso, ammesso che non blateri insensatamente. E il senso del nome "stella del mattino" è sicuramente distinto da quello

dell'espressione "stella della sera". Cosí accade che il pensiero della nostra prima proposizione sia diverso dal pensiero della seconda; infatti il pensiero che noi esprimiamo con una proposizione è il senso della proposizione stessa. Questo è appunto uno dei casi a proposito dei quali Lei dice, nella Sua recensione ai miei *Princípi dell'aritmetica*,[1] che i vocabolari fanno corrispondere la stessa parola italiana a due parole tedesche che io uso in modo diverso. A me sembra che la traduzione piú appropriata sia per il termine "Sinn" l'italiano "senso" e per "Bedeutung" l'italiano "significazione". I dizionari confondono per lo piú le due parole fra loro, in quanto essi riportano come parole corrispondenti a una data non soltanto quelle che hanno il suo stesso senso, ma anche quelle che hanno lo stesso significato. Un'esatta corrispondenza si ha però solo nel primo caso. Cosí per esempio troviamo, in corrispondenza ad "Abendstern", "Venere" e "Espero", e in corrispondenza a "Morgenstern", "Venere" e "Lucifero". Se in base a ciò volessimo tradurre la proposizione "Der Morgenstern ist identisch mit dem Abendstern" con "Venere è identica a Venere", ci lasceremmo con ciò sfuggire il senso (il pensiero di essa). Al contrario, non c'è proprio nulla da obiettare contro la traduzione "Lucifero è identico a Espero". "Venere" ha certo la stessa *significazione* di "Morgenstern" ma non ha lo stesso *senso*. Analogamente, anche il senso di "5 + 2" è diverso dal senso dell'espressione "4 + 3", e di conseguenza anche il pensiero che noi esprimiamo nella formula "4+3, 2+3" è diverso dal senso della formula "5+2, 5". Quando in una proposizione usiamo un nome, ciò di cui noi parliamo non è il senso del nome, bensí il suo significato. Se in una proposizione impieghiamo l'espressione "il Sole", con essa noi intendiamo un corpo celeste, situato nello spazio a noi esterno, e del quale sappiamo che ha una massa.[2] Ma il senso della parola "sole", né si trova in qualche luogo dello spazio, né ha una massa. Se quindi scrivo: "5+2=4+3", con ciò non intendo che "5+2" e "4+3" hanno lo stesso senso, bensí che essi hanno lo stesso significato, ossia che essi denotano lo stesso numero.[3] Non c'è

[1] Rivista di Matematica, vol. 5, 127 (1895).

[2] Se voglio parlare delle parole o dei segni stessi, non del loro significato, allora li pongo fra virgolette.

[3] Ho trattato dettagliatamente l'argomento senso e significato nel volume 100 della "Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik".

quindi proprio niente che impedisca di usare il segno di uguaglianza quale segno di identità. Una volta stabilito questo, però, non è piú possibile dare — come Lei propone — ulteriori definizioni del segno in questione per i casi in cui esso si trova fra numeri razionali o fra irrazionali o fra immaginari, ma dal significato fissato per il segno di uguaglianza e dalle spiegazioni dei segni fra cui esso si trova deve automaticamente seguire se l'uguaglianza sia vera o no. Contro un tal modo di procedere si possono del resto sollevare seri dubbi logici. Succede infatti che, attenendosi a esso, non si definisce in sé né il segno di uguaglianza, né ad esempio il numero irrazionale, ma si spiega un'espressione nella quale ricorrono entrambi, stabilendo quando due numeri irrazionali debbano essere uguali fra loro. Allora ci si immagina di aver spiegato sia il numero irrazionale sia il segno di uguaglianza, mentre in verità non si è spiegato nessuno dei due; dal significato di un nesso di segni non seguono infatti i significati dei singoli segni che lo compongono, neppure nel caso in cui alcuni di questi segni siano noti.

È deplorevole che fra i matematici non vi sia accordo per quanto riguarda i princípi cui attenersi nel definire. Introdurre un tale accordo sarebbe un còmpito meritorio per un congresso generale di matematici. Attualmente in questo campo regna la piú completa anarchia, ciò che è senza dubbio molto comodo per gli autori di matematica, ma pregiudizievole per la scienza. Non troviamo mai un completo accordo sulla questione di che cosa propriamente sia il definire. Alcuni pensano di poter creare qualcosa mediante le definizioni; ma non si pronunziano sui limiti di questa potenza creatrice, né sui princípi da seguire in tale creazione. E tuttavia essa deve pure avere dei limiti, poiché nessuno pensa, per esempio, di poter creare un oggetto con proprietà che si contraddicono fra loro. Prima di accingersi a definire creativamente, nessuno si cura però di dimostrare che dalla sua definizione non risulterà alcuna contraddizione, pensando probabilmente che ogni eventuale contraddizione dovrebbe saltare immediatamente agli occhi. Se ciò fosse vero, come risulterebbero facili da svolgere tutte le dimostrazioni! Ho stabilito tali princípi del definire nel paragrafo 33 del primo volume dei miei *Princípi dell'aritmetica*; penso che da un punto di vista teorico ogni matematico li approverà, e tuttavia, nella prassi, essi vengono quasi sempre rinnegati.

2.

Diciassette proposizioni fondamentali della logica

1. Le connessioni che costituiscono l'essenza del pensare sono peculiarmente diverse dalle associazioni di rappresentazioni.
2. La differenza non consiste unicamente in un *Nebengedanken* [1] il quale aggiunga l'argomento che giustifica la connessione.
3. Quando si pensa non si connettono propriamente rappresentazioni, ma si connettono cose, proprietà, concetti, relazioni.
4. Il pensiero contiene sempre qualcosa che trascende il caso particolare, per cui si prende coscienza di quest'ultimo come di caso che cade sotto qualcosa di generale.
5. L'espressione linguistica della peculiarità del pensiero è data dalla copula e dalla desinenza personale del verbo.
6. Quale contrassegno esteriore per la connessione attuantesi nel pensare, può servire il fatto che, relativamente a essa, ha senso porsi la questione se sia vera o falsa. Associazioni di rappresentazioni non sono né vere né false.
7. Che cosa sia vero, non lo ritengo spiegabile.[2]
8. L'espressione linguistica di un pensiero è la proposizione. In senso traslato si parla anche della verità di una proposizione.

[1] [Non consiste cioè in un pensiero che si affianchi alle associazioni di rappresentazioni di cui si fa parola nella proposizione 1. Le tre prime proposizioni svolgono evidentemente il medesimo tema della differenziazione fra rappresentazione e pensiero.]

[2] [Abbiamo tradotto letteralmente le parole "Was wahr sei,..." Riteniamo tuttavia che con esse Frege volesse esprimere la propria convinzione circa l'impossibilità di spiegare che cosa sia *il* vero.]

9. Una proposizione può essere vera o falsa solo nel caso in cui essa sia l'espressione di un pensiero.
10. La proposizione "Leo Sachse è un uomo" è un'espressione di un pensiero soltanto nel caso in cui "Leo Sachse" denoti qualcosa. In modo analogo, la proposizione "Questa tavola è rotonda", è espressione di un pensiero solo nel caso in cui le parole "questa tavola" mi denotino qualcosa di determinato, non siano parole vuote.
11. "2 per 2 è uguale a 4" rimane vero anche se, in seguito all'evoluzione darwiniana, tutti gli uomini giungessero ad affermare che 2 per 2 è uguale a 5. Ogni verità è eterna e indipendente sia dal fatto di venir pensata sia dalla natura psicologica di chi la pensa.
12. La logica ha inizio soltanto con la convinzione che sussista una differenza fra verità e falsità.
13. Un giudizio si giustifica o riconducendolo a verità già riconosciute, oppure senza utilizzare altri giudizi. Solo il primo caso, cioè la inferenza, è oggetto della logica.
14. Le teorie del concetto e del giudizio servono solo quale preparazione alla teoria dell'inferenza.
15. Il compito della logica è quello di costruire le leggi in base alle quali un giudizio viene giustificato per mezzo di altri giudizi, indipendentemente dal fatto che questi ultimi siano veri.
16. L'osservanza delle leggi logiche può garantire la verità di un giudizio solo fintanto che siano veri i giudizi ai quali ci si rifà per la giustificazione.
17. Le leggi della logica non possono venir giustificate in base a una indagine psicologica.

Indice degli autori